

## Mathematische Stochastik

### Ergänzungen zu 3.2

#### A In 3.2 behandelte Begriffe

Riemann-Dichte, Anwendung von Fortsetzungs- u. Eindeutigkeitssatz (o.Bew.), Rechteck-Verteilung (stetige Gleichverteilung), Exponential-Verteilung, Normalverteilung, Standard-Normalverteilung, Gamma- und Beta-Verteilung, R-Dichten in  $\mathbb{R}^n$ , stetige Gleichverteilung in  $\mathbb{R}^n$ .

#### B Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz: Präzisierung und Beweis-Skizze

Prinzip: Ein Maß  $\mu$  wird auf einem „geeigneten“ Erzeuger  $\mathcal{E}$  definiert (z.B.  $\mathcal{G}_1$ ) und dann auf  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  fortgesetzt ( $\mathcal{A}(\mathcal{G}_1) = \mathbb{B}$ ).

Definition:  $\mathcal{S}$  heißt Semi-Ring : $\Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{S}$ ,  $AB \in \mathcal{S}$ ,  $A \setminus B = \sum_{i=1}^m C_i$ ,  $C_i \in \mathcal{S}$ .

Anwendung:  $\mathcal{G}_1$  ist ein Semi-Ring, ebenso  $\mathcal{G}_n$ .

Definition:  $\mathcal{R}$  heißt Ring : $\Leftrightarrow \emptyset, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$  ( $\Leftrightarrow \emptyset, AB, A \Delta B \in \mathcal{R}$ ).

Folgerung:  $\mathcal{S}$  ist ein Semiring  $\Rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{S}} := \{\sum_{i=1}^m C_i, C_i \in \mathcal{S}\}$  ist ein Ring.

Anwendung: Für  $\mathcal{S} = \mathcal{G}_1$  (bzw.  $\mathcal{G}_n$ ) heißt  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$  der „Ring der Figuren“.

Definition:  $\mu$  heißt (Prä-)Maß auf  $\mathcal{E}$  : $\Leftrightarrow$  (1)  $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{E}$ , (2')  $\mu(\emptyset) = 0$ , (3')  $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ , falls  $A_i \in \mathcal{E}$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$ .

Anwendung: Zu e. R-Dichte  $f$  ist  $P((a, b]) := \int_a^b f(x) dx$  ein Prämaß auf  $\mathcal{G}_1$ .

Beweis-Idee für  $\sigma$ -Additivität: eine endliche offene Überdeckung.

Fortsetzungssatz: Ein (Prä-)Maß auf e. Semi-Ring  $\mathcal{S}$  besitzt e. Fortsetzung auf  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ , nämlich  $\mu(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) : B_i \in \mathcal{S}, \cup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A\}$ .

Beweis-Idee:  $A \mapsto \mu(A)$  ist äußeres Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , die Einschränkung auf  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  ist das gesuchte Maß.

Definition:  $\mathcal{E}$  ist  $\cap$ -stabil, falls mit  $A, B \in \mathcal{E}$  auch  $AB \in \mathcal{E}$ .

$\mu$  ist  $\sigma$ -endlich auf  $\mathcal{E}$  : $\Leftrightarrow \exists E_i \in \mathcal{E}$ ,  $E_i \uparrow \Omega$ , mit  $\mu(E_i) < \infty$ .

Eindeutigkeits-Satz: Zwei Maße  $\mu_1, \mu_2$  auf  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  mit „ $\mu_1 = \mu_2$  auf  $\cap$ -stabilem Erzeuger  $\mathcal{E}$  und dort  $\sigma$ -endlich“ sind gleich.

Beweis-Idee: Es geht „fast“ mit dem „Beweisprinzip für  $\sigma$ -Algebren“, man braucht aber eine Variante, die „Dynkin-Systeme“.

Anwendung: Zu e. R-Dichte  $f$  ex. eind.  $P$  auf  $\mathbb{B}$  mit  $P((a, b]) = \int_a^b f(x) dx$ .

Folgerung: Durch  $\lambda((a, b]) = b - a$  auf  $\mathcal{G}_1$  wird auf  $\mathbb{B}$  eind. e. Maß  $\lambda$  definiert, das Lebesgue-Maß, und  $\lambda$  ist translations-invariant (entspr. auf  $\mathcal{G}_n$  bzw.  $\mathbb{B}^n$ ).

Anwendung: Es ex.  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $B \notin \mathbb{B}$ : Sei  $x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ .  $B \subset (0, 1]$  bestehe aus je 1 Repräs. aus jeder Äquiv.klasse. Sei  $\mathbb{Q} \cap (-1, 1] = \{r_1, r_2, \dots\}$ .

$\Rightarrow (0, 1] \subset \sum_{i=1}^{\infty} (B + r_i) \subset (-1, 2]$ . Wäre  $B \in \mathbb{B}$ , so wäre  $\lambda(B) = \lambda(B + r_i)$  definiert. Dann wäre  $1 = \lambda((0, 1]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B) \leq \lambda((-1, 2]) = 3$ . Widerspruch!