Hausaufgaben 2. Woche
Abgabe: 18.04.2016, bis 12:15

1. Eine Aussage heisst Σ_1, wenn sie die Form $\exists x_0 \dots \exists x_k\, \theta$ hat, wo θ eine Δ_0-Aussage ist. Eine Aussage heisst Π_1, wenn sie die Form $\forall x_0 \dots \forall x_k\, \theta$ hat, wo θ eine Δ_0-Aussage ist.

   Sei M ein transitives Modell. Zeigen Sie, dass für alle Σ_1-Aussagen ϕ gilt: wenn $M \models \phi$ dann ϕ, und für alle Π_1-Aussagen ψ gilt: wenn ψ dann $M \models \psi$. [2 Punkte]

2. In der Vorlesung haben wir die Relativierung ϕ^M definiert. Dabei wird nur der "Träger" des Klassen-Modells verändert, die Epsilon-beziehung $\in$ bleibt aber gleich.

   Sei M nun eine Klasse und E eine (Klassen)-Relation auf M. Dann ist $\phi^{(M,E)}$ die Aussage, die aus ϕ entsteht, wenn "$\forall x$" und "$\exists x$", wie zuvor, durch "$\forall x \in M$" bzw. "$\exists x \in M$" ersetzt werden, und überdies auch jedes "$\in$" durch "E" ersetzt wird.

   (a) Geben Sie eine formale rekursive Definition von $\phi^{(M,E)}$. [1 Punkt]

   (b) Was bedeutet formal die Aussage "in ZFC kann bewiesen werden, dass (M, E) ein Modell von T ist"? [1 Punkt]

3. Sei nun F eine bijektive (Klassen)-funktion von V nach V. Definieren wir E auf $V \times V$ indem wir setzen: $xEy \;:\Leftrightarrow\; x \in F(y)$. ZFC^- steht für ZFC ohne Fundierungsaxiom.

   (a) Wir behaupten, dass (V, E) ein Modell von ZFC^- ist. Wählen Sie zwei beliebige ZFC^--Axiome aus, und beweisen Sie, dass (V, E) diese erfüllt (in ZFC). [4 Punkte]

   (b) Benutzen Sie die obere Behauptung, um zu zeigen, dass

   $$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}^- + \exists x\, (x = \{x\}))$$

   [Hinweis: $F(0) := 1, F(1) := 0$]. [2 Punkte]