Vollständige Theorien

Ein Vortrag auf Grundlage des Buchs:

„Modell Theory: An Introduction"

von David Marker.

2.2. Vollständige Theorien

Def. 2.2.1: L-Theorie T heißt vollständig, falls für einen L-Satz ϕ entweder $T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$ gilt.

Für eine L-Struktur $\mathcal{M}$, ist „die volle Theorie"

$$Th(\mathcal{M}) = \{ \phi : \phi \text{ ist ein } L\text{-Satz und } \mathcal{M} \models \phi \}$$

eine vollständige Theorie.

- einfachere L-Theorie T s.d. $\mathcal{M} \models T$ und T vollständig ist.

In diesem Fall gilt: $\mathcal{M} \models \phi \iff T \models \phi$ und wenn $T \not\models \phi$, dann gilt $T \models \neg\phi$ und somit $\mathcal{M} \models \neg\phi$.

Prop. 2.2.2: Sei T eine L-Theorie mit unendlichen Modellen.
Wenn κ eine unendliche Kardinalzahl ist mit $\kappa \geq |L|$, dann gibt es ein Modell von T mit der Kardinalität von κ.

Beweis: Sei $L^* = L \cup \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$

c_α sind neue Symbole in der Sprache / Vokabular L^*.

Sei T^* die L^*-Theorie $T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha, \beta < \kappa, \alpha \neq \beta\}$

Wenn $\mathcal{M} \models T^*$ gilt, dann gilt offensichtlich auch $\mathcal{M} \models T$ mit Kardinalität von mindestens κ.

Satz 2.1.11. Wenn T endlich erfüllbar (-e L-Theorie) & κ eine ∞-Kardinalzahl mit $\kappa \geq \lvert L \rvert$, dann ex. ein Modell von T mit Kardinalität von min. κ.

Es reicht also zu zeigen, dass T^* endlich erfüllbar ist:
Sei also $\Delta \subseteq T^*$ endlich. Dann ist $\Delta \subseteq T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in I\}$ mit I eine endliche Teilmenge von κ.
Sei $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell von T.
Wir können die Symbole $\{c_\alpha : \alpha \in I\}$ als $|I|$ verschiedene Elemente von $\mathcal{M}$ interpretieren. Da $\mathcal{M} \models \Delta$, ist T^* endlich erfüllbar.

Def. 2.2.3: Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und sei T eine Theorie mit Modellen der Größe κ.
Wir sagen T ist κ-kategorisch, wenn zwei beliebige Modelle von T der Kardinalität von κ, isomorph sind.

Sei $L = \{+, 0\}$ die Sprache der additiven Gruppen und sei T die L-Theorie der torsionsfreien teilbaren abelschen Gruppen. Die Axiome von T sind die Axiome für abelsche Gruppen zusammen mit den Axiomen:

- $\forall x \; (x \neq 0 \rightarrow \underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}} \neq 0)$ (Torsionsfreiheit)

- $\forall y \; \exists x \; \underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}} = y$ (Teilbarkeit)

für $n = 1, 2, \ldots$

Proposition 2.2.4: Die Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen ist κ – kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$.

Beweis: • Die Modelle von T sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{Q}$.

- Es gilt: Wenn V ein bel. $\mathbb{Q}$ – VR, dann ist die zugrunde liegende additive Gruppe von V ein Modell von T.
- Andererseits gilt: Wenn $G \models T$ mit $g \in G$ & $n \in \mathbb{N}, n > 0$, gibt es ein $h \in G$, s.d. $n \cdot h = g$. Wenn $n \cdot k = g$ gilt für $k \in G$, dann ist $n \cdot (h - k) = 0$. Da G torsionsfrei ist, gibt es genau ein $h \in G$, s.d. $n \cdot h = g$. Dieses Element nennen wir g/n. Wir können G als einen $\mathbb{Q}$ – VR unter der Operation $\frac{m}{n} \cdot g = m \left(\frac{g}{n} \right)$ ($m \in G$) betrachten.

• Zwei $\mathbb{Q}$ - VR sind genau dann isomorph, wenn sie die selbe Dimension haben.
Somit sind die Modelle T bis auf Isomorphie durch ihre Dimension bestimmt.

• Hat G die Dimension λ, dann gilt $|G| = \lambda + \aleph_0$.
Ist κ überabzählbar & $|G| = \kappa$, dann gilt $\dim G = \kappa$.
Sodass für $\kappa > \aleph_0$ alle Modelle von T zueinander isomorph sind.

