Erinnerung: Kardinalzahlarithmetik

2.10 Satz von der kardinalen Addition.

(i) $+$ *ist kommutativ und assoziativ.*

(ii) $\mu \leq \nu \to \kappa{+}\mu \leq \kappa{+}\nu$.

(iii) *Mit* $\kappa \geq \aleph_0$ *ist* $\kappa{+}\mu = \underline{\max\{\kappa, \mu\}}$, *insbesondere also* $\kappa{+}i = \kappa$.

Beweis. (i) ergibt sich leicht unter Zuhilfenahme geeigneter Bijektionen, (ii) daraus, daß mit $\mu \leq \nu$ auch $(\kappa \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\mu \times \{\mathbf{1}\}) \preceq (\kappa \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\nu \times \{\mathbf{1}\})$, und (iii) ist ein Teil von Bemerkung 2.9(ii). $\dashv$

2.11 Satz von der kardinalen Multiplikation.

(i) $\cdot$ *ist kommutativ und assoziativ.*

(ii) $\kappa{\cdot}(\mu{+}\nu) = (\kappa{\cdot}\mu){+}(\kappa{\cdot}\nu)$.

(iii) $\mu \leq \nu \to \kappa{\cdot}\mu \leq \kappa{\cdot}\nu$.

(iv) $\kappa{\cdot}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(v) *Mit* $\kappa \geq \aleph_0$ *und* $\mu \neq \mathbf{0}$ *ist* $\underline{\kappa{\cdot}\mu = \max\{\kappa, \mu\}}$, *also* $\kappa{\cdot}i = \kappa$ *für* $i \neq \mathbf{0}$.

Beweis. Wir beschränken uns auf (iv) und (v).
Zu (iv): $\kappa{\cdot}\mathbf{0} \sim \kappa \times \emptyset = \emptyset$.
Zu (v): Sei $\kappa \geq \aleph_0$ und, aus Symmetriegründen, etwa $\mathbf{1} \leq \mu \leq \kappa$. Dann ist $\kappa \sim \kappa \times \{\mathbf{0}\} \preceq \kappa \times \mu \preceq \kappa \times \kappa \sim \kappa$, also $\kappa{\cdot}\mu = \kappa = \max\{\kappa, \mu\}$. $\dashv$

2.12 Satz von der kardinalen Exponentiation.

(i) $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu{\cdot}\kappa^\nu$.

(ii) $\kappa^{\mu\cdot\nu} = (\kappa^\mu)^\nu$.

(iii) $(\kappa{\cdot}\lambda)^\mu = \kappa^\mu{\cdot}\lambda^\mu$.

(iv) *Mit* $\mu \leq \nu$ *ist* $\kappa^\mu \leq \kappa^\nu$ *und* $\mu^\kappa \leq \nu^\kappa$.

(v) $\mathbf{0}^\mathbf{0} = \mathbf{1}$ *und* $\mathbf{0}^\kappa = \mathbf{0}$ *für* $\kappa \neq \mathbf{0}$.

(vi) $\kappa^\mathbf{0} = \mathbf{1}$ *und* $\kappa^i = \kappa$ *für* $i \neq \mathbf{0}$ *und* $\kappa \geq \aleph_0$.

(vii) $|\mathrm{Pot}(x)| = \mathbf{2}^{|x|}$.

(viii) $\kappa \geq \aleph_0 \wedge \mathbf{2} \leq \mu \leq \kappa \to \mu^\kappa = \mathbf{2}^\kappa$.

$\kappa, \mu, \lambda, \nu$: Kz

i : $\mathbb{N}$ oder bel.

α, β, γ : Oz

δ : Lim. Oz.

$\to$ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma$?

γ ist unbekannt für <u>jedes paar</u> α, β

$[\,|\mathbb{R}| = \aleph_1\,?\,]$

$\longrightarrow$ Kontinuums Hypothese

(alg.) KH: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Für diese Diskussion bauen wir jetzt Vokabular

Allgemeine Kofinalität.

Def Sei $(X, \leq)$ eine partielle (prä) Ordnung.
Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt kofinal in $(X, \leq)$
gdw für alle $a \in X$ ex. $b \in Y$
s.d. $a \leq b$.

$\dashv$

Trivial ist die Transitivität von Kofinalheit:
Sei $(X, \leq)$ P.O.
$Y \leq X$ kofinal & $Z \leq Y$ kofinal
$\to Z \subset X$ kofinal

$Z \quad Y \quad X$
$c \geq b \geq a$

Lemma Sei $f : (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ ordn. erhalt.
$Z \leq X$ kofinal $\Rightarrow f[Z] \leq f[X]$ kofinal.
[wo $f[Z] := \text{Bild}(f \upharpoonright Z)$]

Bew
Jedes $a' \in f[X]$ hat ein Urbild $a \in X$ $f(a) = a'$
Da Z kofinal ist, ex. $b \in Z$ $a \leq_X b$.
Also via f ist $f(a) \leq_Y f(b)$.
Und $f(b) \in f[Z]$

$\square$

Def Sei $(Y, \leq)$ P.O. $f : X \to Y$ heißt
unbeschränkt gdw $f[X]$ kofinal in Y ist.

