

Determinanten

Zu Beginn des Semesters haben wir einige Zeit die Beschäftigung mit linearer Algebra fortgesetzt. Zunächst haben wir dabei Eigenschaften der Determinante von Matrizen $A, A_1, A_2 \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ diskutiert:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Zur konkreten Berechnung von Determinanten eignet sich vor allem der

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

Für jede Matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ gilt:

$$(Z) \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile})$$

$$(S) \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte})$$

Hier entsteht A_{ij} aus A durch Streichung der i -ten Zeile und der j -ten Spalte.

Außerdem haben wir gesehen, dass die Determinante eines Endomorphismus $\phi : V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V wohldefiniert ist: für beliebige (geordnete) Basen B, B' haben wir für die darstellenden Matrizen von ϕ die Beziehung

$$\det M_B(\phi) = \det M_{B'}(\phi).$$

Diesen gemeinsame Wert nennt man *Determinante von ϕ* . Die Cramersche Regel drückt die (eindeutige) Lösung eines linearen Gleichungssystems mit invertierbarer Koeffizientenmatrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ mit Hilfe der Determinante aus:

Satz (Cramersche Regel)

Sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$. Dann sind die Koordinaten der eindeutig bestimmten Lösung $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1 \dots n}$ der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeben durch

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n).$$

Bemerkung: Für $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i$ erhält man so die Spalten von A^{-1} .

2 / 47

Endomorphismen

Eine weitere wiederkehrende Frage war die nach möglichst einfachen darstellenden Matrizen für lineare Abbildungen $L : V \rightarrow V$.

Zunächst führt dies auf die Begriffe des Eigenwerts und des Eigenvektors für Endomorphismen eines \mathbb{K} -Vektorraums V .

Definition

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von L , falls es einen *vom Nullvektor verschiedenen* Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, so dass

$$L(v) = \lambda v.$$

- Jeder solche Vektor heißt *Eigenvektor* von L zum Eigenwert λ .
- Der Unterraum von V definiert durch

$$V_\lambda := \{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$$

heißt *Eigenraum* von F zum Eigenwert λ .

3 / 47

Ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$, so ist $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von $L : V \rightarrow V$, wenn es Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P_L(t) := \det(L - t\text{Id})$$

ist. Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwerts λ ist die maximale Potenz $m_\lambda \in \mathbb{N}$, so dass $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ das Polynom $P_L(t)$ teilt. Die Dimension $n_\lambda \in \mathbb{N}$ des zugehörigen Eigenraums

$$V_\lambda = \ker(L - \lambda\text{Id}) \subseteq V$$

heißt **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ . Es gilt stets

$$1 \leq n_\lambda \leq m_\lambda.$$

Außerdem sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig.

Satz (Diagonalisierbarkeit)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $L \in \text{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

- (i) Der Endomorphismus L ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis, in der die darstellende Matrix Diagonalgestalt hat (diese Basisvektoren sind dann Eigenvektoren).
- (ii) Das charakteristische Polynom P_L zerfällt in Linearfaktoren, und für alle Eigenwerte λ stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein, $m_\lambda = n_\lambda$.
- (iii) V ist die direkte Summe der Eigenräume von L , $V = \bigoplus_{\lambda \text{ EW}} V_\lambda$.

Für Matrizen $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ heißt das konkret, dass unter den genannten Voraussetzungen eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ existiert, so dass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat. Die Spalten von S^{-1} enthalten hier gerade eine Basis aus Eigenvektoren von A .

Für nicht diagonalisierbare Matrizen gibt es z.B. die Jordansche Normalform.

Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Eine **k -Linearform** auf V ist eine Abbildung

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{K},$$

welche in jedem Argument linear ist. Dies bedeutet, dass wenn man beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \in V$ fixiert, die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{K} \\ v &\mapsto F(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned}$$

linear ist. Im Fall $k = 1$ erhalten wir Elemente des Dualraums V^* , im Fall $k = 2$ erhalten wir **Bilinearformen**.

Beispiele

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} .

