Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Rückblick Prädikatenlogik

Mia-Mayleen Löwe

basierend auf dem Buch Model Theory: An Introduction

Was ist nochmal Prädikatenlogik?

$\forall$ $\exists$

Wofür brauchen wir die Prädikatenlogik?

Was sind formale Beweise?

Syntax vs. Semantik

$\vdash$ $\models$

1.1 Vokabulare und Strukturen

Definition Ein Vokabular $\mathcal{L}$ wird definiert durch

(i) Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen und Zahlen $n_f \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für jedes $f \in \mathcal{F}$

(ii) Eine Menge $\mathcal{R}$ von Relationssymbolen und Zahlen $n_R \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für jedes $R \in \mathcal{R}$

(iii) Eine Menge $\mathcal{C}$ von Konstantensymbolen

Die Zahlen n_f und n_R geben an, dass f eine Funktion mit n_f Variablen ist und R ist eine n_R-stellige Relation.

Definition Sei $\mathcal{L}$ ein Vokabular. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ wird definiert durch:

(i) Eine Menge $M \neq \emptyset$, genannt das Universum / die Trägermenge von $\mathcal{M}$

(ii) Eine Funktion $f^{\mathcal{M}}: M^{n_f} \to M$ für jedes $f \in \mathcal{F}$

(iii) Eine Menge $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$ für jedes $R \in \mathcal{R}$

(iv) Ein Element $c^{\mathcal{M}} \in M$ für jedes $c \in \mathcal{C}$

$f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}$ und $c^{\mathcal{M}}$ sind die Interpretationen von f, R und c.

Schreibe $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} : f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}$ und $c \in \mathcal{C})$

$\mathcal{L} = \{f, g, e\}$

$n_f = 1$

$n_g = 2$

$e \in \mathcal{C}$

$(\mathbb{R}, -, +, 0)$

$f^{\mathcal{M}}(x) = -x$

$g^{\mathcal{M}}(x, y) = x + y$

$e^{\mathcal{M}} = 0$

Definition Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Eine <u>$\mathcal{L}$-Einbettung</u> ist eine injektive Abbildung $\eta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, sodass:

(i) $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{n_f})) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \dots, \eta(a_{n_f}))$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $a_1, \dots, a_{n_f} \in M$

(ii) $(a_1, \dots, a_{m_R}) \in R^{\mathcal{M}}$ genau dann, wenn $(\eta(a_1), \dots, \eta(a_{m_R})) \in R^{\mathcal{N}}$ für alle $R \in \mathcal{R}$ und $a_1, \dots, a_{m_1} \in M$

(iii) $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ für alle $c \in \mathcal{C}$

Eine bijektive $\mathcal{L}$-Einbettung heißt <u>$\mathcal{L}$-Isomorphismus</u>.
$\mathcal{M}$ ist eine <u>Unterstruktur</u> von $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{N}$ ist eine <u>Erweiterung</u> von $\mathcal{M}$, wenn $M \subseteq N$ und die Inklusionsabbildung eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist

$(\mathbb{R}, +, 0)$ Erweiterung von $(\mathbb{Z}, +, 0)$

$(\mathbb{Z}, +, 0) \to (\mathbb{R}, \cdot, 1)$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L} = \{f, e\}$

$\eta: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto e^x$

$\eta(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \eta(x) \cdot \eta(y)$

$\eta(0) = e^0 = 1$

Definition Sei $V=\{v_1, v_2, \dots\}$ eine unendliche Menge von Variablensymbolen. Die Menge der $\underline{\mathcal{L}\text{-Terme}}$ ist die kleinste Menge T, für die gilt:

(i) $c \in T$ für jedes $c \in C$

(ii) $v_i \in T$ für jedes $v_i \in V$

(iii) $f(t_1, \dots, t_{n_f}) \in T$ für $t_1, \dots, t_{n_f} \in T$ und $f \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{L} = \{f, g, c\}$$
$$n_f = 1$$
$$n_g = 2$$
$$c \in C$$

- $t_1 = g(v_1, c)$
- $t_2 = f(g(c, f(v_1)))$
- $t_3 = g(f(g(v_1, v_2)), g(v_1, f(v_2)))$

Definition Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Sei t ein Term, der unter Verwendung von Variablen aus $v=(v_1,\dots,v_m)$ aufgebaut ist. Sei s ein Unterterm von t und $\bar{a}=(a_1,\dots,a_m)\in M^m$. Definiere $s^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ induktiv:

(i) Ist s ein Konstantensymbol c, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a})=c^{\mathcal{M}}$

(ii) Ist s die Variable v_i, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a})=a_i$

(iii) Ist s der Term $f(t_1,\dots,t_{n_f})$ mit f Funktionssymbol von $\mathcal{L}$ und $t_1,\dots,t_{n_f}$ Termen, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a})=f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}),\dots,t_{n_f}^{\mathcal{M}}(\bar{a}))$.

$$\mathcal{L}=\{f,g,c\}$$
$$n_f=1$$
$$n_g=2$$
$$c\in C$$

- $t_1=g(v_1,c)$
- $t_2=f(g(c,f(v_1)))$
- $t_3=g(f(g(v_1,v_2)),g(v_1,f(v_2)))$

$$\mathcal{M}=(\mathbb{R},\exp,+,1)$$

$$t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a})=a_1+1$$

$$t_2:\ f(\underbrace{g(c,\underbrace{f(v_1)}_{e^{a_1}})}_{1+e^{a_1}})$$

$$t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})=e^{1+e^{a_1}}$$

$$t_3:\ g(f(\underbrace{\underbrace{g(v_1,v_2)}_{a_1+a_2})}_{e^{a_1+a_2}},\underbrace{g(v_1,\underbrace{f(v_2)}_{e^{a_2}})}_{a_1+e^{a_2}})$$

$$t_3^{\mathcal{M}}(a_1,a_2)=e^{a_1+a_2}+(a_1+e^{a_2})$$

Definition ϕ ist eine atomare $\mathcal{L}$-Formel, wenn ϕ entweder

(i) $t_1 = t_2$ ist mit t_1 und t_2 Termen oder

(ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$ mit $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Termen.

Die Menge der $\mathcal{L}$-Formeln ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, und für die gilt:

(i) Wenn $\phi \in \mathcal{W}$, so auch $\neg\phi \in \mathcal{W}$

(ii) Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{W}$, so auch $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi) \in \mathcal{W}$

(iii) Wenn $\phi \in \mathcal{W}$, so auch $\exists v_i \phi, \forall v_i \phi \in \mathcal{W}$

Definition Eine Variable v kommt in einer Formel ϕ frei vor, wenn sie nicht innerhalb eines $\exists v$- oder $\forall v$-Quantors steht. Andernfalls ist v gebunden.
Eine Formel ist eine Aussage, wenn sie keine freien Variablen hat.
Schreibe $\phi(v_1, \dots, v_n)$, um die freien Variablen in ϕ anzudeuten.

$\phi = \exists v_2 \; v_2 \cdot v_2 = v_1$ $\qquad (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$

$\psi = \forall v_1 \left(v_1 = 0 \vee \exists v_2 \; v_2 \cdot v_1 = 1 \right)$

Definition Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus $\bar{v} = (v_1, \dots, v_m)$ und sei $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in M^m$. Definiere $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ induktiv:

(i) Wenn ϕ $t_1 = t_2$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls $t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$.

(ii) Wenn ϕ $R(t_1, \dots, t_{n_R})$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls $(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \dots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$.

(iii) Wenn ϕ $\neg\psi$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls $\mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

(iv) Wenn ϕ $(\psi \wedge \theta)$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$.

(v) Wenn ϕ $(\psi \vee \theta)$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ oder $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$.

(vi) Wenn ϕ $\exists v\, \psi(\bar{v}, v)$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls ein $b \in M$ existiert, sodass $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

(vii) Wenn ϕ $\forall v\, \psi(\bar{v}, v)$ ist, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, falls für alle $b \in M$ $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$ gilt.

Wenn $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ gilt, so sage <u>$\mathcal{M}$ erfüllt $\phi(\bar{a})$</u> oder <u>$\phi(\bar{a})$ ist wahr in $\mathcal{M}$</u>.

$\phi \to \psi$	$\neg\phi \vee \psi$
$\phi \leftrightarrow \psi$	$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

- $\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$
- $\bigvee_{i=1}^{n} \psi_i = \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$

Proposition Sei $\mathcal{M}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$, $\bar{a} \in M$ und $\phi(\bar{v})$ eine Quantoren-freie Formel. Dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ genau dann wenn $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$

Beweis Per Induktion über den Formelaufbau.

