Hausaufgaben 5. Woche
Abgabe: 09.05.2016, bis 12:15

1. Beweisen Sie (ausführlich) Theorem II.5.10 im Kunen, nämlich:

   Theorem (ZFC). Sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl. Sei $\{A_\xi \mid \xi \leq \kappa\}$ eine Folge von Mengen, so dass:

   (a) für alle $\xi < \eta \leq \kappa$ gilt $A_\xi \subseteq A_\eta$,
   (b) $A_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} A_\xi$ für Limesordinalzahlen $\eta \leq \kappa$, und
   (c) $|A_\xi| < \kappa$ für alle $\xi < \kappa$, und $|A_\kappa| = \kappa$.

   Dann gibt es für alle $\xi < \kappa$ eine Limesordinalzahl η, mit $\xi < \eta < \kappa$, so dass $A_\eta \neq \varnothing$ und $A_\eta \preccurlyeq A_\kappa$. [6 Punkte]

   Hinweis: siehe Kunen.

2. (a) Sei M eine echte Klasse mit $M \models \mathsf{ZFC}$. Zeigen Sie, dass für alle Mengen x gilt: wenn $x \subseteq M$, dann gibt es eine Menge $y \in M$, so dass $x \subseteq y$. [2 Punkte]

   Hinweis: $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$.

   (b) Sei $M \neq \varnothing$ eine beliebige Klasse, und nehmen Sie an, dass für alle Mengen x gilt: wenn $x \subseteq M$ dann $x \in M$. Zeigen Sie, dass dann $V = M$ gilt. [2 Punkte]