- Ein Euklidisches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine *symmetrische, positiv definite* Bilinearform auf V . Das Standardskalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$ ist in der Standardbasis gegeben durch $\langle v, w \rangle = v^T w$ (Matrixmultiplikation).
- Die kanonische *symplektische Form* auf $W := V \times V^*$ ist die Bilinearform $\omega : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$\omega((u, \phi), (v, \psi)) = \phi(v) - \psi(u)$$

gegeben ist. Diese ist *schiefsymmetrisch*, d.h.

$$\omega(w, w') = -\omega(w', w) \quad \forall w, w' \in W.$$

- Ist $V = \mathbb{R}^n$, so existiert zu *jeder* Bilinearform $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmter Endomorphismus $A : V \rightarrow V$ mit

$$\alpha(v, w) = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Sei $\dim V = n$, $\alpha: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V . Als **darstellende Matrix** von α bezüglich B bezeichnen wir die Matrix $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit den Einträgen

$$\alpha_{ij} = \alpha(b_i, b_j).$$

Schreibt man $v = \sum_i v_i b_i$ sowie $w = \sum_j w_j b_j$ und fasst $\mathbf{v} = (v_i)$ und $\mathbf{w} = (w_j)$ als Spaltenvektoren auf, so gilt

$$\alpha(v, w) = \mathbf{v}^T \cdot A \cdot \mathbf{w}.$$

Ist B die Standardbasis des \mathbb{R}^n , so gilt insbesondere

$$\alpha(v, w) = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle.$$

Die Bilinearform α ist genau dann **nicht ausgeartet**, wenn zu jeden $0 \neq v \in V$ ein $w \in V$ mit $\alpha(v, w) \neq 0$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre darstellende Matrix (bezüglich irgendeiner Basis) invertierbar ist.

Sowohl Skalarprodukte als auch die oben erwähnte symplektische Form sind Beispiele für nicht ausgeartete Bilinearformen.

Bemerkung

Eine beliebige Bilinearform $\alpha: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform schreiben:

Definiert man

$$\alpha_s(v, w) := \frac{1}{2} (\alpha(v, w) + \alpha(w, v))$$

und

$$\alpha_a(v, w) := \frac{1}{2} (\alpha(v, w) - \alpha(w, v)),$$

so gilt $\alpha = \alpha_s + \alpha_a$. Außerdem ist α_s symmetrisch und α_a antisymmetrisch.

Mit Hilfe eines Euklidischen Skalarproduktes auf V kann man Längen und Winkel definieren, wie sie in der elementaren Geometrie auftreten.

- Die **Länge** (auch **Norm**) eines Vektors $v \in V$ ist die nicht-negative Zahl

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$\langle v, w \rangle \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

- Der **Winkel** $\angle(v, w)$ zwischen v und w ist definiert als

$$\angle(v, w) := \arccos \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}}_{\in [-1, 1]} \in [0, \pi].$$

- Man sagt, dass $v, w \in V$ **senkrecht** aufeinander stehen oder **orthogonal** sind, wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

und schreibt dafür $v \perp w$.

Jeder endlich-dimensionale Euklidische Vektorraum besitzt eine **Orthonormalbasis**, d.h. eine Basis von paarweise orthogonalen Vektoren der Länge 1.

Mit Hilfe des *Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt* kann man aus jeder (geordneten) Basis eine Orthonormalbasis machen.

Zu jeder Struktur auf einem Vektorraum gibt es eine Untergruppe von $GL(V)$ von Abbildungen, welche diese Struktur erhalten.

Für ein Euklidisches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V ist dies die **orthogonale Gruppe**

$$O(V) = \{L \in GL(V) \mid \langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Orthogonale Abbildungen erhalten dann auch Längen und Winkel.

Beispiel

Für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist eine lineare Abbildung in $O(V) =: O(n)$, falls die darstellende Matrix $A^{-1} = A^T$ erfüllt. Die Spalten einer solchen Matrix bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n .