Sei ACF_p die Theorie der algebraisch abgeschl. Körper der Charakteristik p, wobei p entweder 0 oder eine Primzahl ist.

Proposition 2.2.5.: ACF_p ist κ-kategorisch für alle überabzählbaren Kardinalzahlen κ.

Beweis: Zwei algebraisch abgeschlossene Körper sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Charakteristik und den selben Transzendenzgrad haben.
Ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Transzendenzgrad λ hat die Kardinalität $\lambda + \aleph_0$.
Wenn $\kappa > \aleph_0$ ist, dann hat ein algebraisch abgeschlossener Körper der Kardinalität κ ebenfalls den Transzendenzgrad κ.
Daher sind alle algebraisch abgeschlossenen Körper mit derselben Charakteristik und derselben überabzählbaren Kardinalität isomorph.

Beispiel 1: Sei L die leere Sprache.

Dann ist die Theorie einer unendlichen Menge für alle Kardinalzahlen κ, κ-kategorisch.

Beispiel 2: Sei $L = \{E\}$, wobei E eine binäre Relation ist.

Sei T die Theorie der Äquivalenzrelation mit genau zwei unendlichen Klassen.

Es ist leicht zu sehen, dass alle abzählbaren Modelle von T isomorph sind.

Andererseits ist T nicht κ-kategorisch für $\kappa > \aleph_0$.

Um dies zu zeigen, sei M_0 ein Modell, in dem beide Klassen die Kardinalität κ haben und sei M_1 ein Modell, in dem eine Klasse die Kardinalität κ & die andere Kardinalität $\aleph_0$ hat.

Offensichtlich sind M_0 & M_1 nicht isomorph.

Satz 2.2.6. (Vaught's Test)

Sei T eine erfüllbare Theorie ohne endliche Modelle, die κ-kategorisch für eine unendliche Kardinalzahl $\kappa \geq |L|$ ist.
Dann ist T vollständig.

Beweis: Angenommen T ist nicht vollständig. Dann gibt es einen Satz ϕ, s.d. $T \not\models \phi$ und $T \not\models \neg\phi$.
Da $T \not\models \psi$ genau dann gilt, wenn $T \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar ist, sind die Theorien $T_0 = T \cup \{\phi\}$ und $T_1 = T \cup \{\neg\phi\}$ erfüllbar.
Da T keine endlichen Modelle hat, haben T_0 und T_1 unendliche Modelle.

Prop. 2.2.2 $\Rightarrow$ Es gibt $\mathcal{M}_0$ & $\mathcal{M}_1$ mit Kardinalität κ, s.d. $\mathcal{M}_i \models T_i$.

Da $\mathcal{M}_0$ & $\mathcal{M}_1$ sich bezügl. ϕ widersprechen, sind sie nicht elementar äquivalent und somit nach Satz 1.1.10 nicht isomorph.

$\lightning$ zur κ-Kategorizität von T.

Satz 1.1.10 Ang. $j: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist ein Isomorphismus. Dann gilt $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

Der Vaughts Test impliziert, dass alle oben besprochenen kategorischen Theorien vollständig sind.
Insbesondere sind algebraisch abgeschlossene Körper (ACF) vollständig.

Definition 2.2.7. Eine L-Theorie ist entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für einen gegebenen L-Satz ϕ als Eingabe entscheiden kann, ob $T \models \phi$ gilt.

Lemma 2.2.8. Sei T eine rekursive, vollständige und erfüllbare Theorie in einer rekursiven Sprache L. Dann ist T entscheidbar.

Beweis: Da T erfüllbar ist, sind $A = \{\phi : T \models \phi\}$ & $B = \{\phi : T \models \neg\phi\}$ disjunkt.

Da T vollständig ist, ist $A \cup B$ die Menge aller L-Sätze.

Nach dem Vollständigkeitssatz gilt $A = \{\phi : T \vdash \phi\}$ & $B = \{\phi : T \vdash \neg\phi\}$.

Prop. 2.1.1. $\Rightarrow$ A & B sind rekursiv aufzählbar. Aber jede rekursiv aufzählbare Menge mit einem rekursiv aufzählbaren Komplement ist rekursiv.

Proposition 2.1.1. : Wenn L eine rekursive Sprache & T eine rekursive Theorie, dann ist $\{\phi : T \vdash \phi\}$ rekursiv aufzählbar.

Korollar 2.2.9. Für $p = 0$ oder p Primzahl ist ACF_p entscheidbar.

Insbesondere ist $Th(\mathbb{C})$, die Theorie erster Stufe für den Körper der komplexen Zahlen, entscheidbar.

