## Teil 1) aus Ebbinghaus

Es stellt sich die Frage was passiert beim passiert bei Kardinales Exponention.
In Kap 4 (IX Machtigkeiten) von Ebbinghaus wir vor allen $2^{\aleph_\alpha}$ betrachtet, in bezug auf ZFC

zwar wissen wir was $2^i$ für endliches $i$
aber was ist $2^{\aleph_0}$

Cantorsche Kontinuumshypothes („CH"): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
(„Continums hypothesis")

und es gibt erweitert dazu die

allgemeine Kontinuumshypothes („GCH"): $\forall \alpha \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$
(„general continums hypothesis")

($\aleph$ soll aleph sein ☺)

und im ZFC geschrieben heißt es

gleich mächtig

„CH": $\forall x (x \subseteq \mathbb{R} \wedge x$ unendlich $\rightarrow x \sim \aleph_0 \vee x \sim \mathbb{R})$

„GCH" $\forall x ( x$ unendlich $\rightarrow \neg \exists y (x \prec y \wedge y \prec Pot(x)))$

→ bemerke CH ist spezialfall für GCH

{ zitat von Cantor

schlussendlich hat er es nie beweisen können trotz viel hin und her.

T2 aus Jech S 3.3 Theorem 3.11

zuest ein paar definitionen

Def limit ordinalzahl
heißt eine OZ $\alpha$ wenn gilt

$$\alpha = \sup\{\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \bigcup \alpha$$

0 ist auch eine limit OZ $\sup \emptyset = 0$

die von KZ ist noch eine anaren wird aber im Vortrag noch verwenaet abr nicht aefinirt !!

Def cofinalität

$\alpha > 0$ eine limit OZ
eine steigende $\beta$ sequenz $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \beta \rangle$
und $\beta$ limit OZ ist cofinal in $\alpha$ wenn
$\lim_{\xi \to \beta} \alpha_\xi = \alpha$

(analog $A \subset \alpha$ ist cofinal im $\alpha$ wenn $\sup A = \alpha$)

wenn $\alpha$ eine unendlich limit OZ ist
die cofinalität (cofinality eng.) von $\alpha$

$\mathrm{cf}\,\alpha =$ die kleinste limit OZ $\beta$ s.d $\beta$ ist
ist cofinal im $\alpha$

→ Bemerke: $\mathrm{cf}\,\alpha$ ist limit OZ und $\mathrm{cf}\,\alpha \leq \alpha$

Def regulär wenn $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ dann heiß $\alpha$ regulär

Def weekly inaccessible (schwach unerreichbar ?!)

eine nicht abzahlbare kardinalzahl heißt
weekly inaccessible wenn es eine limes kardinal
zahl ist und regulär

**Theorem 3.11:** wenn $\kappa$ (kappa) eine unendliche Kardinalzahl ist, dann gilt

$$\kappa < \kappa^{cf\kappa}$$

Bew: Sei $F$ eine Menge von $\kappa$ funktionen (funktionen die ich über $\kappa$ indiziere)
$f \in F$ dann ist $f: cf\kappa \to \kappa$
$F = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$

Es reicht zu zeigen dass es eine funktion $f: cf\kappa \to \kappa$ gibt s.d. $f \neq f_\alpha$ $\forall \alpha$ ist

$F$ und $\kappa$ sind isom. $\alpha \to f_\alpha$ (bzw man kann $F$ konst das es isom. ist "$F \leq \kappa$"
und wenn $f: cf\kappa \to \kappa$

$$\tilde{F} = \{ f: cf\kappa \to \kappa \mid f \text{ ist funktion}\}$$

da es max $\kappa^{cf\kappa}$ möglichkeiten gibt

dh man könnte über $\kappa^{cf\kappa}$ indizieren dh $\tilde{F} = \{f_\beta : cf\kappa \to \kappa \mid \beta < cf\kappa\}$

Also bauen wir $f$ s.d. $f \notin F$
lasse $\kappa = \lim_{\xi \to cf\kappa} \alpha_\xi$ und $\xi < cf\xi$

