

Zahlen und Spiele

Conwayspiele II

Luna Block

nach H.-D. Ebbinghaus et al. "Zahlen", Springer-Verlag.

Gliederung

1. Zur Theorie der Spiele

- 1.1 Gewinnstrategien
- 1.2 Positive und negative Spiele
- 1.3 Eine Einteilung der Spiele

2. Eine halbgeordnete Gruppe äquivalenter Spiele

- 2.1 Das Negative eines Spiels
- 2.2 Die Summe zweier Spiele
- 2.3 Eine Halbordnung der Spiele

3. Spiele und Conwayspiele

- 3.1 Die grundlegenden Abbildungen
- 3.2 Übertragung der für Spiele definierten Relationen und Operationen auf Conwayspiele
- 3.3 Beispiele

Zur Theorie der Spiele

$$X = (S, s_0, \rightarrow_L, \rightarrow_R)$$

$$X' = (S', s'_0, \rightarrow'_L, \rightarrow'_R)$$

$$S \in S'$$

$$(\Rightarrow) s'_0 \rightarrow \dots \rightarrow S$$

$$s_0 \xrightarrow{L} s'_0 \quad \text{oder} \quad s_0 \xrightarrow{R} s'_0$$

$$s, s' \in S' : s \xrightarrow{L} s' \Leftrightarrow s \xrightarrow{L} s'$$

$$s \xrightarrow{R} s' \Leftrightarrow s \xrightarrow{R} s'$$

$$0 = (\emptyset, \emptyset), 1 = (\{0\}, \emptyset)$$

$$n+1 = (\{0, \dots, n\}, \emptyset)$$

Gewinnstrategien

Spiel x , Spieler A ($A = L$ oder $A = R$)

Strategie σ für A in x schreibt einen Zug eindeutig vor.

Definition 1.1. σ heiße eine *Gewinnstrategie* für L im Spiel x , falls R beginnt, genau dann, wenn σ eine Strategie für L in x ist und wenn L jede Partie gewinnt, bei der R beginnt, falls L mit der Strategie σ spielt.

Notation. LxR : L hat eine Gewinnstrategie im Spiel x , falls R beginnt.

LxL , RxL , RxR analog.

Gewinnstrategien

Lemma 1.2. Sei x' ein rechtes Vorgängerspiel von x . Es gelte $Rx'L$. Dann gilt RxR .

Beweis.

$s_0 \rightarrow_R s_0'$, dann Gewinnstrategie wegen $Rx'L \Rightarrow RxR$

Lemma 1.3. Für jedes rechte Vorgängerspiel x' von x sei $Lx'L$. Dann gilt LxR .

Beweis.

$s_0 \rightarrow_R s_0'$, dann Gewinnstrategie wegen $Lx'L \Rightarrow LxR$

Lemma 1.2 dual. Sei x' ein linkes Vorgängerspiel von x . Es gelte $Lx'R$. Dann gilt LxL .

Lemma 1.3 dual. Für jedes linke Vorgängerspiel x' von x sei $Rx'R$. Dann gilt RxL .

Gewinnstrategien

Satz 1.4. ($L \times R$ oder $R \times R$) und ($L \times L$ oder $R \times L$).

Beweis. Induktionsprinzip für Spiele. Wenn aus der Induktionsvoraussetzung, dass P für jedes Vorgängerspiel x' von x gilt, die Induktionsbehauptung P_x folgt, dann hat jedes Spiel x die Eigenschaft P .

Fall 1. $\exists x'$ rechtes Vorgängerspiel von x $R_{x'}L \Rightarrow R_xR$
Fall 2. $\forall x'$ rechtes Vorgängerspiel von x gilt nicht $R_{x'}L$
 $\Rightarrow$ $L_{x'}L \Rightarrow L_xR$

Positive und negative Spiele

Definition 2.1. $0 \leq x$ genau dann, wenn $L \times R$. "positiv"

Definition 2.2. $x \leq 0$ genau dann, wenn $R \times L$. "negativ"

Notation. x^L : linkes Vorgängerspiel von x

x^R : rechtes Vorgängerspiel von x

Lemma 1.2'. Wenn ein $x^R \leq 0$, dann nicht $0 \leq x$.

