Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 10

Präsenzaufgaben

(P18) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $(x_1, \dots, x_n)$ Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, so dass die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in jedem Punkt von U eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes bezüglich g bilden. Zeigen Sie, dass dann die Krümmung von g auf U verschwindet!

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 6.7., in der Vorlesung

(A29) Sei I ein offenes Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r(t), z(t))$ eine glatte Kurve mit $r(t) > 0$ und $\|\dot{c}(t)\| = 1$ auf ganz I. Wir betrachten c als eine Kurve in der xz-Ebene in $\mathbb{R}^3$ und definieren die durch c bestimmte *Rotationsfläche* als das Bild der Abbildung $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$,

$$F(\theta, t) := (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t)).$$

a) Zeigen Sie, dass F eine Immersion ist!

b) Sei $g := F^* g_{\mathbb{R}^3}$ die induzierte Metrik auf $\mathbb{R} \times I$. Zeigen Sie, dass deren Komponenten bezüglich der Standardkoordinaten (θ, t) folgende Form haben:

$$g_{tt}(\theta, t) = 1, \quad g_{\theta\theta}(\theta, t) = r(t)^2, \quad g_{\theta t}(\theta, t) = g_{t\theta}(\theta, t) = 0.$$

c) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole der Metrik g auf $\mathbb{R} \times I$ in den Koordinaten (θ, t)!

d) Zeigen Sie, dass eine Kurve $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R} \times I$ genau dann eine Geodätische bezüglich der Metrik g ist, falls die Differentialgleichungen

$$\ddot{\gamma}_1(s) = -2\frac{r'(\gamma_2(s))}{r(\gamma_2(s))}\dot{\gamma}_1(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad \text{und} \quad \ddot{\gamma}_2(s) = r(\gamma_2(s))r'(\gamma_2(s))\dot{\gamma}_1(s)^2$$

gelten!

e) Folgern Sie daraus, dass für alle $\theta_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma(s) := (\theta_0, \alpha s + \beta)$ eine Geodätische in $\mathbb{R} \times I$ ist! Auf welchem Intervall ist diese Kurve definiert?

f) Für welche Werte t_0 ist die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times I$, $\gamma(s) = (s, t_0)$ eine Geodätische?

g) Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung der Metrik g auf $\mathbb{R} \times I$ sich als

$$K(\theta, t) = -\frac{r''(t)}{r(t)}$$

berechnen lässt!

h) Skizzieren Sie die Rotationsflächen für die Kurven

(i) $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (1 + \cos t, \sin t)$,
(ii) $c_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $c_2(t) = (\cos t, \sin t)$, und
(iii) $c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_3(t) = (\cosh t, \sinh t)$,

und bestimmen Sie jeweils die Schnittkrümmung.

(A30) Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\varphi : M \to M$ eine Isometrie von M mit $\varphi(p) = p$.

a) Zeigen Sie: Gilt $\varphi_{*,p} = \mathrm{id} : T_pM \to T_pM$, so folgt schon $\varphi = \mathrm{id}_M$!

b) Was sagt das über die Beziehung der Dimension von M zur möglichen Dimension der Isometriegruppe von M?
(Man kann zeigen, dass die Isometriegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit stets eine Liegruppe ist.)