Messbare Kardinalzahlen I - von Julius Mann am 27.01.2022

0. Plan

1. Motivation
2. Definitionen und Bemerkungen
3. "Satz von Ulam"

1. Motivation

Definition 1. *Sei S eine unendliche Menge. Ein* nicht-triviales σ-additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf S *ist eine Funktion* $\mu : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

(1) $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$

(2) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$

(3) $\mu(\{a\}) = 0$ *für alle* $a \in S$

(4) $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$

Definition 2. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Ein* Maß auf $\mathcal{A}$ *ist eine Funktion* $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, *so dass* (1) - (4) *gelten.*

Bemerkung. Das Lebesgue-Maß auf den messbaren Teilmengen von $[0, 1]$ ist in diesem Sinne ein Maß. Es ist weiterhin *translationsinvariant.* ABER: Es gibt nicht Lebegue-messbare Teilmengen von [0,1] ($\rightarrow$ *Vitali-Mengen*). Gibt es ein Maß auf [0,1] bzw. S? ($\rightarrow$ Theorie der großen Kardinalzahlen)

2. Definitionen und Bemerkungen

(i) Filter:
  - Filter
  - Ultrafilter
  - fixierte/freie Ultrafilter
  - σ-/κ-vollständige Filter

(ii) Maße
  - zwei-wertig Maße
  - Atome
  - atomfreie Maße

(i) Filter

Definition 3. *Sei S eine nicht-leere Menge. Ein* Filter F auf S *ist eine Sammlung von Teilmengen von S, so dass*

(1) $S \in F, \emptyset \notin F$

(2) $X \in F \wedge Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F$

(3) $X \subset Y \subset S, X \in F \Rightarrow Y \in F$

Definition 4. *Ein* Ultrafilter U auf S *ist ein Filter auf S mit:*

(4) Für alle $X \subset S$ *gilt* $X \in U \dot{\vee} S \setminus X \in U$

Definition 5. *Ein Ultrafilter U heißt* fixiert, *falls es* $\emptyset \neq X_0 \subset S$ *gibt, so dass* $U = \{X \subset S | X_0 \subset X\}$. X_0 *heißt dann* Hauptelement von U. *Ein Ultrafilter ohne Hauptelement heißt* frei.

Bemerkung. Wenn X ein Hauptelement ist, dann gilt $|X| = 1$.

Beweis: Angenommen nicht dann gibt es nichtleere Teilmenge $Y \subsetneq X$. Und dann gilt $Y \in U$ oder $Y^c \in U$. Aber auch $X \cap Y^c \in U$ und $X \cap Y^c \subsetneq X$. □

Definition 6. *Ein Filter F auf S heißt* σ-vollständig, *falls er unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist.*

Bemerkung. Ein Ultrafilter U auf S ist genau dann σ-vollständig, wenn es keine Zerlegung $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, mit $X_n \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Beweis. Wir zeigen $\neg a \Leftrightarrow \neg b$.
"$\Leftarrow$" Angenommen es gibt Zerlegung $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(X_n)^c\right)^c$. Aus σ-Vollständigkeit würde folgen, dass $\emptyset \in U$. Also ist U nicht σ-vollständig.
" $\Rightarrow$ ". Sei U σ-unvollständig. Dann gibt es $\bigcap X_n \notin U$ für $X_n \in U$. Dann $(\bigcup X_n^c)^c \notin U$ und $(\bigcup X_n^c)^c \cup (\bigcup X_n^c) = S$. Also gibt es die gewünschte Zerlegung. ($\rightarrow$ Beweis geht auch für beliebiges κ?) □

Definition 7. *Ein Filter F auf S heißt* κ-vollständig, *falls er unter Schnitten von weniger als κ Elementen abgeschlossen ist*

(ii) Maße

Definition 8. *Ein Maß μ auf S heißt* zwei-wertig, *falls $\mu(X) = 0$ oder $\mu(X) = 1$ für alle $X \subset S$.*

Bemerkung Sei μ auf S zwei-wertig.