Lemma 1.3'. Wenn für alle x^R nicht $x^R \leq 0$, dann $0 \leq x$.

Lemma 1.2 dual'. Wenn ein $0 \leq x^L$, dann nicht $x \leq 0$.

Lemma 1.3 dual'. Wenn für alle x^L nicht $0 \leq x^L$, dann $x \leq 0$.

Satz 2.3. $0 \leq x$ genau dann, wenn für alle x^R nicht $x^R \leq 0$.

Satz 2.4. $x \leq 0$ genau dann, wenn für alle x^L nicht $0 \leq x^L$.

$$\gamma+1 = (\{0, \dots, n\}, \emptyset)$$

$$x^R \leq 0 \Leftrightarrow R \times x^L,$$

$$\text{nicht } 0 \leq x \\ \Leftrightarrow \text{nicht } L \times R$$

$$\Leftrightarrow R \times R$$

Eine Einteilung der Spiele

Satz 1.4'. ($L \times R$ und $L \times L$) oder ($L \times R$ und $R \times L$) oder ($R \times R$ und $L \times L$) oder ($R \times R$ und $R \times L$).

$\Leftrightarrow (L \times R \text{ oder } R \times R) \text{ und } (L \times L \text{ oder } R \times L)$

Definition 3.1.

- (a) Spiel x gehört zur Klasse **L**, falls $L \times R$ und $L \times L$.
- (b) Spiel x gehört zur Klasse **R**, falls $R \times R$ und $R \times L$.
- (c) Spiel x gehört zur Klasse **E**, falls $R \times R$ und $L \times L$.
- (d) Spiel x gehört zur Klasse **Z**, falls $L \times R$ und $R \times L$.

Bemerkung 3.2. Jedes Spiel liegt in genau einer der Klassen **L**, **R**, **E**, **Z**.

Eine Einteilung der Spiele

Definition 3.3. Zwei Spiele sind *gleichwertig*, wenn sie in derselben Klasse liegen.

 Klasse L  Klasse R  Klasse C

  Klasse Z

$$0 = (\emptyset, \emptyset) \in Z$$

Eine Einteilung der Spiele

Bemerkung 3.4.

$R \times L$ $L \times R$

(a) $x \in \mathbf{Z}$ genau dann, wenn $x \leq 0$ und $0 \leq x$.

(b) $x \in \mathbf{L}$ genau dann, wenn $0 \leq x$ und $x \not\leq 0$. "echt positive Spiele"

(c) $x \in \mathbf{R}$ genau dann, wenn $x \leq 0$ und $0 \not\leq x$. "echt negative Spiele"

(d) $x \in \mathbf{E}$ genau dann, wenn $x \not\leq 0$ und $0 \not\leq x$.

Bemerkung 3.5. $0 \in \mathbf{Z}$.

$\nwarrow (\emptyset, \emptyset)$

Satz 3.6. $0 \leq 0$.

$\nwarrow$ nicht $0 \leq x$
 $\Leftrightarrow$ nicht $L \times R \Leftrightarrow R \times R$

Eine halbgeordnete Gruppe äquivalenter Spiele

x ist positiv: $0 \leq x$ als Eigenschaften

x ist negativ: $x \leq 0$

Ziel: $x \leq$ mit " $0 \leq$ " $x \Leftrightarrow 0 \leq x$

bzw. " $x \leq 0$ " $\Leftrightarrow x \leq 0$

- Äquivalenzrelationen

Das Negative eines Spiels

Definition 4.1. Sei $x = (S, s_0, \rightarrow_L, \rightarrow_R)$ ein Spiel.

Dann sei das *Negative* des Spiels

$$-x = (S, s_0, \rightarrow_R, \rightarrow_L).$$

Bemerkung 4.2.

(a) $-(-x) = x.$

(b) $-0 = 0.$

$$L \times R \Rightarrow R(-x) L$$

Bemerkung 4.3. Wenn $0 \leq x$, dann $-x \leq 0$.

Bemerkung 4.3 dual. Wenn $x \leq 0$, dann $0 \leq -x$.