$\bar{a} := (a_1, \dots, a_m) \in M^m$

$\bar{v} := (v_1, \dots, v_m) \in V^m$

Elementare Äquivalenz und Isomorphismus

Definition Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind <u>elementar äquivalent</u>, wenn $\mathcal{M} \models \phi$ genau dann wenn $\mathcal{N} \models \phi$ für alle $\mathcal{L}$-Aussagen ϕ. Schreibe $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Wir bezeichnen mit $Th(\mathcal{M})$, der <u>vollständigen Theorie von $\mathcal{M}$</u>, die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen ϕ, für die $\mathcal{M} \models \phi$ gilt.

Theorem Gibt es einen Isomorphismus $j: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, so gilt $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

<u>Beweis:</u> Zeige per Induktion über den Formelaufbau, dass $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models \phi(j(a_1), \dots, j(a_n))$ für alle Formeln ϕ.

$$j(t^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = t^{\mathcal{N}}(j(\bar{a}))$$

1.2 Theorien

Definition Eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.
$\mathcal{M}$ ist ein Modell von T, wenn $\mathcal{M} \models \phi$ für alle Aussagen $\phi \in T$ gilt. Schreibe dann $\mathcal{M} \models T$.
Eine Theorie ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat.
Eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen K ist eine elementare Klasse, wenn es ein $\mathcal{L}$-Theorie T gibt, sodass $K = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models T\}$

$$T = \{\forall x \, x = 0, \exists x \, x \neq 0\}$$

Unendliche Mengen

Sei $\mathcal{L} = \emptyset$.

Betrachte die $\mathcal{L}$-Theorie, in der wir für jedes n die Aussage $\phi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \le j \le n} x_i \neq x_j$ haben.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit Universum M ist genau dann Modell von T, wenn M unendlich ist.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$

Gruppen

Sei $\mathcal{L}_g = \{\cdot, e\}$ mit zweistelligem Relationssymbol $\cdot$ und Konstantensymbol e.

Die Klasse der Gruppen wird axiomatisiert durch

$\forall x \; e \cdot x = x \cdot e = x$

$\forall x \forall y \forall z \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$\forall x \exists y \; x \cdot y = y \cdot x = e$

abelsche Gruppen:

$\forall x \forall y \; x \cdot y = y \cdot x$

$(\mathbb{Z}, +, 0)$

Ringe und Körper

Sei $\mathcal{L}_r = \{+,-,\cdot,0,1\}$ mit zweistelligen Funktionssymbolen $+,-$ und $\cdot$ und Konstantensymbolen 0 und 1.
Die Axiome für Ringe sind
die Axiome für additive abelsche Gruppen

$\forall x \forall y \forall z (x-y=z \leftrightarrow x=y+z)$

$\forall x\, x\cdot 0 = 0$

$\forall x \forall y \forall z (x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$

$\forall x\, x\cdot 1 = 1\cdot x = x$

$\forall x \forall y \forall z\; x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

$\forall x \forall y \forall z\; (x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$ $\qquad (\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1)$

Die Klasse der Körper:

$\forall x \forall y\; x\cdot y = y\cdot x$

$\forall x (x\neq 0 \rightarrow \exists y\; x\cdot y = 1)$ $\qquad (\mathbb{R},+,-,\cdot,0,1)$

Die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper:

$\forall a_0 \ldots \forall a_{n-1} \exists x\; x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0$ für $n=1,2,\ldots$

Sei <u>ACF</u> die Menge der Axiome für algebraisch abgeschlossene Körper. $\qquad (\mathbb{C},+,-,\cdot,0,1)$

Sei Ψ_p die $\mathcal{L}_r$-Aussage $\forall x\; \overbrace{x+\ldots+x}^{p\text{-mal}}=0$, die sagt, dass ein Körper Charakteristik p hat. Für $p>0$ Primzahl sei $ACF_p = ACF \cup \{\Psi_p\}$ und es sei $ACF_0 = ACF \cup \{\neg\Psi_p : p>0\}$ die Theorien der algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik p bzw. Charakteristik 0.