Hermitesche Vektorräume

Analog zum Begriff der symmetrischen Bilinearform auf einem Vektorraum über \mathbb{R} gibt es denn Begriff der Hermiteschen Form für Vektorräume über \mathbb{C} .

Definition

Sei V ein **komplexer** Vektorraum. Eine **Hermitesche Form** auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, die \mathbb{C} -linear im ersten Argument ist, und die für alle $v, w \in V$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle .$$

Insbesondere ist $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Eine Hermitesche Form heißt **Hermitesches Skalarprodukt**, falls für $v \neq 0$ stets $\langle v, v \rangle > 0$ gilt.

Für Hermitesche Skalarprodukte kann man wie im Reellen durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm definieren. Dann gilt wieder die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| .$$

12 / 47

Ein **Hermitescher Vektorraum** ist ein \mathbb{C} -Vektorraum mit einem Hermiteschen Skalarprodukt.

Das Analogon zur ON-Basis im Reellen ist der Begriff der **unitäre Basis** eines Hermiteschen Vektorraums. Auch diese kann man aus einer beliebigen Basis durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens konstruieren.

Die Gruppe der Automorphismen, welche ein Hermitesches Skalarprodukt erhalten, heißt **unitäre Gruppe** $U(V) \subset GL(V)$.

Beispiel

Für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt $\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ schreibt man $U(n)$ für $U(V)$. Es gilt $A \in U(n) \iff \bar{A}^T A = \mathbf{1}_n$. Man schreibt auch $A^\dagger := \bar{A}^T$.

Normalformen

Satz (Normalform unitärer Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum und $F \in \mathcal{U}(V)$ ein **unitärer** Endomorphismus.

- (i) Die Eigenwerte von F sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.
- (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.
- (iii) Es gibt eine **unitäre** Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F . D.h. F ist **in einer unitären Basis** diagonalisierbar.

Für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt bedeutet (iii): Zu jeder Matrix $A \in \mathcal{U}(n)$ gibt es eine Matrix $S \in \mathcal{U}(n)$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

14 / 47

Daraus gewinnt man auch die Aussage für den reellen Fall:

Folgerung (Normalform orthogonaler Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $L \in \mathcal{O}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus.

- (i) (Reelle) Eigenwerte von L sind reelle Zahlen vom Betrag 1, d.h. $= \pm 1$.
- (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.
- (iii) Es gibt eine Orthonormalbasis, bezüglich derer L durch eine Blockdiagonalmatrix folgender Art dargestellt wird

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, D_{\varphi_1}, \dots, D_{\varphi_q}),$$

wobei $\lambda_j \in \{\pm 1\}$, $D_{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}$ Drehungen um den Winkel $\varphi_j \in \mathbb{R}$ sind, und $p + 2q = \dim V$ gilt.

15 / 47

Schließlich gibt es noch die wichtige Klasse der selbstadjungierten Endomorphismen.

Definition (Selbstadjungierte Endomorphismen)

Ein Endomorphismus $L : V \rightarrow V$ eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **selbstadjungiert**, falls

$$\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Einfachste Beispiele

- Für \mathbb{R}^n mit dem kanonischen Euklidischen Skalarprodukt ist A genau dann selbstadjungiert, falls $A^T = A$, d.h. die darstellende Matrix ist symmetrisch.
- Für \mathbb{C}^n mit dem kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt ist A genau dann selbstadjungiert, falls $A^\dagger = A$. Man nennt solche Matrizen auch *Hermitesch*.

16 / 47

Satz (Normalform selbstadjungierter Endomorphismen)

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und $F \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert.

- Die Eigenwerte von F sind reell.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von F stehen senkrecht aufeinander.
- Falls $\dim V < \infty$, so besitzt V eine **orthonormale** bzw. **unitäre** Basis bestehend aus Eigenvektoren von F .

Für $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch (d.h. mit $A = A^T$) gibt es also z.B. ein $S \in O(n)$ mit

$$SAS^{-1} = SAS^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Die λ_k sind die Eigenwerte von A , und die Spalten von S^T (d.h. die Zeilen von S) zugehörige Eigenvektoren.