Behauptung. $U = \{X \subset S | \mu(X) = 1\}$ ist σ-vollständiger Ultrafilter.

Beweis.

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(S) = 1$

(2) Sei $\mu(X) = \mu(Y) = 1$. Dann $X = (X \setminus Y)\dot{\cup}(X \cap Y)$ und $Y = (Y \setminus X)\dot{\cup}(X \cap Y)$. Nimm zu Widerspruch an, dass $\mu(X \cap Y) \neq 1$. Dann $\mu(X \setminus Y) = 1$, $\mu(Y \setminus X) = 1$. Dann $\mu(X \cup Y) = 2 \lightning$.

(3) Folgt direkt aus Axiom (1) und (2) eines Maßes.

(4) $1 = \mu(S) = \mu(X) + \mu(S \setminus X) = 1 + 0$

(5) Ein Ultrafilter U auf S ist genau dann σ-vollständig, wenn es keine Zerlegung $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, mit $X_n \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Angenommen es gäbe solche Zerlegung. Aber $\mu(S) = 1 \neq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_N) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \lightning$.

□

Sei U ein σ-vollständiger Ultrafilter auf S. Sei $\mu : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ mit $\mu(X) = \begin{cases} 1 & X \in U \\ 0 & X \notin U \end{cases}$

Behauptung. μ ist (nicht unbedingt nicht triviales) zwei-wertiges Maß auf S.

Beweis.

(1) $\emptyset \notin U$, $S \in U$

(2) folgt direkt aus Axiom (iii) von Filtern.

(3) Gilt genau dann nicht, wenn U fixiert mit Hauptelement $\{a\}$ ist.

(4) Es gibt keine disjunkten Elemente in einem Filter. Also alle Komponenten bis auf einen haben Maß 0.

□

Definition 9. *Sei μ ein Maß auf S. Eine Menge $A \subset S$ heißt* Atom *von μ, falls $\mu(A) > 0$ und für alle $X \subset A$ gilt $\mu(X) = 0$ oder $\mu(X) = \mu(A)$.*

Bemerkung. Hat μ ein Atom A, so ist $U = \{X \subset S | \mu(X \cap A) = \mu(A)\}$ ein σ-vollständiger Ultrafilter auf S.

Beweis.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0 \neq a$, $S \cap A = A \Rightarrow \mu(A) = a$.

(2) ($\rightarrow$ Zeichnung) Sei $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap C) = a$. B und C können nicht disjunkt sein. Angenommen $\mu(A \cap B \cap C) = 0$. $\Rightarrow \mu(A \cap B \setminus C) = a = \mu(A \cap C \setminus B$. $\Rightarrow 2a = \mu((A \cap C \setminus B) \cup (A \cap B \setminus C)) \leq \mu(A) = a.$ ↯

(3) Sei $B \subset C$ und $\mu(B \cap A) = a \Rightarrow \mu(C \cap A) \geq \mu(B \cap A) \Rightarrow \mu(C \cap A) = a$.

(4) $\mu(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow \mu(A \cap B^c)$.

(5) σ-unvollständig $\Leftrightarrow$ gibt Zerlegung von $S \Rightarrow \mu(S \cap A) = \mu(A) = \sum 0$.

Definition 10. *Ein Maß μ auf S heißt* atomfrei*, wenn es keine Atome hat.*

Bemerkung. Ist μ atomfrei, dann kann jede Menge $X \subset S$ mit $\mu(X) > 0$ in zwei disjunkte Mengen mit $X = Y \cup Z$ und $\mu(Y) > 0$ und $\mu(Z) > 0$ zerlegt werden. (Beweis mit Kontraposition direkt aus den Definitionen)

3. "Satz von Ulam"

(i) Aussage

(ii) Bemerkung

(iii) Lemma 1

(iv) Definition Messbare Kardinalzahl

(v) Bemerkung

(vi) Lemma 2

(i) Aussage

Theorem 1. *Wenn es ein σ-additives nicht-triviales Maß auf S gibt, dann gilt entweder*

(a) Es gibt ein zweiwertiges Maß auf S und $|S|$ ist größergleich der kleinsten (stark) unerreichbaren Kardinalzahl.