Lemma $(X, \leq), (Y, \leq), (Z, \leq)$ P.O.
$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ unbeschränkt
und ord. erhalt.
dann ist $g \circ f$ unbeschr. & ord. erhaltend

Bew
$f[X] \leq Y$ kofinal ($\Leftarrow f$ unbeschr.)

$\xrightarrow{\text{Lemma}} g[f[X]] \leq g[Y]$ kofinal

Aber $g[Y] \leq Z$ kofinal ($\Leftarrow g$ unbesch.)

$\xrightarrow{\text{Trans.}} g \circ f[X] = g[f[X]] \leq Z$ kofinal
$g \circ f$ trivial auch ord. erhaltend $\square$

Zurück zu den Wohlordnungen $(X, \leq)$

Wie sieht ein kofinales $Y \subseteq X$ aus?

→ wenn es ein Maximum $m \in X$ gibt, ist genau jedes Y mit $m \in Y$ kofinal.

→ Langweilig.

Also beschränke unsere Betrachtung auf W.O. ohne Maximum. → L.O.Z.

Def Sei δ L.O.Z. Die Kofinalität $\mathrm{cof}(\delta)$ ist das minimale γ, für das es ein unbeschränktes $f: \gamma \to \delta$ gibt.

3 Betrachtungen: Sei δ LOZ.

1. $f: \gamma \to \delta$ ist unbeschränkt $\Leftrightarrow \bigcup \mathrm{Bild}(f) = \delta$

Bew "⇒" Angen. $\bigcup \mathrm{Bild}(f) < \delta$.
Dann ist, weil δ LOZ ist, $\bigcup \mathrm{Bild}(f) + 1 \in \delta$.
→ ex. $\alpha \in \mathrm{Bild}(f)$ s.d. $\bigcup \mathrm{Bild}(f) + 1 \leq \alpha$.

$$\bigcup \mathrm{Bild}(f) \geq \alpha > \bigcup \mathrm{Bild}(f)$$

↯

"⇐" Ang. es ex. $\alpha \in \delta$ s.d. $\forall \beta \in \mathrm{Bild}(f)$ $\alpha \geq \beta$. → $\bigcup \mathrm{Bild}(f) \leq \alpha < \delta$ ↯

2. $\mathrm{cof}(\delta)$ ist ein Aleph.

Bew Da für OZ α immer $|\alpha| \leq \alpha$
Sei Ang. $|\mathrm{cof}(\delta)| < \mathrm{cof}(\delta)$.
Dann gibt es die Bijektion $f: |\mathrm{cof}(\delta)| \sim \mathrm{cof}(\delta)$.
Per Def. gibt es $g: \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$ unbeschr.
Dann ist aber $g \circ f: |\mathrm{cof}(\delta)| \to \delta$ unbeschr. und minimaler als g ↯

3. $\mathrm{cof}(\delta) = \min\limits_{X \subseteq \delta \text{ kofinal}} |X|$

Bew "≤" Sei $X_0 := \operatorname{argmin}\limits_{X \subseteq \delta \text{ kofinal}} |X|$, dann ist $f: |X_0| \to X_0$ unbeschr., also $\mathrm{cof}(\delta) \leq |X_0|$

"≥" Für $f: \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$ unbeschr ist $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \delta$ kofinal. Somit ist $|\mathrm{Bild}(f)| \geq \min\limits_{X \subseteq \delta \text{ kofinal}} |X|$ und trivial $\mathrm{cof}(\delta) \geq |\mathrm{Bild}(f)|$

□

Beispiele

- $\operatorname{cof}(\aleph_\omega)$?

  definiere $f: \omega \to \aleph_\omega$ mit $f(i) = \aleph_i$

  f ist unbeschränkt. Wir sehen

  $\operatorname{cof}(\aleph_\omega) = \omega$

- $\operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1})$?

Ang. $\operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1}) < \aleph_{\beta+1}$ (also $\operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1}) \leq \aleph_\beta$)

dann finde $f: \operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1}) \to \aleph_{\beta+1}$ unbeschr.

