Seminar zu großen Kardinalzahlen

von Luca Lüschen - 28.01.2022

Thema: Schwach kompakte Kardinalzahlen

Zerlegungen & Zerlegungseigenschaften

Definition:

1) Eine Zerlegung einer Menge S ist eine paarweise disjunkte Familie $P=\{X_i, i\in I\}$, sodass $\bigcup_{i\in I} X_i = S$.

   Zu der Zerlegung P können wir die Funktion $F: S\to I$, $F(x)=i :\Leftrightarrow x\in X_i$ definieren.
   Umgekehrt definiert jede Funktion $F: S\to I$ eine Zerlegung.

2) Notation: $[S]^n = \{X\subset S \mid |X|=n\}$ für $n\in\mathbb{N}$.

3) Für eine Zerlegung $P=\{X_i \mid i\in I\}$ von $[S]^n$ heißt eine Teilmenge $H\subset S$ homogen, falls es $i\in I$ gibt, sodass $[H]^n\subset X_i$.
   Äquivalent dazu heißt $H\subset S$ homogen, falls $F\upharpoonright[H]^n$ konstant ist.

4) Seien $\kappa,\lambda\geq\aleph_0$, $n<\aleph_0$ und m sei eine beliebige Kardinalzahl.
   $\kappa\longrightarrow(\lambda)^n_m$ bezeichnet folgende Zerlegungseigenschaft:

   Für jede Zerlegung von $[\kappa]^n$ in m Stücke, gibt es eine homogene Teilmenge $H\subset\kappa$ mit Mächtigkeit λ.

   [Äquivalent dazu] Für jede Funktion $F:[\kappa]^n\longrightarrow m$ gibt es $H\subset\kappa$, $|H|=\lambda$, sodass $F\upharpoonright[H]^n$ konstant ist.

Beispiel: $\aleph_0 \to (\aleph_0)^1_m$ für $m < \aleph_0$

„Zerlegt man eine abzählbar unendliche Menge in endlich viele Stücke, so gibt es mindestens ein abzählbar unendliches Stück."

Bemerkung:

1) Falls $\kappa \to (\lambda)^n_m$ gilt, so gilt auch $\kappa' \to (\lambda')^n_{m'}$, für $\kappa' \geq \kappa$, $\lambda' \leq \lambda$, $m' \leq m$.

2) Wir können stets $1 \leq m < \kappa$, $\lambda \leq \kappa$ annehmen.

3) Notation: $\kappa \to (\lambda)^m$ für $\kappa \to (\lambda)^m_2$

Lemma: Für alle $\kappa \geq \aleph_0$: $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2$

Beweis: $P = \{0,1\}^\kappa$ (Lexiographische Ordnung)

$f, g \in P$: $f < g :\Leftrightarrow f(\alpha) < g(\alpha)$ für das kleinste α mit $f(\alpha) \neq g(\alpha)$

Hilfslemma: $(P, <)$ besitzt keine aufsteigende oder absteigende κ^+-Sequenz.

Beweis: Ang. $W = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subset P$ hat folgende Eigenschaft

$\alpha < \beta \Leftrightarrow f_\alpha < f_\beta$

Für $\alpha < \kappa^+$ sei $\chi_\alpha < \kappa$, s.d. $f_\alpha \upharpoonright \chi_\alpha = f_{\alpha+1} \upharpoonright \chi_\alpha$; $f_\alpha(\chi_\alpha) = 0$; $f_\alpha(\chi_\alpha) = 1$

$\chi_\alpha = \chi_\beta \Rightarrow f_\alpha < f_{\beta+1} \wedge f_\beta < f_{\alpha+1} \Rightarrow \alpha < \beta + 1 \wedge \beta < \alpha + 1$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

Somit definiert $f: \kappa^+ \to \kappa$, $\alpha \mapsto \chi_\alpha$ eine Injektion. ↯ $\square$

Sei $2^\kappa = \lambda$ und $P = \{f_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$.

$\tilde{<}$ sei Ordnung auf λ induziert durch die lexiographische Ordnung.

d.h. $\alpha \tilde{<} \beta \iff f_\alpha < f_\beta$.