Korollar 2.2.10. Sei ϕ ein Satz in der Sprache der Ringe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) ϕ ist wahr in den komplexen Zahlen. ($\mathbb{C}$ hat die Charakteristik 0)

(ii) ϕ ist in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null wahr.

(iii) ϕ ist in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null wahr.

(iv) Es gibt beliebig große Primzahlen p, s.d. ϕ in einem algebraisch abgeschl. Körper der Charakteristik p wahr ist.

(V) Es gibt ein m, s.d. für alle $p > m$, ϕ in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik p wahr ist.

Beweis:
- Die Äquivalenz von (i) - (iii) folgt aus der Vollständigkeit von ACF_0
- (V) $\Rightarrow$ (iv) ist klar.
- (ii) $\Rightarrow$ (V): Angenommen $ACF_0 \models \phi$. Lemma 2.1.14 $\Rightarrow$ Es gibt eine endliche Teilmenge $\Delta \subset ACF_0$, s.d. $\Delta \models \phi$. Wenn wir p groß genug wählen, dann gilt $ACF_p \models \Delta$. Sodass gilt $ACF_p \models \phi$ für alle hinreichend großen p.
- (iv) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen $ACF_0 \not\models \phi$. Da ACF_0 vollständig ist, gilt $ACF_0 \models \neg\phi$. Also gilt wie oben $ACF_p \models \neg\phi$ für hinreichend große p.

Satz 2.2.11. Jede injektive Polynomabbildung von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^n$ ist surjektiv. $n \in \mathbb{N}$

Beweis:
- Wenn k ein endlicher Körper, dann ist jede injektive Funktion $f: k^n \to k^n$ auch surjektiv.
- Beh.: Dies gilt auch für $\mathbb{F}_p^{alg}$, den algebraischen Abschluss des Körpers mit p Elementen.

  Beweis: Angenommen nicht. Seien $\bar{a} \in \mathbb{F}_p^{alg}$ die Koeffizienten von f & seien $\bar{b} \in (\mathbb{F}_p^{alg})^n$, s.d. $\bar{b}$ nicht im Bild von f liegt. Sei k der von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ erzeugte Unterkörper von $\mathbb{F}_p^{alg}$. Dann ist $f|_{k^n}$ eine injektive, aber nicht surjektive Polynomabbildung von k^n nach k^n. Aber $\mathbb{F}_p^{alg} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ ist ein lokal endlicher Körper. Somit ist k endlich,

- Angenommen der Satz ist falsch. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$. Sei $f(X) = (f_1(X_1), \dots, f_n(X_n))$ ein Gegenbeispiel, bei dem jedes $f_i \in \mathbb{C}[X]$ einen Grad von höchstens d hat.

  Es gibt einen L-Satz $\phi_{n,d}$, s.d. für einen Körper K gilt: $K \models \phi_{n,d}$ gdw. jede injektive Polynomabbildung von K^n nach K^n, bei der jede Koordinatenfunktion einen Grad von höchstens d hat, surjektiv ist.
  Wir können über Polynome vom Grad höchstens d quantifizieren, indem wir über die Koeffizienten quantifizieren.

Zum Beispiel ist $\phi_{2,2}$ der Satz:

$$\forall a_{0,0}\ \forall a_{0,1}\ \forall a_{0,2}\ \forall a_{1,0}\ \forall a_{1,1}\ \forall a_{2,0}$$
$$\forall b_{0,0}\ \forall b_{0,1}\ \forall b_{0,2}\ \forall b_{1,0}\ \forall b_{1,1}\ \forall b_{2,0}$$
$$\Big[\Big(\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big((\sum a_{ij} x_1^i y_1^j = \sum a_{ij} x_2^i y_2^j \wedge$$
$$\sum b_{ij} x_1^i y_1^j = \sum b_{ij} x_2^i y_2^j) \longrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)\big)\Big)$$
$$\longrightarrow \forall u \forall v \exists x \exists y \ \sum a_{ij} x^i y^j = u \wedge \sum b_{ij} x^i y^j = v\Big].$$

Nach der Behauptung gilt $\overline{\mathbb{F}}_p^{alg} \models \phi_{n,d}$ für alle Primzahlen p. Nach Korollar 2.2.10 gilt dann auch $\mathbb{C} \models \phi_{n,d}$, Widerspruch zur Annahme, dass es in $\mathbb{C}^n$ eine injektive aber nicht surjektive Polynomabbildung gibt.

Ende