$f(\xi) =$ das kleinste $\gamma$ s.d. $\gamma = f_\alpha(\xi)$ $\forall \alpha < \alpha_\xi$

so ein $\gamma$ existiert da $|\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha < \alpha_\xi\}| \leq |\alpha_\xi| < \kappa$
$f = f_\alpha$ $\forall \alpha < cf\kappa$ (da es $\forall \alpha$ den punkt gibt s.d.
$\xi > \alpha_\xi$

# T3 aus Jech S. 58

**Def** starke limit kardinalzahl $k$ (strong limit cardinal eng.) ($k$ ist kz)

wenn gilt $2^\lambda < k$ für alle $\lambda < k$ (*)

Bsp:
- ein Bsp wäre $\aleph_0$ für eine st limit KZ
- wenn $\alpha$ eine bel. KZ ist dann ist

  $k = \sup\{\alpha, 2^\alpha, 2^{2^\alpha} \dots\}$ eine st. limit KZ

  $cf\, k = \omega$

  war ja $\mathbb{N}$ (kleinste induktive menge)

Bemerkungen:

- Jede starke limit KZ ist auch eine limit KZ

  angenommen $k$ keine limit kz
  dann $\exists \alpha$ sd $\aleph_{\alpha+1} = k$ (d.h $k$ ist Nachfolger KZ
  $\Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$ und eine KZ
  aber zwischen $k$ und $\aleph_\alpha$ liegen keine weitern kz
  $\Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = k$ ↯ zu $k$ ist starke limit KZ.

- und wenn GCH wahr ist dann ist auch jede limit KZ eine starke limit KZ

  dazu zeige $k$ ist limit kz
  $\Rightarrow \forall \lambda < k$! $2^\lambda < k$
  alle limit oz sind unendlich groß also reicht es fall $\lambda < k$ mit $\lambda$ ist unendlich zu betrachten (bzw nicht endlich)

  fall 1) $\lambda$ ist kz dann $\exists \alpha$ oz s.d $\aleph_\alpha = \lambda$
  $\Rightarrow 2^\lambda = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} < k$ da sonst
  $\aleph_\alpha < k < \aleph_{\alpha+1}$ aber $k$ ist auch KZ und

keine nachfolger zahl $\Rightarrow \aleph_\alpha = k < \lambda = \aleph_\alpha$ ↯

fall 2) $\lambda$ ist keine kz
dann betrachte kz die zu $\lambda$ "passt"
$\lambda \sim \aleph_\alpha$ (also $\aleph_\alpha$ ist in der ordnung und $\lambda$)
un wände - alle 1 an
dann ist $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ und
$\aleph_{\alpha+1} \sim 2^\lambda \wedge \aleph_{\alpha+1} < k$
$\Rightarrow 2^\lambda < k$

- und wenn $k$ ist st lim. KZ dann gilt auch
  $\lambda^\nu < k$ für alle $\lambda, \nu < k$
- die st lim KZ bilden eine eigene Klasse

d.h keine menge!

- auch gilt $k$ ist st. lim KZ dann $2^k = k^{cf\,k}$

wir wissen $k$ ist dann auch limit kz
und damit $\bigcup_{\alpha<k} \alpha = k$

und mit Theorem 5.16 S56 (Jech)
sagt wenn $k$ limit kz dann gilt $2^k = \underbrace{(2^{<k})}_{k}^{cf\,k} = k^{cf\,k}$

da $k$ ist st. limit kz

**Def** unerreichbar (stark) / inaccessible (strongly)

wenn $k > \aleph_0$, $k$ ist regulär und st. limit KZ

Bemerke: • Jede unerreichbare KZ ist auch
schwach unerreichbar
und wenn GCH wahr ist dann auch
anders rum

• die unerreichbaren tragen den Namen
da sie nicht durch normale rungenkunst operationen
erreicht werden können

→ $k$ ist unerreichbar und $|x| < k$
dann gilt $|P(x)| < k$

und wenn $|S| < k$ und $\forall x \in S, |x| < k$
dann $|\bigcup S| < k$

und $\aleph_0$ hat genau diese eigenschaften auch
als können wir zb sagen eine unerreichbare
KZ ist für kleiner KZ das was $\aleph_0$ ist für
endliche KZ

→ Dies ist eins der Hauptthenem
im der Theorei der großen KZ