Universität Hamburg Sommer 2015
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 5

1. Finden Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}_X \subset M \times \mathbb{R}$ des Flusses des Vektorfeldes $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ auf $M = \mathbb{R}$!

2. Finden Sie vollständige Vektorfelder X und Y auf $\mathbb{R}^2$, so dass $X + Y$ nicht vollständig ist!

3. Seien X und Y Vektorfelder auf M, und seien φ_t bzw. ψ_t die jeweiligen (lokalen) Flüsse. Für $p \in M$ gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass durch $c_p(t) := \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(p)$ eine Kurve $c_p : I \to \mathbb{R}^n$ definiert wird. Zeigen Sie $\dot{c}_p(0) = 0$ und

$$\frac{1}{2}\ddot{c}_p(0) = [X, Y]_p.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Abbildung $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, gegeben als $\beta(s,t) = \psi_{-s} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_s \circ \varphi_t(p)$, und drücken Sie die Ableitungen von c durch geeignete Ableitungen von β aus!

4. Zeigen Sie, dass jede Liegruppe triviales Tangentialbündel hat, d.h. es existiert ein Isomorphismus von Vektorbündeln $TG \cong \underline{\mathbb{R}}^{\dim G} := G \times \mathbb{R}^{\dim G}$ über G!

5. Sei G eine Liegruppe und $\gamma : \mathbb{R} \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen, d.h. eine glatte Kurve in G mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$. Zeigen Sie, dass γ die Form $\gamma(t) = \exp(t\xi)$ mit $\xi = \dot{\gamma}(0)$ hat!

6. **a)** Beschreiben Sie die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ der Liegruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$!

b) Beweisen Sie, dass die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ nicht surjektiv ist!
Hinweis: Ist eine Matrix A im Bild der Exponentialabbildung, so besitzt sie eine Wurzel, d.h. es existiert eine Matrix B mit $B^2 = A$.

c) Ist sie injektiv?