Hausaufgaben 7. Woche
Abgabe: 30.05.2016, bis 12:15

1. Sei $\mathbb{P}$ eine Forcingpartialordnung und $A \subseteq \mathbb{P}$. A heisst eine **maximale Antikette** falls es eine Antikette ist die nicht zu einer grösseren Antikette erweitert werden kann (das heisst: $\forall p \in \mathbb{P}\, \exists q \in A$ so dass $p||q$). Zeigen Sie:

   (a) Wenn A eine maximale Antikette ist, dann ist $\{q \in \mathbb{P} \mid \exists p \in A\, (q \leq p)\}$ eine dichte Menge. [1 Punkt]

   (b) (AC) Wenn D eine dichte Menge ist, dann existiert eine maximale Antikette $A \subseteq D$. [2 Punkte]

   (c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent für alle κ:

      i. Wenn $\{D_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ eine Familie dichter Mengen ist, dann existiert ein Filter G, so dass $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$ für alle $\alpha < \kappa$.

      ii. Wenn $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ eine Familie maximaler Antiketten ist, dann existiert ein Filter G, so dass $G \cap A_\alpha \neq \varnothing$ für alle $\alpha < \kappa$. [2 Punkte]

2. **Definition:** Sei $s \in \omega^{<\omega}$ und $f \in \omega^\omega$ so dass $s \subseteq f$ (s ist Anfangssegment von f). Dann bezeichnet $[s, f]$ die Menge $\{g \in \omega^\omega \mid s \subseteq g \text{ und } \forall n > |s|\ (f(n) \leq g(n))\}$. Sei $\mathbb{P}$ die Forcingpartialordnung aller solcher $[s, f]$, mit der Ordnung: $[t, g] \leq [s, f] \ :\Leftrightarrow\ [t, g] \subseteq [s, f]$ (dieses Forcing wird auch "Hechler-forcing" genannt).

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ die c.c.c. hat. [1 Punkt]

   Hinweis: Für je zwei $[s, f]$ und $[s, g]$ mit dem gleichen Anfangssegment gilt ...

   (b) Sei G ein Filter auf $\mathbb{P}$, und sei $f_G := \bigcup\{s \mid \exists f\, ([s, f] \in G)\}$. Zeigen Sie, dass f_G eine Funktion ist, und wenn $[s, f] \in G$ dann $f_G \in [s, f]$. [1 Punkt]

   (c) Beweisen Sie nun den folgenden Satz:

   Satz. Sei MA vorausgesetzt. Sei $\kappa < 2^{\aleph_0}$ und $\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$ beliebig. Dann existiert ein $f \in \omega^\omega$, so dass für alle $\alpha < \kappa$ gilt:

   $$\exists n\, \forall m \geq n\ (f_\alpha(m) \leq f(m)).$$

   (wir sagen "f dominiert $\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$"). [3 Punkte]