Die Summe zweier Spiele

Definition 5.1. Seien $x_1 = (S_1, s_{01}, \rightarrow_{L1}, \rightarrow_{R1})$, $x_2 = (S_2, s_{02}, \rightarrow_{L2}, \rightarrow_{R2})$ Spiele.

Dann sei die *Summe*

$$x_1 + x_2 = (S, s_0, \rightarrow_L, \rightarrow_R)$$

mit

$$S = S_1 \times S_2, s_0 = (s_{01}, s_{02})$$

sowie

$$(s_1, s_2) \rightarrow_L (s'_1, s'_2)$$

genau dann, wenn

$$(s_1 \rightarrow_{L1} s'_1 \text{ und } s_2 = s'_2) \text{ oder } (s_1 = s'_1 \text{ und } s_2 \rightarrow_{L2} s'_2)$$

und

$$(s_1, s_2) \rightarrow_R (s'_1, s'_2)$$

genau dann, wenn

$$(s_1 \rightarrow_{R1} s'_1 \text{ und } s_2 = s'_2) \text{ oder } (s_1 = s'_1 \text{ und } s_2 \rightarrow_{R2} s'_2).$$

Die Summe zweier Spiele

Bemerkung 5.2. $-(x + y) = -x - y \quad (= -x + (-y)).$

Satz 5.3.

(a) $0 \leq x - x$ und $x - x \leq 0.$

(b) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, dann $0 \leq x + y.$

(c) Wenn $0 \leq x + y$ und $y \leq 0$, dann $0 \leq x.$

Beweis.

(a) R beginnt in $x-x$, L übernimmt jeden Zug von R in anderer Komponente $\Rightarrow L(x-x)R \Leftrightarrow 0 \leq x-x$

(b) $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow LxR \wedge LyR$
 R beginnt in $x+y$, L zieht in derselben Komponente wie R mit Gewinnstrategie $\Rightarrow L(x+y)R$

Eine Halbordnung der Spiele

Bemerkung Isomorphie 1. $x + y$ ist isomorph zu $y + x$.

Bemerkung Isomorphie 2. $(x + y) + z$ ist isomorph zu $x + (y + z)$.

Bemerkung Isomorphie 3. Seien x und y isomorph.

(a) Wenn LxR , dann LyR .

(b) Wenn RxR , dann RyR .

(c) Wenn RxL , dann RyL .

(d) Wenn LxL , dann LyL .

Eine Halbordnung der Spiele

Definition 6.1. $x \leq y$ genau dann, wenn $0 \leq y - x$.

Satz 6.2. $0 \leq y - 0$ genau dann, wenn $0 \leq y$.
 (ϕ, ϕ)

Beweis.

Satz 3.6. $0 \leq 0$.

Satz 4.2. $(b) - 0 = 0$.

Satz 5.3. (b) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, dann $0 \leq x + y$.

Satz 5.3. (c) Wenn $0 \leq x + y$ und $y \leq 0$, dann $0 \leq x$.

$$\begin{aligned} \text{"} \leq \text{"} \text{"} 0 \leq \text{"} y &\Rightarrow \text{"} 0 \leq \text{"} y + 0 \Rightarrow \text{"} 0 \leq \text{"} y - 0 \\ \text{"} \Rightarrow \text{"} \text{"} 0 \leq \text{"} y - 0 &\Rightarrow \text{"} 0 \leq \text{"} y + 0 \Rightarrow \text{"} 0 \leq \text{"} y \end{aligned}$$

Satz 6.3.

(a) Wenn $x \leq y$, dann $-y \leq -x$.

(b) Wenn $x \leq y$, dann $x + z \leq y + z$.

$$\begin{array}{c} (\phi, \phi) \\ \downarrow \\ \text{"} 0 \leq \text{"} x \Leftrightarrow 0 \leq x \end{array}$$

Eine Halbordnung der Spiele

Satz 6.4. Nie $x^R \leq x$ und nie $x \leq x^L$.

Beweis.

Lemma 1.2. Sei x' ein rechtes Vorgängerspiel von x . Es gelte $Rx'L$. Dann gilt RxR .