Bemerke sofort, für alle Elemente $\alpha \in \operatorname{Bild}(f)$

$|\alpha| \leq \aleph_\beta$ [da $|\gamma| > \aleph_\beta \Rightarrow \gamma \geq \aleph_{\beta+1}$]

Und $\aleph_\beta \geq \operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1}) \geq |\operatorname{Bild}(f)|$

also per (2.7)

$$\left[\forall X \; (|X| \leq \aleph_\alpha \wedge \forall y \in X \; |y| \leq \aleph_\alpha \rightarrow |\bigcup X| \leq \aleph_\alpha\right]$$

folgt $|\underbrace{\bigcup \operatorname{Bild}(f)}_{= \aleph_{\beta+1}}| \leq \aleph_\beta$ ↯

Also muss $\operatorname{cof}(\aleph_{\beta+1}) = \aleph_{\beta+1}$ sein.

Def Sei κ KZ, dann heißt

κ regulär $\leftrightarrow$ $\operatorname{cof}(\kappa) = \kappa$

κ singulär $\leftrightarrow$ $\operatorname{cof}(\kappa) < \kappa$

Wir sehen, ist κ Nachfolger KZ, dann ist κ regulär.

Was ist mit κ LKZ ?

Reguläre LKZ nennt man auch "schwach unerreichbare" KZ.

sog. *schwach unerreichbare* Kardinalzahlen, geben kann, ist offen: Ihre Existenz kann auf der Basis von **ZFC** (sofern **ZFC** widerspruchsfrei ist) nicht bewiesen werden; ob sie widerlegt werden kann, weiß man nicht. Reguläre Limeskardinalzahlen müssen, sofern sie existieren, sehr groß sein; sie sind erste Beispiele von *großen Kardinalzahlen.* Zu deren Bedeutung vgl. man XI. 3.

Notiz: Wenn sie existieren sind sie genau die $\aleph$-Fixpunkte

$\kappa = \aleph_\kappa$

[erinnere $f: \omega \to \aleph_\omega$ $f(i) = \aleph_i$]

Lemma δ LOt.

Es gibt ein $f : cof(\delta) \to \delta$, wobei f unbeschr. & schwach monoton ist.

Bew Sei $g : cof(\delta) \to \delta$ unbesch.

Wir definieren

$$f(\gamma) := \bigcup g[\gamma+1] \; \left[= \bigcup Bild(g \upharpoonright (\gamma+1))\right]$$

[also $f(\gamma+1) = f(\gamma) \cup g(\gamma+1)$]

Dadurch ist f trivial monoton.

Sei $\alpha \in \delta$ bel. Es ex. $\beta \in cof(\delta)$ s.d. $g(\beta) \geq \alpha$. Direkt ist

$$f(\beta) \geq g(\beta) \geq \alpha$$

$\square$

Korollar Für δ LKZ, gibt es $f : cof(\delta) \to \delta$ und $g : cof(cof(\delta)) \to cof(\delta)$ unbeschränkt & schwach monoton.

Per Lemma ist dann $f \circ g : cof(cof(\delta)) \to \delta$ auch unbeschr.

Durch die Minimalheit ist

$$cof(cof(\delta)) = cof(\delta)$$

Also $cof(\delta)$ ist regulär.

Eine Weise reguläre KZ zu characterisieren, ist mit (2.7)

<u>Satz:</u> κ KZ

κ regulär $\Leftrightarrow \forall X \left(|X| < \kappa \wedge \forall y \in X\ |y| < \kappa \rightarrow |\bigcup X| < \kappa \right)$

<u>Bew</u>

"$\Leftarrow$" Sei $X \subset \kappa$ s.d. $|X| < \kappa$. Dann ist X <u>nicht</u> kofinal,
denn alle $y \in X \subset \kappa$ also $|y| < \kappa$,
und daraus folgt $|\bigcup X| < \kappa \rightarrow \bigcup X \neq \kappa$.

"$\Rightarrow$" Sei X mit $|X| < \kappa$ und $|y| < \kappa\ \forall y \in X$.

Definiere $Y := \{ |y| \mid y \in X \} \subset \kappa$.

Damit ist $|Y| \leq |X| < \kappa \rightarrow Y \subseteq \kappa$ <u>nicht</u> kofinal
(κ regulär)
So mit $\bigcup Y < \kappa$

Lemma: X Menge an KZ $\rightarrow \bigcup X$ ist KZ
Bew: (unend. Fall) Sei $\aleph_\alpha = |\bigcup X|$,
dann kann kein $\mu \in X: \mu \geq \aleph_{\alpha+1}$ sein.
und alle β, wo $\aleph_\alpha < \beta < \aleph_{\alpha+1}$, sind OZ,
damit <u>nicht</u> in X. Also gibt es kein $\gamma \in X$
wo $\gamma > \aleph_\alpha \rightarrow \bigcup X \leq \aleph_\alpha \rightarrow \bigcup X = \aleph_\alpha$ $\square$

Also ist $\bigcup Y$ eine KZ.

