Universität Hamburg Sommer 2015
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 6

1. Analog zur Lieableitung von Vektorfeldern kann man auch die Lieableitung für Differentialformen definieren: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein glattes Vektorfeld und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine glatte k-Form, so definieren wir

$$L_X\omega := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t},$$

wobei φ_t der Fluss des Vektorfelds X ist. Beweisen Sie die *Cartan-Formel*

$$L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega,$$

wobei $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ das Einsetzen des Vektorfeldes in die Differentialform bezeichnet, indem Sie sich folgende Schritte überlegen. Für die Beschreibung bezeichnen wir mit $L_X^*\omega$ die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung.

a) Sowohl L_X als auch L_X^* sind Derivationen des $\wedge$-Produktes von Differentialformen, d.h. es gilt[1]

$$L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_X\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X\omega_2)$$

und analog für L_X^*.

b) Sowohl L_X als auch L_X^* kommutieren mit der äußeren Ableitung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

c) L_X und L_X^* stimmen auf Funktionen $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ überein.

d) Aus diesen drei Aussagen folgt die Behauptung.

2. Beweisen Sie für 1-Formen $\eta \in \Omega^1(M)$ die Beziehung

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]).$$

Hinweis: Eine funktionierende Beweisstrategie ist, zunächst

$$(L_X\eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(L_XY)$$

zu beweisen und dann die Cartan-Formel anzuwenden. Es gibt jedoch auch andere.

3. Welche der Bedingungen an eine kovariante Ableitung verletzt die Lieableitung $(X,Y) \mapsto L_XY$?

[1] Das Einsetzen $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ erfüllt für $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ und $\omega_2 \in \Omega^\ell(M)$ die Relation $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k\omega_1 \wedge (i_X\omega_2)$.

Bitte wenden!

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

a) Beweisen Sie, dass für jeden Zusammenhang ∇ auf TM die *Torsion*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ein $(2,1)$-Tensorfeld und die *Krümmung*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ein $(3,1)$-Tensorfeld auf M ist!

b) Drücken Sie in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ die Komponenten T_{ij}^k und R_{ijk}^ℓ in den Ausdrücken

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_\ell R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

für Torsion und Krümmung mit Hilfe der Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k aus.

c) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k (bezüglich der Standardkoordinaten) des in der Vorlesung definierten kanonischen Zusammenhangs ∇ auf $T\mathbb{R}^n$, der durch

$$\nabla_X \left(\sum \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) := \sum (X\beta_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

definiert ist.

d) Was sind die Christoffel-Symbole dieses kanonischen Zusammenhangs auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Polarkoordinaten (r, φ)?