$x^R - x^R$ ist ein rechtes Vorgängerspiel von $x - x^R$

$x^R - x^R \leq 0 \Rightarrow R(x^R - x^R)L \Rightarrow R(x - x^R)R \Rightarrow$ nicht $0 \leq x - x^R$

Satz 6.5. $x \leq y$ genau dann, wenn (a) nie $y^R \leq x$ und (b) nie $y \leq x^L$.

Beweis.

" $\Rightarrow$ " $x \leq y$ (a) $y^R \leq x \Rightarrow y^R \leq y$

" $\Leftarrow$ " Sei nun $y^R \leq x$ 1. nie $y \leq x$, aber nicht $x \leq y$

$\Rightarrow$ nicht $0 \leq y - x \Rightarrow R(y - x)R \Rightarrow$ nicht $0 \leq x - y^R$

(i) R nicht in y zu $y^R \Rightarrow R(y^R - x)L \Rightarrow L(x - y^R)R \Rightarrow 0 \leq x - y^R \Rightarrow y^R \leq x$

(ii) R nicht in $-x$ zu $x^L \Rightarrow R(y - x^L)L \Rightarrow L(x^L - y)R \Rightarrow$ nicht $0 \leq x^L - y$

$\Rightarrow 0 \leq x^L - y \Rightarrow y \leq x^L$

Eine Halbordnung der Spiele

Definition 6.6. $x = y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.

Satz 6.7. $\leq$ ist eine Halbordnung.

Beweis.

Satz 5.3. (a) $0 \leq x - x$ und $x - x \leq 0$.

Satz 5.3. (b) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, dann $0 \leq x + y$.

Satz 5.3. (c) Wenn $0 \leq x + y$ und $y \leq 0$, dann $0 \leq x$.

Isomorphie.

Reflexivität: $0 \leq x - x \Rightarrow x \leq x$

Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z$

$$\Rightarrow 0 \leq y - x \wedge 0 \leq z - y$$

$$\Rightarrow 0 \leq (z - y) + (y - x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq (z - x) + (y - y)$$

$$\Rightarrow 0 \leq z - x \Rightarrow x \leq z$$

Antisymmetrie
per Definition

$$y - y \leq 0$$

Eine Halbordnung der Spiele

Satz 6.8. Die Klassen gleicher Spiele bilden eine halbgeordnete abelsche Gruppe mit dem Nullelement **Z**. $x \leq 0 \wedge 0 \leq x \Rightarrow x = 0$

Assoziativität
Kommutativität
Inverses: $-x$

$$\begin{aligned} x + 0 &= x & (\Rightarrow) & x \leq x + 0 \quad \wedge \quad x + 0 \leq x \\ & & (\Rightarrow) & 0 \leq x + 0 - x \quad \wedge \quad 0 \leq x - x - 0 \\ & & (\Rightarrow) & 0 \leq (x - x) + 0 \quad \wedge \quad 0 \leq (x - x) + 0 \end{aligned}$$

✓

✓

Spiele und Conwayspiele

$$C = (X, Y) \quad , \quad C \mapsto C_S \quad , \quad C_S = (S, <, \rightarrow_L, \rightarrow_R)$$

$$s, s' \in S : s \xrightarrow{L} s' \Leftrightarrow s' \text{ ist linkes Element von } s$$

$$s \xrightarrow{R} s' \text{ analog}$$

$$\text{Nf} : X \mapsto X_C$$

X_C Normalform von X

Die grundlegenden Abbildungen

Bemerkung 7.1. $(c_s)^L \equiv (c^L)_s$ und $(c_s)^R \equiv (c^R)_s$.

Definition 7.2. $x_c \equiv$ (Menge der $(x^L)_c$, Menge der $(x^R)_c$).

Bemerkung 7.3. $(x_c)^L \equiv (x^L)_c$ und $(x_c)^R \equiv (x^R)_c$.

Satz 7.4. Für jedes Conwayspiel c gilt $c_{sc} \equiv c$.

Beweis.