Peano Arithmetik

Sei $\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$ mit zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$, einstelligem Funktionssymbol s und Konstantensymbol 0. Betrachte s als die Nachfolgerfunktion $x \mapsto x+1$

Die Peano Arithmetik wird axiomatisiert durch

$\forall x \; s(x) \neq 0$

$\forall x \; (x \neq 0 \to \exists y \; s(y) = x)$

$\forall x \; x + 0 = x$

$\forall x \forall y \; x + (s(y)) = s(x+y)$

$\forall x \; x \cdot 0 = 0$

$\forall x \forall y \; x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$

die Axiome $\mathrm{Ind}(\phi)$ für jede Formel $\phi(v, \bar{w})$, wobei $\mathrm{Ind}(\phi)$ die Aussage

$$\forall \bar{w} \, [(\phi(0, \bar{w}) \wedge \forall v \, (\phi(v, \bar{w}) \to \phi(s(v), \bar{w}))) \to \forall x \, \phi(x, \bar{w})]$$

ist

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$$

Definition Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage. ϕ folgt inhaltlich/semantisch aus T, wenn $\mathcal{M} \models \phi$ gilt, wann immer $\mathcal{M} \models T$ gilt. Schreibe $T \models \phi$.

$$\mathcal{L} = \{+, <, 0\}$$

T Theorie der geordneten abelschen Gruppen

$$\forall x \forall y \forall z \ (x < y \to x + z < y + z)$$

$$\phi = \forall x (x \neq 0 \to x + x \neq 0)$$

- $x < 0$: $x + x < 0 + x = x < 0$
- $x > 0$: $0 < x = 0 + x < x + x$

Definition Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. ϕ ist aus T ableitbar, wenn es eine endliche Folge $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ von Formeln mit $\phi = \psi_n$ gibt, sodass für jedes $i = \{1, \dots, n\}$ gilt:

(i) $\psi_i \in T$ oder

(ii) ψ_i geht durch Anwenden einer Regel aus einer Teilmenge von $\{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}$ hervor.

Schreibe $T \vdash \phi$. $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ heißt Beweis von ϕ.

Vollständigkeitssatz Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage. Es gilt $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.

1.3 Definierbare Mengen und Interpretierbarkeit

Definierbare Mengen

Definition Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. $X \subseteq M^n$ ist <u>definierbar</u>, genau dann, wenn es eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m)$ und $\bar{b} \in M^m$ gibt, sodass $X = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a},\bar{b})\}$. Wir sagen, dass $\phi(\bar{v},\bar{b})$ X <u>definiert</u>.
X ist <u>A-definierbar</u> / <u>definierbar über A</u>, wenn es eine Formel $\psi(\bar{v},w_1,\dots,w_l)$ und $\bar{b} \in A^l$ gibt, sodass $\psi(\bar{v},\bar{b})$ X definiert.

Beispiele

Sei $\mathcal{M} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ ein Ring. Sei $p(X) \in R[X]$.
Dann ist $Y = \{x \in R : p(x) = 0\}$ R-definierbar.
Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$. Sei $\phi(v, w_0, \dots, w_n)$ die Formel
$w_n \cdot \underbrace{v \cdot \ldots \cdot v}_{n\text{-mal}} + \ldots + w_1 \cdot v + w_0 = 0$. Dann definiert $\phi(v, a_0, \dots, a_n)$ Y.

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ der Körper der reellen Zahlen.
Sei $\phi(x, y)$ die Formel $\exists z (z \neq 0 \wedge y = x + z^2)$.
Da $a < b$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{M} \models \phi(a, b)$, ist $<$ auf $\mathcal{M}$ $\emptyset$-definierbar.

Sei F ein Körper und $\mathcal{M} = (F[X], +, -, \cdot, 0, 1)$ der Polynomring über F. Dann ist F in $\mathcal{M}$ definierbar:
$x = 0 \vee \exists y \; xy = 1$

Proposition Die vollständige Theorie der natürlichen Zahlen ist unentscheidbar.

ohne Beweis

Lemma Sei $\mathcal{L}_r$ das Vokabular der geordneten Ringe und $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ A-definierbar. Dann ist auch der topologische Abschluss von X A-definierbar.

Beweis: Sei $\phi(v_1, \dots, v_n, \bar{a})$ die Formel, die X definiert. Sei $\psi(v_1, \dots, v_n, \bar{\omega})$ die Formel

$\forall \varepsilon [\varepsilon > 0 \rightarrow \exists y_1, \dots, y_n (\phi(\bar{y}, \bar{\omega}) \wedge \sum_{i=1}^{n} (v_i - y_i)^2 < \varepsilon]$.

Dann ist $\bar{b}$ im Abschluss von X genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \psi(\bar{b}, \bar{a})$.

