Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 2 zur Abgabe am 17.4.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+0 Punkte)
Überprüfen Sie, ob $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation ist:

(a) $X = 3\mathbb{Z} = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{(x, y) \mid x + y \text{ ist durch 6 teilbar}\}$

(b) $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R = \{(x, y) \mid x \text{ ist nicht teilerfremd zu } y\}$

Aufgabe 2: (1 Punkt)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und $U \subseteq V$ ein Unterraum. In der Vorlesung haben wir den Quotientenraum V/U als Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff x - y \in U$$

auf V definiert, und die Operationen

$$[x] + [y] := [x + y] \quad \text{und} \quad \lambda \cdot [x] := [\lambda \cdot x]$$

für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ eingeführt.
Zeigen Sie, dass diese Operationen *wohldefiniert* sind, d.h. dass die Äquivalenzklasse rechts nicht von der Wahl der jeweiligen Repräsentanten der Äquivalenzklassen links abhängt.

Aufgabe 3: (2+0 Punkte)
Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_n, $n \geq 2$. Für jedes $\sigma \in S_n$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $P_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche durch Anwendung von σ auf die Standardbasis $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ entsteht.

(a) Geben Sie für jedes $\sigma \in S_n$ eine Formel für die Einträge d_{ij} der darstellende Matrix von P_σ an.
Überprüfen Sie, dass mit Ihrer Definition für alle $\pi, \sigma \in S_n$ das Matrixprodukt $P_\pi \cdot P_\sigma$ mit der Matrix $P_{\pi \circ \sigma}$ zu $\pi \circ \sigma$ übereinstimmt.

(b) Überlegen Sie sich, ob (und warum)

$$\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$$

gilt, wobei $\varepsilon(\sigma)$ das Vorzeichen von $\sigma \in S_n$ bezeichnet.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Betrachten Sie die Basis

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^3$. Drücken Sie die Elemente der zu $\mathcal{B}$ dualen Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ als Linearkombinationen der Standardbasis (e_1^*, e_2^*, e_3^*) von $(\mathbb{R}^3)^*$ aus.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich das Problem auf die Inversion einer Matrix reduziert.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}).$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\det(M) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Aufgabe 6: (2 Punkte)
Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (3 Punkte)
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome mit der linearen Abbildung $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $D(f) = f''$ (zweite Ableitung). Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von D.
Hinweis: Da $\mathbb{R}[X]$ unendlichdimensional ist, verwenden Sie bitte nicht den Matrizenkalkül.