Induktionsprinzip für Conwayspiele. Wenn aus der Induktionsvoraussetzung, dass Px' für jedes linke oder rechte Element x' eines beliebigen Conwayspiels x , die Induktionsbehauptung Px folgt, dann hat jedes Conwayspiel x die Eigenschaft P .

$$\begin{aligned} c_{sc} &\equiv (\text{Menge der } c_s^L, \text{ Menge der } c_s^R) \\ &\equiv (\text{M.d. } c_{sc}^L, \text{ M.d. } c_{sc}^R) \\ &\equiv (\text{M.d. } c^L, \text{ M.d. } c^R) \equiv c \end{aligned}$$

Die grundlegenden Abbildungen

Bemerkung 7.1. $(c_s)^L \equiv (c^L)_s$ und $(c_s)^R \equiv (c^R)_s$.

Bemerkung 7.3. $(x_c)^L \equiv (x^L)_c$ und $(x_c)^R \equiv (x^R)_c$.

Satz 7.5. Für jedes Spiel x gilt $x = x_{cs}$. $(\Leftrightarrow) x \leq x_{cs} \wedge x_{cs} \leq x$

Beweis.

Induktionsprinzip für Spiele.

Satz 6.5. $x \leq y$ genau dann, wenn (a) nie $y^R \leq x$ und (b) nie $y \leq x^L$.

Satz 6.4. Nie $x^R \leq x$ und nie $x \leq x^L$.

$$\begin{aligned} x \leq x_{cs} & (\Leftrightarrow) \text{nie } x_{cs}^R \leq x \wedge \text{nie } x_{cs} \leq x^L \\ & (\Rightarrow) \text{nie } x_{cs}^R \leq x \wedge \text{nie } x_{cs} \leq x^L_{cs} \\ & (\Leftrightarrow) \text{nie } x^L \leq x \wedge \text{nie } x_{cs} \leq x_{cs}^L \end{aligned}$$

✓

Übertragung der für Spiele definierten Relationen und Operationen auf Conwayspiele

Definition 8.1. $c \leq c'$ genau dann, wenn $c_s \leq c'_s$.

Definition 8.2. $c = c'$ genau dann, wenn $c \leq c'$ und $c' \leq c$.

Definition 8.3. $-c \equiv (-c_s)_c$.

Definition 8.4. $c_1 + c_2 \equiv (c_{1s} + c_{2s})_c$.

Satz 8.5. $c \leq c'$ genau dann, wenn (a) nie $c'^R \leq c$ und (b) nie $c' \leq c^L$.

Beweis.

Satz 6.5. $x \leq y$ genau dann, wenn (a) nie $y^R \leq x$ und (b) nie $y \leq x^L$.

$$\begin{aligned} c \leq c' & \Leftrightarrow c_s \leq c'_s \Leftrightarrow (a) \text{ nie } c'^k_s \leq c_s \wedge (b) \text{ nie } c'_s \leq c_s^L \\ & \Leftrightarrow (a) \text{ nie } c'^k_s \leq c_s \wedge (b) \text{ nie } c'_s \leq c_s^L \\ & \Leftrightarrow (a) \text{ nie } c'^k \leq c \wedge (b) \text{ nie } c' \leq c^L \end{aligned}$$

Übertragung der für Spiele definierten Relationen und Operationen auf Conwayspiele

Satz 8.6. $-c \equiv (\text{Menge der } -(c^R), \text{ Menge der } -(c^L)).$

Satz 8.7. $c_1 + c_2 \equiv (\text{Menge der } (c_1^L + c_2) \cup \text{Menge der } (c_1 + c_2^L), \text{ Menge der } (c_1^R + c_2) \cup \text{Menge der } (c_1 + c_2^R)).$

Satz 8.8. Die Klassen gleicher Conwayspiele bilden in Bezug auf $\leq, -, +$ eine halbgeordnete abelsche Gruppe.

Beispiele

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &\mapsto (\emptyset, \emptyset) \equiv 0 \\ \square \mathcal{D}_1 &\mapsto (\emptyset, \emptyset) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \mapsto (\{0\}, \emptyset) \equiv 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \mapsto (\emptyset, \{0\}) \equiv -1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \mapsto (\{-1\}, \{1\})$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \mapsto (\{0\}, \{0\})$$