17 / 47

Lässt man im reellen Fall statt nur orthonormale Basen von Eigenvektoren auch beliebige paarweise *orthogonale* Eigenvektoren zu, so dass $\det S$ nicht mehr zwingend ± 1 ist, so erreicht man stattdessen

$$SAS^{-1} = \text{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0}).$$

Dies ist die sogenannte *Hauptachsentransformation*. Die Zahlen r_+ , r_- und r_0 hängen nicht von der Wahl der Basis ab (Trägheitssatz von Sylvester).

Topologie

Schon im letzten Semester hatten wir uns mit metrischen Räumen beschäftigt. In diesem Semester hatten wir einige neue topologische Begriffe eingeführt, zunächst **offene** und **abgeschlossene** Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) .

Diese Begriffe erlauben unter anderem neue Charakterisierungen von *Stetigkeit*: $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist genau dann stetig, falls

- das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder in Y offenen Menge offen in X ist.
- das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder in Y abgeschlossenen Menge abgeschlossen in X ist.

Es gibt auch elementare Beziehungen zur *Vollständigkeit*:

- Eine vollständige Teilmenge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen in X .
- Ist umgekehrt X vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch A mit der induzierten Metrik vollständig.

In vollständigen metrischen Räumen gilt folgende wichtige Aussage:

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F: X \rightarrow X$ eine **kontrahierende Abbildung**, d.h. es existiert $0 \leq \theta < 1$, so dass

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Dann existiert ein **eindeutiger Fixpunkt von F** , d.h. es gibt genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Des Weiteren konvergiert für alle Anfangswerte $x_0 \in X$ die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ rekursiv definierte Folge (x_k) gegen diesen Fixpunkt.

20 / 47

Das wichtigste neue topologische Konzept ist **Kompaktheit**.

Definition (Kompaktheit)

Sei X ein metrischer Raum.

- Eine **(offene) Überdeckung** einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ (offener) Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.
- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn es zu **jeder** offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k})$, $i_1, \dots, i_k \in I$, gibt.

Beispiele

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Konkrete Beispiele sind:

- abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, und allgemeiner abgeschlossene Bälle $\overline{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$
- endliche Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

21 / 47

Wichtige Aussagen über kompakte Teilmengen $A \subseteq X$ sind:

- A ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.
- Jede Folge (x_n) von Punkten aus A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A .
- Jede abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq A$ ist kompakt.
- Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt.

Insbesondere folgt, dass jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum annimmt (weil jede kompakte Teilmenge von \mathbb{R} ihr Supremum und ihr Infimum enthält (Beweis?)). Außerdem ist eine stetige Funktion auf jeder kompakten Menge *gleichmäßig* stetig.

Bemerkung (ÜA)

Auch andere Eigenschaften von abgeschlossenen Intervallen verallgemeinern sich mit Hilfe unserer topologischen Begriffe. So gilt zum Beispiel die Aussage des Zwischenwertsatzes für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, falls in X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen X und \emptyset sind. Solche Räume heißen *zusammenhängend*.

22 / 47

Wichtige neue Beispiele von metrischen Räumen kamen von *normierten Vektorräumen*.

Beispiele

Beispiele von Normen auf \mathbb{R}^n sind

- $\|x\|_{\text{st}} = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_{\text{max}} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so wird durch

$$d(x, y) := \|y - x\|$$

eine Metrik auf V definiert.

Wir haben gesehen, dass **auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V alle Normen äquivalent** sind, insbesondere also auch dieselben offenen Mengen und somit dieselben Begriffe von Stetigkeit und Konvergenz bestimmen.

23 / 47

Ein **Banachraum** ist ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$, welcher bezüglich der von der Norm induzierten Metrik vollständig ist.

Ein **Hilbertraum** ist ein Banachraum, dessen Norm von einem Euklidischen Skalarprodukt induziert wird. Über \mathbb{R} ist dies genau dann der Fall, wenn die Parallelogrammgleichung

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall v, w \in V.$$

erfüllt ist.