$\square$

Proposition Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Sei D_n eine Sammlung von Teilmengen von M^n für alle $n \geq 1$ und sei $D = (D_n : n \geq 1)$ die kleinste Sammlung, sodass:

(i) $M^n \in D_n$

(ii) Für alle n-stelligen Funktionssymbole f von $\mathcal{L}$ ist der Graph von $f^{\mathcal{M}}$ in D_{n+1}

(iii) Für alle n-stelligen Relationssymbole R von $\mathcal{L}$ gilt $R^{\mathcal{M}} \in D_n$

(iv) Für alle $i, j \leq n$, ist $\{(x_1, \dots, x_n) \in M^n : x_i = x_j\} \in D_n$

(v) Ist $X \in D_n$, dann ist $M \times X \in D_{n+1}$

(vi) Jedes D_n ist abgeschlossen unter Komplementbildung, Vereinigung und Durchschnitt

(vii) Wenn $X \in D_{n+1}$ und $\pi : M^{n+1} \to M^n$ die Projektionsabbildung $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ ist, dann gilt $\pi(X) \in D_n$

(viii) Wenn $X \in D_{n+m}$ und $b \in M^m$ ist, dann gilt $\{a \in M^n : (a, b) \in X\} \in D_n$.

Dann ist $X \subseteq M^n$ genau dann definierbar, wenn $X \in D_n$.

ohne Beweis

Proposition Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Falls $X \subset M^n$ A-definierbar ist, dann fixiert jeder $\mathcal{L}$-Automorphismus σ von $\mathcal{M}$, der A punktweise fixiert, die Menge X ebenfalls.

Beweis: Sei $\psi(\bar{v}, \bar{a})$ die $\mathcal{L}$-Formel, die X definiert, wobei $\bar{a} \in A$ ist. Sei σ ein Automorphismus von $\mathcal{M}$ mit $\sigma(\bar{a}) = \bar{a}$, und sei $\bar{b} \in M^n$.

Aus dem Theorem in Kapitel 1.1 wissen wir, dass wenn $j: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Isomorphismus ist, gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ genau dann wenn $\mathcal{N} \models \phi(j(\bar{a}))$. Daher gilt

$\mathcal{M} \models \psi(\bar{b}, \bar{a}) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\sigma(\bar{b}), \sigma(\bar{a}))$ und somit

$\mathcal{M} \models \psi(\bar{b}, \bar{a}) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\sigma(\bar{b}), \bar{a})$.

Also gilt $\bar{b} \in X$ genau dann wenn $\sigma(\bar{b}) \in X$.

$\square$

Definition Eine $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{N}$ ist in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ <u>definierbar interpretiert</u> genau dann wenn wir eine definierbare Menge $X \subset M^n$ für ein n finden können und die Symbole von $\mathcal{L}_0$ als definierbare Teilmengen und Funktionen auf X interpretieren können, sodass die resultierende $\mathcal{L}_0$-Struktur isomorph zu $\mathcal{N}$ ist.

K Körper

$G = GL_2(K)$

$X = \{(a,b,c,d) \in K^4 \mid ad-bc \neq 0\}$

$f : X^2 \to X$

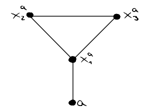
$$(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \longmapsto (a_1a_2+b_1c_2, a_1b_2+b_1d_2, c_1a_2+d_1c_2, c_1b_2+d_1d_2)$$

$id_X = (1,0,0,1)$

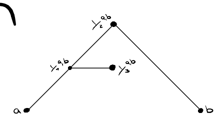
$(GL_2(K), \cdot, e)$ definierbar interpretiert in $(K, +, \cdot, 0, 1)$

Interpretation von Ordnungen in Graphen

Sei $(A,<)$ eine lineare Ordnung.
Wir bauen den Graphen G_A wie folgt:
Für jedes $a\in A$ hat G_A die Knoten a, x_1^a, x_2^a und x_3^a und G_A enthält den Teilgraphen



Es gibt keine weiteren Kanten, die x_i^a als Knoten enthalten.
Wenn $a<b$, füge die Knoten $y_1^{a,b}, y_2^{a,b}$ und $y_3^{a,b}$ hinzu und G_A enthalte dann den Teilgraphen