$F: [\lambda]^2 \longrightarrow \{0,1\}$, $F(\{\alpha,\beta\}) = 1 :\iff (\alpha < \beta \iff \alpha \tilde{<} \beta)$

$F(\{\alpha,\beta\}) = 0 :\iff (\alpha < \beta \iff \beta \tilde{<} \alpha)$

Ang. $H \subset \lambda$ homogen mit $|H| = \kappa^+$, dann ist $\{f_\alpha \mid \alpha \in H\}$ eine aufsteigende / absteigende κ^+-Sequenz. $\lightning$

$\square$

Schwach kompakte Kardinalzahlen

Definition: Eine Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ heißt schwach kompakt, falls $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$.

Theorem: Jede schwach kompakte Kardinalzahl ist unerreichbar.

Beweis: Sei κ eine schwach kompakte Kardinalzahl.

1. $\omega < \kappa$ ✓
2. κ ist regulär ✓
3. κ ist starke Limeskardinalzahl ✓

(2)

$\boxed{X \text{ ist regulär } \Leftrightarrow \forall x\, (|x| < \kappa \wedge \forall y\, (y \in X \rightarrow |y| < \kappa) \rightarrow |\bigcup x| < \kappa)}$

vgl. Ebb. S. 138

Ang. κ ist singulär.
Dann gibt es:
$\lambda < \kappa$; $\{A_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$;
$|A_\gamma| < \kappa$ für alle $\gamma < \lambda$; $|\bigcup_{\gamma<\lambda} A_\gamma| \geq \kappa$.

o.B.d.A $\bigcup_{\gamma<\lambda} A_\gamma = \kappa$ und $\{A_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ ist paarweise disjunkt.

Definiere $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0,1\}$, $F(\{\alpha,\beta\}) = 1 :\Leftrightarrow \exists \gamma < \lambda : \alpha, \beta \in A_\gamma$.

Sei $H \subset \kappa$ homogen.
Fall 1: $F \upharpoonright [H]^2 = 1 \Rightarrow H \subset A_\gamma$ für ein $\gamma < \lambda \Rightarrow |H| \leq |A_\gamma| < \kappa$.
Fall 2: $F \upharpoonright [H]^2 = 0 \Rightarrow |H| \leq \lambda < \kappa$

↯

(3)

Ang. $\kappa \leq 2^\lambda$ für $\lambda < \kappa$.
Nach Lemma 9.4 gilt: $2^\lambda \not\rightarrow (\lambda^+)^2 \Rightarrow \kappa \not\rightarrow (\lambda^+)^2 \Rightarrow \kappa \not\rightarrow (\kappa)^2$

↯

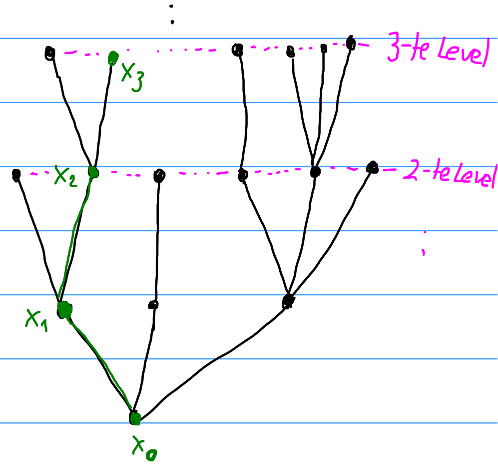
$\square$

(Aronszajn)-Bäume

$T \hat{=}$ Menge aller Knoten
$< \hat{=}$ Menge aller Kanten

Definition:

1) Ein Baum ist eine partiell geordnete Menge $(T,<)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in T$ $<$ auf der Menge aller Vorgänger von x $\{y \in T \mid y < x\}$ eine Wohlordnung definiert.
Wir schreiben $o(x)$ für den Ordnungstyp von $\{y \in T \mid y < x\}$.



- $\{x \in T \mid x < x_3\} = \{x_0, x_1, x_2\}$ ist wohlgeordnet.
- $o(x_3) = 3$
- Die Höhe von T ist 4
- $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ ist ein 4-Zweig

2) Das α-te Level von T ist die Menge aller $x \in T$, für die $\{y \in T \mid y < x\}$ Ordnungstyp α hat.
Notation: $\alpha\text{-te Level} = \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$

3) Die Höhe von T ist das kleinste α, für das das α-te Level die leere Menge ist.
$\text{height}(T) = \sup\{o(x)+1 \mid x \in T\}$

4) Ein Zweig in T ist eine maximal linear geordnete Teilmenge $b \subseteq T$.
Die Länge des Zweiges b ist der Ordnungstyp $(b,<)$.
Ein α-Zweig ist ein Zweig der Länge α.