Beispiel

Ein nützliches Beispiel eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes über \mathbb{C} ist der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

24 / 47

(ÜA) Ein Banachraum V ist genau dann endlich-dimensional, wenn der abgeschlossene Einheitsball $\overline{B(0, 1)} = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ kompakt ist.

In unendlich-dimensionalen Räumen sind gewisse Konzepte der linearen Algebra nur begrenzt nützlich. Viele Banach- und Hilberträume haben keine abzählbaren Basen im Sinne der linearen Algebra, und der Dualraum eines unendlich-dimensionalen Raumes ist typischerweise viel größer als der Raum selbst.

Definition

Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ zwei normierte Vektorräume.

Eine lineare Abbildung $F: V_1 \rightarrow V_2$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\|F(u)\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \text{für alle } u \in V_1.$$

Eine lineare Abbildung $F: V_1 \rightarrow V_2$ zwischen normierten Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Ist V_1 endlich-dimensional, so ist dies automatisch der Fall.

25 / 47

Für Banach- und Hilberträume V ist der Raum V' der **beschränkten** (also *stetigen*) Linearformen $F : V \rightarrow \mathbb{K}$ wichtiger als der Dualraum.

Für Hilberträume lässt er sich mit V identifizieren:

Satz (Darstellungssatz von Riesz)

Sei V ein Hilbertraum über \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) und V' der Vektorraum aller **stetigen** linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{K}$.

Dann ist durch

$$\phi(x) := \langle \cdot, x \rangle, \quad x \in V,$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume $\phi: V \rightarrow V'$ gegeben.

Ein metrischer Raum heißt **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Beispiele sind \mathbb{R}^n oder auch der vorhin erwähnte Raum ℓ^2 der komplexen quadratsummierbaren Folgen.

In der Tat lässt sich zeigen, dass jeder unendlich-dimensionale separable Hilbertraum über \mathbb{C} zu ℓ^2 isometrisch ist (d.h. es gibt einen Isomorphismus, welcher auch die Skalarprodukte ineinander überführt).

26 / 47

Wir betrachten nun einen Vektorraum V über \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit einem (Euklidischen oder Hermiteschen) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine **orthonormale Familie** in V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ so dass

- $\langle u, u \rangle = 1 \quad \forall u \in U$
- $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \neq v \in U$.

Ist V separabel, so ist jede orthonormale Familie in V (höchstens) abzählbar.

Satz (Besselsche Ungleichung)

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und (v_1, v_2, \dots) eine (endliche oder abzählbar unendliche) orthonormale Familie.

Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\sum_k |\langle x, v_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ist V **vollständig**, so besitzt die Reihe $\sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ in V einen Grenzwert x_∞ und

$$x_\infty = x \iff \sum_k |\langle x, v_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

27 / 47

Eine abzählbare orthonormale Familie (v_n) heißt **Hilbertbasis** (oder vollständiges ON-System), falls jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung als Reihe $x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ besitzt.

Satz (Charakterisierung von Hilbertbasen)

Für eine abzählbare orthonormale Familie $B = (b_1, b_2, \dots)$ von Vektoren eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\text{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ ist dicht in V .
- (ii) B ist eine Hilbertbasis.
- (iii) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \sum_k \langle x, b_k \rangle \overline{\langle y, b_k \rangle}.$$

- (iv) Für alle $x \in V$ gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, b_k \rangle|^2.$$

28 / 47

Beispiele

- Im Raum ℓ^2 der quadratsummierbaren komplexen Folgen bilden die Folgen $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (mit einer 1 an der i -ten Stelle) eine Hilbertbasis.
- Sei $\tilde{L}_{\text{per}}^2 := \tilde{L}_{\text{per}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der Raum der 2π -periodischen, Riemann-integrierbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Dann bilden die Funktionen $e_k(t) := e^{ikt}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Hilbertbasis von \tilde{L}_{per}^2 .

