Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 8

Übung 8.1 (2+1+1 Punkte)

(a) Erinnern Sie sich an den Quotienten X/A für einen topologischen Raum X mit Untermenge A. Wie lässt sich X/A als Kolimes ausdrüken?

Was ist der Quotient $X/\emptyset$ und warum?

(b) Betrachten Sie $S^\infty = \operatorname{colim} S^n$ wie in der Vorlesung. Identifizieren Sie für jedes n einen Unterraum, der homöomorph zu S^n ist (in der Folge als S^n bezeichnet). Zeigen Sie, dass $A \subset S^\infty$ abgeschlossen ist, genau wenn alle $A \cap S^n$ abgeschlossen sind.

(c) Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) Räume mit Grundpunkten. Zeigen Sie, dass $(X, x_1) \vee (X, x_2)$ der Kolimes für das diskrete Diagramm $i \mapsto (X, x_i)$ in der Kategorie der topologischen Räume mit Grundpunkt ist.

In anderen Worten, zeigen Sie, dass es für jedes Paar von stetigen Abbildungen $f_i : (X_i, x_i) \to (Z, z)$ mit $f_i(x_i) = z$ eine eindeutige Abbildung $X_1 \vee X_2 \to Z$ gibt.

Übung 8.2 (1+1+2+1 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Diagramm

$$\cdots \subset B_{1/4}(0) \subset B_{1/3}(0) \subset B_{1/2}(0) \subset B_1(0)$$

über $(\mathbb{N}, \geq)$. Was ist der Limes?

(b) Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir betrachten $f, g : X \rightrightarrows Y$ als Diagramm über $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Beschreiben Sie den Limes.

(c) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbf{Z}_p = \lim_n \mathbf{Z}/p^n$ aus Beispiel 1.23.5.4 kompakt ist.

(d) * Betrachten Sie das Bouquet $X_n := \vee_{i=1}^n S^1$ mit einem gemeinsamen Grundpunkt. Wir haben Projektionen

$$X_{n+1} := \vee_{i=1}^{n+1} S^1 = \vee_{i=1}^n S^1 \vee S^1 \to X_n := \vee_{i=1}^n S^1 ,$$

die die $(n+1)$-te Schlaufe auf den gemeinsamen Grundpunkt abbildet.

Ist $X = \lim X_i$ homöomorph zur unendlichen Einpunktvereinigung $\vee_{i=1}^\infty S^1 = \amalg_{i=1}^\infty S^1/_\sim$, wobei $\sim$ alle Grundpunkte identifiziert?

Übung 8.3 (1+1 Punkte)

Schreiben sie das Alphabet in Großbuchstaben.

(a) Klassifizieren Sie alle Buchstaben in Homöomorphieklassen. Begründen Sie dabei beispielhaft, warum einige Paare von Buchstaben nicht homöomorph sind.

(b) Stellen Sie eine Vermutung zur Klassifizierung aller Buchstaben in Homotopieklassen auf.

Übung 8.4 (4 Punkte)

Für jeden topologischen Raum X definieren wir den Kegel über X als $CX = X \times I/_\sim$ wobei $(x, s) \sim (x', s')$ genau wenn $x = x'$ und $s = s'$ oder wenn $s = s' = 1$, x, x' beliebig.

Zeigen Sie, dass CX für jedes X zusammenziehbar ist.

Übung 8.5 (1+1+1 +1+1 Punkte)

(a) Gegeben sei ein topologischer Raum Y. Zeigen Sie, dass es einen Funktor h^Y : $\mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}$ gibt, definiert durch $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ und $f \mapsto (f^* : g \to g \circ f)$.

(b) Zeigen Sie ebenso, dass es einen Funktor h_X : $\mathbf{hTop} \to \mathbf{Set}$ gibt, definiert durch $Y \mapsto [X, Y]$ und $f \mapsto f_*$.

(c) Sei von nun an I eine partielle Ordnung. Zeigen Sie, dass h^Y jedes I-Diagramm in **Top** zu einem I^{op}-Diagramm in **Set** schickt und dass es für jedes I-Diagramm X eine Bijektion von Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(\operatorname{colim} X_i, Y) \cong \lim_{I^{op}} \mathrm{Hom}(X_i, Y)$$

(d) Angenommen es gibt eine stetig Abbildung $f : X \to Y$ so dass für jedes Z die Abbildung $\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ definiert durch $g \mapsto g \circ f$ eine Bijektion ist. Zeigen Sie, dass X und Y homöomorph sind.

(e) Sei Z lokal kompakt. Zeigen Sie, dass für jedes Diagramm X in **Top** über I gilt:

$$(\operatorname{colim}_I X_i) \times Z \cong \operatorname{colim}_I(X_i \times Z)$$

Abgabetermin ist die Vorlesung am 7. Dezember.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.