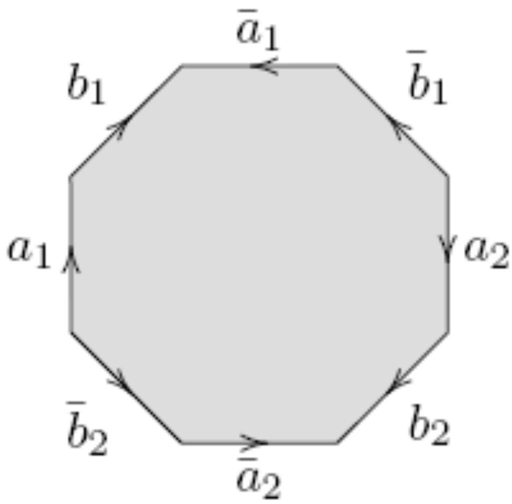
Blatt 4

Übung 4.1 (2+2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass $([0,1] \amalg [2,3])_{1\sim 2}$ homöomorph zu $[0,2]$ ist.

(b) Definiere eine Äquivalenzreaktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{eucl})$ durch $x \sim y$ genau dann wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Beschreiben Sie $\mathbb{R}/_\sim$.

(c) Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem regulären Achteck A, die die Seiten wie auf dem Bild identifiziert.



Skizziere einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der homöomorph zu $A/_\sim$ ist. (Aussagekräftige Skizzen sind ausreichend, es ist nicht notwendig, im Detail zu prüfen, dass ein Homöomorphismus vorliegt.)

Übung 4.2 (2+3 Punkte)

(a) Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Hausdorffsche Räume mit Basispunkt. Zeigen Sie, dass die Einpunktvereinigung $X \vee Y$ Hausdorffsch ist.

(b) Es sei $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

Zeigen Sie, dass das topologische Produkt $X \coloneqq \Pi_{i \in I} X_i$ genau dann Hausdorff ist, wenn jeder der Faktoren $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ Hausdorff ist.

Übung 4.3 (1+2+2 Punkte)

Ein topologischer Raum heißt *regulär* wenn folgende Eigenschaft gilt: Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$, die den Punkt x nicht enthält, gibt es disjunkte offene Mengen $x \in U \subset X$ und $A \subset V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(a) Geben Sie ein Beispiel, für einen regulären Raum, der nicht Hausdorff ist.

(b) Zeigen Sie, dass X genau dann regulär ist, wenn für jedes $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x, eine Umgebungsbasis bilden.

(c) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ die Menge $\mathcal{S}$ der Mengen der Form $O \setminus C$ wobei O offen in der euklidischen Topologie ist und C eine Beliebige abzählbare Teilmenge.

$\mathcal{S}$ ist Basis für eine Toplogie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie dass $\mathcal{CT}$ Hausdorffsch aber nicht regulär ist.

Warnung zur Literatur: In dieser Konvention heißt ein regulärer Hausdorff-Raum auch T3-Raum. (Zur Erinnerung: ein Hausdorffscher Raum ist T2.) Diese Konvention findet sich in Wikipedia. Es findet sich allerdings in anderen Quellen (von Querenburg, Laures-Szymik) die genau umgekehrte Konvention: Dann bedeutet regulär automatisch Hausdorff, und T3 ist die oben definierte Eigenschaft ohne Annahme von Hausdorff.

Übung 4.4 (3+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{S}^1)^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

(b) * Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 9.11.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.