Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2017

Differentialgeometrie

Lösung für Aufgabe (A33) c)

Hier ist eine korrekte Lösung für die Aufgabe **(A33) c)** unter der Zusatzannahme, dass g eine *Riemannsche* Metrik ist.

Sei also (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\|\operatorname{grad} f\| \equiv 1$. Wir betrachten einen Punkt $x \in M$ und die (lokale) Integralkurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ von $\operatorname{grad} f$ mit $\gamma(0) = x$. Offenbar gilt dann für alle $0 < s < \epsilon$

$$L(\gamma|_{[0,s]}) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_0^s 1\, dt = s.$$

Im Folgenden ist noch wichtig, dass dies auch die Differenz der Funktionswerte $f(\gamma(s)) - f(\gamma(0))$ ist.
Wir wollen zeigen, dass der Abstand von x zu $y = \gamma(s)$ mindestens $f(y) - f(x)$ ist, so dass $\gamma|_{[0,s]}$ eine kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten und somit eine Geodätische sein muss. Dazu betrachten wir eine beliebige andere Kurve $\delta : [0, 1] \to M$ mit $\delta(0) = x$ und $\delta(1) = y$, und zeigen, dass sie mindestens Länge s besitzt. Für jedes $t \in [0, 1]$ wissen wir einerseits

$$g(\dot\delta(t), \operatorname{grad}_{\delta(t)} f) \le \|\dot\delta(t)\| \cdot \|\operatorname{grad}_{\delta(t)} f\| = \|\dot\delta(t)\|,$$

weil g Riemannsch ist und $\|\operatorname{grad} f\| \equiv 1$ gilt, und andererseits

$$g(\dot\delta(t), \operatorname{grad}_{\delta(t)} f) = df(\dot\delta(t))$$

nach Definition des Gradientenvektorfeldes. Also folgt

$$L(\delta) = \int_0^1 \|\dot\delta(t)\|\, dt \ge \int_0^1 g(\dot\delta(t), \operatorname{grad}_{\delta(t)} f) dt = \int_0^1 df(\dot\delta(t))\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ \delta)(t)\, dt = f(y) - f(x),$$

und dies war genau unsere Behauptung.