Und dann ist $\lambda := \max\{\bigcup Y, |X|\} < \kappa$
eine KZ, womit
$|X| \leq \lambda \wedge \forall y \in X\ |y| \leq \lambda$
also $|\bigcup X| \leq \lambda < \kappa$

$\square$

Zuletzt

Def Für eine Familie $(\kappa_i)_{i\in I}$ an KZ sei

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \left|\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}\right| \quad \left[= \left|\dot\bigcup_{i\in I} \kappa_i\right| \right]$$

$$\prod_{i\in I} \kappa_i := \left| \bigtimes_{i\in I} \kappa_i \right|$$

(Trivial Addition/Multiplikation für $I=\{0,1\}$)

Satz: Ungleichung von Zermelo und König

Sei $I \neq \emptyset$ und $(\kappa_i)_{i\in I}$, $(\mu_i)_{i\in I}$ Familien an KZ, s.d. $\kappa_i < \mu_i \ \forall i\in I$.

Dann ist $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \mu_i$

Bew: Ziel ist zu zeigen:

$$\dot\bigcup_{i\in I} \kappa_i \prec \bigtimes_{i\in I} \mu_i$$

$$\{(\alpha, i) \mid \alpha \in \kappa_i\} \qquad \{g \mid g: I \to \bigcup_{i\in I} \mu_i \ \ f(i)\in\mu_i\}$$

[Erinnert an Σ-Typ] [Erinnert an Π-Typ]

"$\preccurlyeq$" Definiere $f: \dot\bigcup_{i\in I} \kappa_i \to \bigtimes_{i\in I} \mu_i$ s.d.

$$(\alpha, i) \mapsto \left(g: j \mapsto \begin{cases} \kappa_j & \text{falls } j \neq i \\ \alpha & \text{falls } j = i \end{cases} \right)$$

f ist eine Injektion, denn für

$$f(\alpha_1, i_1) = f(\alpha_2, i_2)$$

$$\to f(\alpha_1, i_1)(i_2) = f(\alpha_2, i_2)(i_2)$$

$$= \alpha_2 < \kappa_{i_2}$$

also muss $i_1 = i_2$, da $f(\alpha_1, i_1)(i_2) = \alpha_2 \neq \kappa_{i_2}$

$\alpha_1 = \alpha_2$

"keine Surjektion" Nächste Seite →

(cont.) →

"nicht ~": Wir wollen sehen, dass es keine Surjektion gibt.
Ziel ist (wie immer) <u>Diagonal Argument.</u>

Sei $f: \dot{\bigcup}_{i\in I} \kappa_i \to \bigtimes_{i\in I} \mu_i$ beliebig

Definiere $X := \dot{\bigcup}_{i\in I} \kappa_i = \bigcup_{i\in I} X_i$ wo $X_i = \kappa_i \times \{i\}$

und

$$Y := f[X] = f[\bigcup_{i\in I} X_i] = \bigcup_{i\in I} f[X_i] = \bigcup_{i\in I} Y_i$$

wo $Y_i := f[X_i]$

Bemerke $Y_i \subseteq \bigtimes_{i\in I} \mu_i$ sind Mengen an Abbildungen

definiere $Y_i[j] := \{y(j) \mid y \in Y_i\}$
$= \mathrm{Bild}(h)$
wo $h: y \mapsto y(j)$

Für die Visualisierung: Notiere I als ob es $\mathbb{N}$ wäre.

	1	2	3	… I	
Y_1	$Y_1[1] \not\ni g(1)$	$Y_1[2]$	$Y_1[3]$		$\to g \notin Y_1$
Y_2	$Y_2[1]$	$Y_2[2] \not\ni g(2)$	$Y_2[3]$		$\to g \notin Y_2$
Y_3	$Y_3[1]$	$Y_3[2]$	$Y_3[3] \not\ni g(3)$		$\to g \notin Y_3$
$\vdots$					$\vdots$

$\bigcup_{i\in I} Y_i = Y$ $\Rightarrow g \notin Y$

Also ist zu zeigen, dass es ein $g \in \bigtimes_{i\in I} \mu_i$ gibt, wo $g(i) \in \mu_i \setminus Y_i[i] \neq \emptyset$.

Siehe dazu:

$$|Y_i[i]| \leq |Y_i| = |f[X_i]| \leq |X_i| = \kappa_i < \mu_i$$

$$\mu_i \setminus Y_i[i] \neq \emptyset$$

Also kann für jedes f ein g definiert werden $g(i) = \min \mu_i \setminus Y_i[i]$ $\to g \in \bigtimes_{i\in I} \mu_i \setminus Y$

Also ist kein f surjektiv. $\square$