Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Präsenzaufgaben 29.5.2017

(P15) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. In jedem Punkt $p \in M$ ist $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^k$ ein linearer Unterraum, und wir bezeichnen mit $\pi : T_p\mathbb{R}^k \to T_pM$ die orthogonale Projektion (bezüglich der Standardmetrik des $\mathbb{R}^k$).

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\nabla^M_X Y := \pi(\nabla^{\mathbb{R}^k}_X \iota_* Y)$$

eine kovariante Ableitung auf M definiert wird, wobei $\iota_* Y$ das Vektorfeld Y, aufgefasst als Vektorfelder entlang der Einbettung $\iota : M \to \mathbb{R}^k$, sein soll, und $\nabla^{\mathbb{R}^k}$ die gewöhnliche kovariante Ableitung im $\mathbb{R}^k$ ist.
Insbesondere ist ein Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ parallel entlang einer Kurve $\gamma : [a, b] \to M$, falls die gewöhnliche Ableitung von Y in jedem Punkt $\gamma(t)$ orthogonal zu M ist.

Wir betrachten im Rest der Aufgabe den Spezialfall $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ die Eigenschaft besitzt, dass ihr Tangentialvektor parallel entlang γ ist. Finden Sie ein weiteres Vektorfeld in S^2 entlang γ, welches parallel entlang γ ist?

c) Bestimmen Sie (mit möglichst wenig Rechnung) den Paralleltransport entlang der Seiten des sphärischen Dreiecks $\Delta \subseteq S^2$ mit den Eckpunkten $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 0, 1)$ und $p_3 = (0, -1, 0)$ (welche in der Reihenfolge $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$ durchlaufen werden sollen) – gesucht ist also eine lineare Abbildung $\Pi_\Delta : T_{p_1}S^2 \to T_{p_1}S^2$.