- Auch die Funktionen $(1, \sqrt{2} \sin(t), \sqrt{2} \cos(t), \dots, \sqrt{2} \sin(nt), \sqrt{2} \cos(nt), \dots)$ bilden eine Hilbertbasis von \tilde{L}_{per}^2 .

\tilde{L}_{per}^2 ist ein dichter Unterraum im Hilbertraum $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der 2π -periodischen, über $[-\pi, \pi]$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen, welchen Sie im nächsten Semester kennenlernen werden.

29 / 47

Die Darstellungen einer 2π -periodischen (Riemann)-integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ in der Form

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

bzw.

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

nennt man **Fourierreihe** von f . Die Koeffizienten berechnen sich dabei als

$$c_k := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

bzw.

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Die Reihen konvergieren jeweils im quadratischen Mittel.

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Der Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher wird wie folgt definiert:

Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- (i) Die Funktion F heißt im Punkt $x \in U$ **(total) differenzierbar**, wenn es eine **lineare Abbildung** $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \xi \rightarrow 0} \frac{\|F(x + \xi) - F(x) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

- (ii) Die Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar**, wenn F in allen Punkten $x \in U$ differenzierbar ist.

Die lineare Abbildung A in (i) ist durch die Bedingung eindeutig bestimmt. Man nennt sie auch das *Differential* von F in x und schreibt auch dF_x dafür.

Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so gilt

$$dF_x(v) = \partial_v F(x) := \frac{d}{dt} F(x + tv)|_{t=0}$$

Dies nennt man die **Richtungsableitung** von F in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$. Setzt man für v die Vektoren der Standardbasis e_i ein, so erhält man die **partiellen Ableitungen**

$$\partial_i F(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x).$$

Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen (F_1, \dots, F_m) , so erhalten wir die **Jacobi-Matrix**

$$dF_x = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & \cdots & \partial_n F_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m(x) & \cdots & \partial_n F_m(x) \end{pmatrix}.$$

32 / 47

Es besteht folgende Beziehung zwischen Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit:

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- F ist **stetig differenzierbar** in U ,
- alle Komponentenfunktionen F_j sind in ganz U **partiell differenzierbar** und **alle partiellen Ableitungen $\partial_i F_j$ sind stetig**.

Außerdem gilt wie im 1-dimensionalen Fall:

Satz (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ total differenzierbar, dann ist F in x stetig.

Auch die Rechenregeln für Ableitungen (Produktregel, Kettenregel usw.) verallgemeinern sich direkt vom 1-dimensionalen Fall.

33 / 47

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} U &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto dF_x \end{aligned}$$

auch (stetig) differenzierbar, so nennen wir F **zweimal** (stetig) differenzierbar. Insbesondere existieren dann alle partiellen Ableitungen (und sind stetig). Analog definiert man höhere (stetige) Differenzierbarkeit. Wir haben

Satz (Lemma von Schwarz)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal **stetig** differenzierbar, so gilt

$$\partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F.$$

34 / 47

Sei nun $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum (eventuell auch mit $\dim V = \infty$). Ist $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in V$ differenzierbar, so ist $dF_x : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear. Nach dem Satz von Riesz gibt es dann einen eindeutigen Vektor $\text{grad}F(x)$ mit

$$dF_x(v) = \langle \text{grad}F(x), v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Diesen nennen wir den **Gradienten** von F im Punkt $x \in V$. Für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt hat $\text{grad}F(x)$ die Komponenten $\partial_i F(x)$ bezüglich der Standardbasis.

Es folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$dF_x(v) = \langle \text{grad}F(x), v \rangle \leq \|\text{grad}F(x)\| \cdot \|v\|,$$

dass der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion im Punkt $x \in V$ angibt.

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ steht in jedem Punkt $x \in V$ **senkrecht auf den Niveaumengen** $F^{-1}(\alpha)$, d.h. ist $c : (a, b) \rightarrow V$ eine Kurve mit $F \circ c(t) \equiv \alpha$, so gilt $c'(t) \perp \text{grad}F(c(t))$ für alle $t \in (a, b)$.

