Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 10 zur Abgabe am 26.6.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede injektive stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus von X auf das Bild $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2: (3+0+3 Punkte)

(a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Differential df in allen Punkten p mit $f(p) = 0$ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r := \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0, f(r, z) = 0\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Finden Sie mindestens zwei möglichst verschiedene Beispiele von Funktionen $f(r, z)$, welche die Bedingungen in Teil (a) erfüllen.

(c) Betrachten Sie nun konkret die Funktion $f(r, z) = (r - 3)^2 + z^2 - 4$ und finden Sie eine Parametrisierung von

$$M_f \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Skizzieren Sie dann die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit M_f des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe unitärer Matrizen

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{T}}\}$$

eine kompakte C^∞-Untermannigfaltigkeit der reellen Dimension n^2 des reellen euklidischen Vektorraums $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $A \longmapsto f(A) := \overline{A}^{\mathrm{T}} \cdot A$ als Abbildung zwischen reellen Vektorräumen und zeigen Sie zunächst, dass diese eine Submersion von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ auf $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{C}) = \{B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{B}^{\mathrm{T}} = B\}$ ist.
Um die Kompaktheit zu zeigen, weisen Sie nach, dass $\mathrm{U}(n)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ ist. Um die Beschränktheit nachzuweisen, können Sie (statt der euklidischen Norm) auch die Operatornorm betrachten.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

$$\min\{x^2 + y^2 + z^2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } z \neq 0 \text{ und } xy = z^{-1}\}.$$

Hinweis: Die Methode liefert ein notwendiges Kriterium. Zeigen Sie zunächst, dass es angewendet werden darf, und begründen zum Schluss auch, dass es im gegebenen Fall auch hinreichend ist.