(b) Es gibt ein atomfreies Maß auf $2^{\aleph_0}$ und $2^{\aleph_0}$ ist größergleich der kleinsten schwach unerreichbaren Kardinalzahl.

(ii) Bemerkung Der Beweis braucht einige Lemmata und nimmt den Rest meines Vortrags und den nächsten Vortrag in Anspruch.

(iii) Lemma 1

Lemma 1. *Sei κ die kleinste Kardinalzahl, so dass es einen freien σ-vollständigen Ultrafilter U auf κ gibt. U ist κ-vollständig.*

Beweis. Sei U ein σ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Zum Widerspruch nehme an, dass U nicht κ-vollständig ist. Also gibt es eine (disjunkte) Partition $\{X_\alpha | \alpha < \gamma\}$, so dass $\gamma < \kappa$ und $X_\alpha \notin U$ für $\alpha < \gamma$. Idee: Zeige, dass daraus folgt, dass es einen freien σ-vollständigen Ultrafilter auf γ gibt (im Widerspruch zur Minimalität von κ.)
Definiere die Abbildung $f : \kappa \longrightarrow \gamma$ mit $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in X_\alpha$. Die Abbildung induziert einen σ-vollständigen Ultrafilter auf γ. Definiere hierfür $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\gamma)$ durch: $Z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow f^{-1}[Z] \in U$. Es gilt:

(1) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset, f^{-1}[\gamma] = S$

(2) $f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y] = f^{-1}[X \cap Y]$

(3) $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}[X] \subset f^{-1}[Y]$

(4) $f^{-1}[X^c] = \left(f^{-1}[X]\right)^c$

(5) analog zu (2)

Weiterhin ist $\mathcal{D}$ frei: Nimm an $\{\alpha\} \in \mathcal{D}$ für ein $\alpha < \gamma$. Dann gilt $X_\alpha \in U$ ↯. □

(iv) Definition Messbare Kardinalzal

Definition 11. *Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt* messbar, *falls es einen κ-vollständigen freien Ultrafilter U auf κ gibt.*

(v) Bemerkung

Bemerkung. Mit vorherigem Lemma: Die kleinste Kardinalzahl, die ein zwei-wertiges Maß hat ist messbar. Ist U ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ, so gilt für alle $X \in U$, dass $|X| = \kappa$, da sonst X die Vereinigung von weniger als κ Singletons ist.

(vi) Lemma 2

Lemma 2. *Jede messbare Kardinalzahl ist (stark) unerreichbar.*

Beweis. Sei κ messbar. Wir zeigen zunächst, dass κ regulär ist. Angenommen κ wäre singulär, dann wäre es die Vereinigung von weniger als κ kleineren Mengen, dann ist U aber nicht κ-vollständig.

Es ist noch zu zeigen, dass κ eine starke Limeszahl ist. Nimm zum Widerspruch an, dass $\lambda < \kappa$ existiert, so dass $2^\lambda \geq \kappa$. Sei S eine Menge von Funktionen $\lambda \longrightarrow \{0, 1\}$, so dass $|S| = \kappa$ und sei U ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf S. Für jedes $\alpha < \lambda$ sei X_α die Menge $\{f \in S | f(\alpha) = 0\}$ oder $\{f \in S | f(\alpha) = 1\}$, die in U ist und sei ε_α entsprechend 0 oder 1. ($\rightarrow$ λ-dimensionaler Würfel)

Aus U ist κ-vollständig, folgt nun $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$. Aber $|X| \leq 1$, da nur f mit $f(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ in X sein kann. $\lightning$ □