35 / 47

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion ist ein Beispiel für ein **Vektorfeld**.

Für differenzierbare Vektorfelder $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir die **Divergenz** als

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n \partial_i X_i(p).$$

Es gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle + f \cdot \operatorname{div} X.$$

Für eine zweimal differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den **Laplace-Operator** als

$$(\Delta F)(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} F(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 F(x).$$

Dieser ist linear über \mathbb{R} , und es gilt

$$\Delta(F \cdot G) = F \cdot \Delta G + G \cdot \Delta F + 2\langle \operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G \rangle.$$

Differenzierbare Funktionen erfüllen den

Satz (Mittelwertsatz für Funktionen auf dem \mathbb{R}^n)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Seien weiterhin $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t\xi \in U$, für alle $t \in [0, 1]$.

Dann existiert ein $x_0 = x + t_0\xi \in U$ mit $t_0 \in (0, 1)$, so dass

$$F(x + \xi) - F(x) = dF_{x_0}(\xi).$$

Hieraus kann man zum Beispiel ableiten, dass eine auf einer **(weg)zusammenhängenden** offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dF \equiv 0$ konstant sein muss.

Lokale Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher sind analog zum 1-dimensionalen Fall definiert. Wir erhalten folgendes notwendige Kriterium:

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x \in U$ **partiell differenzierbar**.

Wenn f an der Stelle $x \in U$ ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $\text{grad}f(x) = 0$.

Um die hinreichenden Kriterien für Extrema von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen in höheren Dimensionen zu formulieren, ersetzt man die zweite Ableitung durch die Hesse-Matrix

$$\text{Hess } f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Diese ist symmetrisch (vgl. Lemma von Schwarz).

Hesse-Matrix und lokale Extrema

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

- (i) Wenn f an der Stelle $x \in U$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum) hat, dann ist $\text{grad } f(x) = 0$ und $\text{Hess } f(x)$ ist positiv (bzw. negativ) **semi-definit**.
- (ii) Wenn der Gradient von f an der Stelle $x \in U$ verschwindet und
 - ▶ $\text{Hess } f(x)$ positiv definit ist, dann hat f in x ein **isoliertes** lokales Minimum,
 - ▶ $\text{Hess } f(x)$ negativ definit ist, dann hat f in x ein **isoliertes** lokales Maximum,
 - ▶ $\text{Hess } f(x)$ indefinit ist, dann hat f in x kein lokales Extremum.

Der Umkehrsatz

Ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $f: U \rightarrow V$, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

In diesem Fall ist df_x überall invertierbar und es gilt

$$(df^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}.$$

Der Umkehrsatz besagt, dass **lokal**, d.h. in einer geeignet gewählten Umgebung von x , eine Umkehrabbildung existiert, wenn df_x invertierbar ist.

Satz (Umkehrsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ **stetig** differenzierbar und $p \in U$ so, dass die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subseteq U$ von p und W von $q := f(p)$, so dass $f|_V: V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus ist.

40 / 47

Satz über implizite Funktionen

Als wichtige Konsequenz aus dem Umkehrsatz erhalten wir den

Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mal stetig differenzierbar ($k \geq 1$) und $(p, q) \in U$, so dass $f(p, q) = 0$. Weiterhin sei das Differential der Abbildung $y \mapsto f(p, y)$ im Punkt $y = q$ **invertierbar**.

Dann gibt es offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von p und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von q und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $g: V \rightarrow W$, so dass für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt: $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$.

Anders ausgedrückt gilt $N_f(0) \cap V \times W = \text{graph}(g)$.

Wie schon im Umkehrsatz erhalten wir aus einer Aussage über die Linearisierung einer Abbildung (diesmal die Ableitung von f "nach den y -Koordinaten") eine Aussage über eine **nicht-lineare** Gleichung (diesmal die lokale eindeutige Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y).