Definition: Ein Aronszajn Baum ist ein Baum, für den Folgendes gilt:

1. Der Baum hat Höhe $\aleph_1$.
2. Alle α-te Level sind höchstens abzählbar.
3. Der Baum besitzt keinen $\aleph_1$-Zweig.

Theorem: Es existiert ein Aronszajn Baum.

Beweis: Wir wollen T konstruieren.

Für die Elemente in T soll Folgendes gelten:

$x \in T$ ist eine aufsteigende und beschränkte Sequenz von rationalen Zahlen.

D.h. für $x \in T$ gibt es Oz. α, sodass

... $x = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ wobei $x_\beta \in \mathbb{Q}$ für alle $\beta < \alpha$

.. $\beta < \beta' \iff x_\beta < x_{\beta'}$

.. $\exists c \in \mathbb{Q} \quad x_\beta \leq c$ für alle $\beta < \alpha$

Wir definieren auf T eine partielle Ordnung wie folgt:

Für $x = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$, $y = \{y_\beta \mid \beta < \alpha'\}$ gilt

$x < y \iff (\alpha < \alpha') \wedge (x_\beta = y_\beta$ für alle $\beta < \alpha)$

[x ist ein Anfansstück von y]

Wir wollen außerdem folgende Eigenschaft von T

Falls $x \in T$ und $y \leq x$, dann gilt $y \in T$.

Dann hat $\{y \in T \mid y < x\} = \{y \in T \mid y$ ist Anfangsstück von $x\}$ den gleichen Ordnungstyp wie x.

$\Rightarrow$ α-te Level $= \{x \in T \mid x$ ist α-Sequenz$\}$

T mit diesen Eigenschaften hat keinen $\aleph_1$-Zweig, da es keine aufsteigende $\aleph_1$-Sequenz von rationalen Zahlen gibt.

Falls wir T konstruieren können, sodass T die grünen Eigenschaften erfüllt und T $\aleph_1$ höchstens abzählbare Level hat, ist T ein Aronszajn Baum.

Wir schreiben U_α für das α-te Level von T und konstruieren die U_α rekursiv.

(*) Für jedes $\beta<\alpha$ und $x\in U_\beta$ und $q>\sup(x)$ gibt es $y\in U_\alpha$, sodass $x\leq y$ und $q\geq \sup(y)$

1) $\alpha=0$: $U_0:=\{\emptyset\}$

2) Ang. U_α sei konstruiert

für $\alpha=0$ fordern wir nur $x_\alpha\in\mathbb{Q}$

$$U_{\alpha+1}:=\{\, x\cup\{x_\alpha\} \mid x\in U_\alpha,\ \sup(x)<x_\alpha\in\mathbb{Q}\,\}$$

3) Sei $\alpha<\aleph_1$ eine Limesordinalzahl. Ang U_γ sei für alle $\gamma<\alpha$ konstruiert.
Setze $T_\alpha=\bigcup_{\gamma<\alpha}U_\gamma$.

Hilfslemma: Für jedes $x\in T_\alpha$ und jedes $q>\sup(x)$ gibt es eine aufsteigende α-Sequenz von rationalen Zahlen $y=\{y_\beta\mid\beta<\alpha\}$, sodass $x\leq y$ und $q\geq\sup(y)$ und für alle $\gamma<\alpha$ gilt $y\upharpoonright_\gamma=\{y_\beta\mid\beta<\gamma\}\in T_\alpha$.

Beweis: Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Sequenz von Ordinalzahlen mit $x\in U_{\alpha_0}$; $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$

Und sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Sequenz von rationalen Zahlen mit $q_0>\sup(x)$; $\lim_{n\to\infty}q_n\leq q$

Durch wiederholtes anwenden von (*) gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ $x=x_0\leq x_1\leq\dots\leq x_n\leq\dots$ mit $x_n\in U_{\alpha_n}$ und $\sup(x_n)\leq q_n$.
Sei $x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}x_n$. Dieses x erfüllt die Eigenschaften der Behauptung.

Sei $x\in\bigcup_{\gamma<\alpha}U_\gamma$, $q>\sup(x)$. Schreibe $y_{x,q}$ für das y aus dem Hilfslemma.

$$U_\alpha:=\{\, y_{x,q}\mid x\in\bigcup_{\gamma<\alpha}U_\gamma,\ \sup(x)<q\in\mathbb{Q}\,\}.$$

$T=\bigcup_{\alpha<\aleph_1}U_\alpha$ ist ein Aronszajn Baum. $\square$