Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 7

Übung 7.1 (3+1+1+1+1 Punkte)

Wir konstruieren eine Topologie auf $X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Hier ist ∞ ein Platzhalter für einen neuen, "unendlich fernen" Punkt, den wir zu $\mathbb{R}^n$ hinzufügen.

Sei $\mathcal{T}$ definiert wie folgt.

- $U \subset \mathbb{R}^n \subset X$ ist in $\mathcal{T}$, wenn $U \in \mathcal{T}_{eucl}$
- $U = U' \cup \{\infty\} \subset X$ ist in $\mathcal{T}$, wenn $\mathbb{R}^n \setminus U'$ kompakt ist (mit der Unterraumtopologie von $\mathcal{T}_{eucl}$).

(a) Prüfen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist.

(d) Ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Ihnen bekannten topologischen Raum?

(e) * Zeigen Sie, dass es für jeden lokal kompakten Hausdorff-Raum X einen kompakten Hausdorff-Raum $X^+ = (X \cup \{\infty\}, \mathcal{T})$ gibt, der eindeutig bis auf Homöomorphismus ist.

Übung 7.2 (3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und I eine Menge.

Zeigen Sie, dass $\prod_I X \cong \mathrm{Map}(I, X)$.

Hier fassen wir auf der rechten Seite I als diskreten topologischen Raum auf; $\mathrm{Map}(I, X)$ hat die KO-Topologie.

Übung 7.3 (2+1+1+1+1 Punkte)

In dieser Übung beweisen wir eine wichtige Konsequenz von Urysohns Lemma.

Sei X ein normaler Raum, sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Wir werden eine stetige Funktion F auf ganz X konstruieren, sodass die Einschränkung von F auf X gleich f ist.

(a) Nehmen wir zuerst an, dass f beschränkt ist und $f(A) \subset [-1, 1]$. Finde eine Funktion G_1, die 0 auf $f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ und 1 auf $f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ ist.

(b) Definiere $F_1 := \frac{2}{3}G_1 - \frac{1}{3}$ und zeige $\begin{cases} |f(x) - F_1(x)| & \leq & \frac{2}{3} & \text{für alle} & x \in A \\ |F_1(x)| & \leq & \frac{1}{3} & \text{für alle} & x \in X\ . \end{cases}$.

(c) Durch Betrachtung von $f^{(1)} = f - F_1 : A \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ konstruiere eine Funktion $F_2 : X \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} |f^{(1)}(x) - F_2(x)| & \leq & (\frac{2}{3})^2 & \text{für alle} & x \in A \\ |F_2(x)| & \leq & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \text{für alle} & x \in X\ . \end{cases}$

(d) Definieren Sie induktiv eine Folge $(F_n)_n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\begin{aligned} |f(x) - \textstyle\sum_{i=1}^n F_i(x)| &\leq (\tfrac{2}{3})^n \quad \text{für alle} \quad x \in A \\ |F_n(x)| &\leq \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-1} \quad \text{für alle} \quad x \in X\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion F auf X gibt mit $F|_A = f$.

(e) * Beweisen Sie die Aussage nun für den Fall, dass f nicht beschränkt ist.

Übung 7.4 (2+2 Punkte)

(a) In dieser Übung zeigen Sie, dass eine Gruppe als Kategorie mit einem Objekt aufgefasst werden kann.

Konstruieren Sie für jede Gruppe G eine Kategorie BG mit einem Objekt und einem Morphismus für jedes Gruppenelement von G.

Zeigen Sie, dass jeder Morphismus in BG ein Isomorphismus ist.

Zeigen Sie weiterhin, dass mit Ihrer Definition ein Funktor von BG nach BH genau ein Gruppenhomomorphismus $G \to H$ ist.

(b) Wir erinnern uns an den Vergessfunktor $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ der jeden topologischen Raum auf die zugrundelegende Menge abbildet.

Definieren Sie zwei verschiedene Funktoren L und R von **Set** nach **Top** so dass für jede Menge M und jeden topologischen Raum X gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(LM, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(M, VX)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(VX, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, RM)$.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 30. November.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.