41 / 47

Wie wir gesehen haben, erlaubt uns dies zum Beispiel (manchmal) die “algebraische” Lösung von gewissen exakten Differentialgleichungen, d.h. die Bestimmung der Lösungskurven ohne explizite Integration.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$4t^3 + 2x + 2tx' = 0.$$

Diese ist exakt mit Potentialfunktion $F(t, x) = t^4 + 2tx$.

Für $t_0 \neq 0$ ist die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ erfüllt, und wir erhalten für das Anfangswertproblem $x(t_0) = x_0$ die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2t} (F(t_0, x_0) - t^4) = \frac{t_0^4 + 2t_0x_0 - t^4}{2t},$$

definiert auf $(0, \infty)$ falls $t_0 > 0$ und auf $(-\infty, 0)$ falls $t_0 < 0$.

42 / 47

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Für differenzierbare Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hatten wir den **Rang im Punkt** $p \in U$ definiert als

$$\text{rg}(f)_p := \text{rg } df_p.$$

Diese Funktion $\text{rg}(f) : U \rightarrow \mathbb{N}$ nimmt nur Werte zwischen 0 und $\min(n, m)$ an.

Wir nennen f

- **von konstantem Rang**, falls $\text{rg}(f)$ auf ganz U konstant ist.
- **Immersion**, falls $\text{rg}(f) \equiv m$, d.h. falls das Differential überall injektiv ist.
- **Submersion**, falls $\text{rg}(f) \equiv n$, d.h. falls das Differential überall surjektiv ist.

In geeigneten Koordinaten hat eine Abbildung von konstantem Rang r die Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}).$$

43 / 47

Untermannigfaltigkeiten

Untermannigfaltigkeiten sind Teilmengen eines \mathbb{R}^n , welche “sich lokal durch m Parameter beschreiben lassen”. Genauer hatten wir sie wie folgt definiert:

Definition (Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit**, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine C^k -Immersion $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die U homöomorph auf die offene Teilmenge $V \cap M$ von M abbildet. $F: U \xrightarrow{\sim} F(U)$ heißt **lokale Parametrisierung** von M oder **Karte** der Umgebung $F(U) \subseteq M$.

44 / 47

Äquivalente Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine **m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^k -Diffeomorphismus $\Phi: V \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

- Zu jedem Punkt $p \in M$ existieren nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ von $p' = (p_1, \dots, p_m)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von $p'' = (p_{m+1}, \dots, p_n)$, und eine C^k -Abbildung $g: U' \rightarrow U''$, so dass

$$(U' \times U'') \cap M = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

- Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine C^k -Submersion $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, so dass

$$V \cap M = f^{-1}(0).$$

45 / 47

Tangentialraum

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M in $p \in M$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\gamma(0) = p \quad \text{und} \quad v = \gamma'(0).$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p heißt **Tangentialraum** in p und wird mit $T_p M$ bezeichnet. Dies ist ein Vektorraum der Dimension $m = \dim M$.

- Ist $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M mit $p = F(u)$, dann bilden die m Vektoren $\partial_1 F(u), \dots, \partial_m F(u) \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $T_p M$.
- Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f_1, \dots, f_{n-m}): V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ eine C^1 -Submersion, so dass $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist $T_p M = \ker(df_p) = \bigcap_{j=1}^{n-m} (\text{grad } f_j(p))^\perp$.

46 / 47

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz (Extrema mit Nebenbedingungen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $p \in M \cap U$ differenzierbar

- (i) Wenn die Einschränkung $F := f|_{U \cap M}$ im Punkt p ein lokales Extremum annimmt, so ist

$$(*) \quad T_p M \subseteq \ker df_p = (\text{grad } f(p))^\perp.$$

- (ii) Sei $r := n - m$ und $h = (h_1, \dots, h_r): U \rightarrow \mathbb{R}^r$ eine C^1 -Submersion, so dass $M \cap U = h^{-1}(0)$. Dann gilt (*) genau dann, wenn es Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (sogenannte **Lagrangemultiplikatoren**) gibt, so dass

$$\text{grad } f(p) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \text{grad } h_j(p).$$

47 / 47