Es gibt keine weiteren Kanten, die die Knoten $y_i^{a,b}$ enthalten.
G_A enthält keine weiteren Kanten als die eben beschriebenen.
Die Knotenmenge ist nun $V_A = A\cup\{x_1^a, x_2^a, x_3^a : a\in A\} \cup\{y_1^{a,b}, y_2^{a,b}, y_3^{a,b} : a,b\in A \text{ und } a<b\}$.
Die Relation R_A auf V_A sei die kleinste symmetrische Relation, die alle Kanten (a,x_1^a), (x_1^a,x_2^a), (x_1^a,x_3^a), (x_2^a,x_3^a) für $a\in A$ sowie $(a,y_1^{a,b})$, $(y_1^{a,b},y_2^{a,b})$, $(y_1^{a,b},y_3^{a,b})$, $(y_2^{a,b},b)$ für $a<b$ enthält.

Sei $\mathcal{L}=\{R\}$ mit R eine zweistellige Relation.
Wir beschreiben eine $\mathcal{L}$-Theorie T von Graphen, sodass jedes Modell von T genau die Form G_A für eine bestimmte lineare Ordnung A hat. Definiere hierfür zwei Formeln, die die beiden Diagramme beschreiben:
Sei $\phi(x,u,v,w)$ die Formel, die ausdrückt, dass x,u,v und w verschieden sind, es die Kanten (x,u), (u,v), (u,w) und (v,w) gibt und dies die einzigen Kanten sind, die die Knoten u,v und w enthalten.
Es gilt $G_A\models\phi(a,x_1^a,x_2^a,x_3^a)$ für alle $a\in A$.
Sei $\psi(x,y,u,v,w)$ die Formel, die ausdrückt, dass

x, y, u, v und ω verschieden sind, es die Kanten $(x,u), (u,v), (u,\omega)$ und (v,y) gibt und dies die einzigen Kanten sind, die die Knoten u, v und ω enthalten. Es gilt $G_A \models \psi(a, b, y_1^{a,b}, y_2^{a,b}, y_3^{a,b})$ wenn $a<b$ in A.

Definiere die Formeln $\Theta_0(z), \ldots, \Theta_5(z)$:

$\Theta_0(z)$ ist $\exists u \exists v \exists \omega\, \phi(z, u, v, \omega)$

$\Theta_1(z)$ ist $\exists x \exists v \exists \omega\, \phi(x, z, u, \omega)$

$\Theta_2(z)$ ist $\exists x \exists u \exists \omega\, \phi(x, u, z, \omega)$

$\Theta_3(z)$ ist $\exists x \exists y \exists v \exists \omega\, \psi(x, y, z, v, \omega)$

$\Theta_4(z)$ ist $\exists x \exists y \exists u \exists \omega\, \psi(x, y, u, z, \omega)$

$\Theta_5(z)$ ist $\exists x \exists y \exists u \exists v\, \psi(x, y, u, v, z)$

Wenn $a, b \in A$ mit $a<b$, so gilt

$$G_A \models \Theta_0(a) \wedge \Theta_1(x_1^a) \wedge \Theta_2(x_2^a) \wedge \Theta_2(x_3^a)$$

und

$$G_A \models \Theta_3(y_1^{a,b}) \wedge \Theta_4(y_2^{a,b}) \wedge \Theta_5(y_3^{a,b}).$$

Das heißt es gilt für jeden Knoten x in A, dass $G_A \models \Theta_i(x)$ für ein eindeutiges $i = 0, \ldots, 5$.

Definition Eine $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{N}$ ist in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ interpretierbar, wenn es eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$, eine definierbare Äquivalenzrelation E auf X gibt und wir für jedes Symbol von $\mathcal{L}_0$ definierbare E-invariante Mengen auf X finden können, sodass X/E mit der induzierten Struktur isomorph zu $\mathcal{N}$ ist.

K Körper

$$X = \{(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1} : (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)\}$$

$$\bar{a} \sim \bar{b} :\Longleftrightarrow \exists\, 0 \neq \lambda \in K : \lambda \bar{a} = \bar{b}$$

$$X/_\sim = \mathbb{P}^n(K)$$

$f(X_0, \dots, X_n)$ homogenes Polynom über K

$$\exists d \quad f(\lambda \bar{x}) = \lambda^d f(\bar{x})$$

$$V = \{\bar{x} \in X : f(\bar{x}) = 0\}$$

$(\mathbb{P}^n(K), V/_\sim)$ ist interpretierbar in $(K, +, \cdot, 0, 1)$