Kapitel 2

Zusammenhänge, Paralleltransport und Krümmung

Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel und $s : B \to E$ ein Schnitt darin. Wir wollen nun ein *koordinatenunabhängiges* Konzept für die Ableitung von s in einem Punkt $b \in B$ in Richtung eines Tangentialvektors $v \in T_bB$ (oder allgemeiner die Ableitung von s in Richtung eines Vektorfeldes $V \in \Gamma(TB)$) entwickeln.
Zwei mögliche Antworten kennen wir bereits:

- Fasst man den Schnitt tatsächlich als Abbildung $s : B \to E$ von der Basis B in den Totalraum E des Bündels auf, so ist die Richtungsableitung einfach der Tangentialvektor
$$s_{*,b}(v) \in T_{s(b)}E,$$
also das Bild von v unter dem Differential von s im Punkt b. Diese Sichtweise hat den Nachteil, dass sie die Struktur von E als Vektorbündel über B komplett ignoriert.

- Im Fall $E = TB$ haben wir mit der Lieableitung eine andere Möglichkeit: Dafür müssen wir zunächst $v \in T_bB$ zu einem (lokalen) Vektorfeld $X \in \Gamma(TB)$ fortsetzen, und können dann für einen beliebigen Schnitt $Y \in \Gamma(TB)$ die Ableitung L_XY betrachten. Hier ist der Nachteil, dass diese Definition tatsächlich von der Fortsetzung X von v auf eine Umgebung von $b \in B$ abhängt.

Beispiel 1. *Die Vektorfelder* $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ *und* $X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ *auf* $B = \mathbb{R}^2$ *stimmen im Punkt* $0 \in \mathbb{R}^2$ *überein. Für* $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ *gilt aber*
$$L_{X_1}Y = 0 \qquad \textit{und} \qquad L_{X_2}Y = -Y,$$
und diese beiden Vektorfelder sind im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ *verschieden.*

Wir wollen stattdessen einen Ableitungsbegriff, der keinen dieser beiden Nachteile hat. Zu $X \in \Gamma(TB)$ und $s \in \Gamma(E)$ soll die Ableitung wieder einen Schnitt $\nabla_X s \in \Gamma(E)$ sein, und der Wert von $\nabla_X s$ in einem Punkt $b \in B$ soll nur vom Wert des Vektorfeldes X im Punkt b abhängen.

Definition 1. Eine *kovariante Ableitung* (alternativ auch unter der Bezeichnung *linearer Zusammenhang* bekannt) auf einem Vektorbündel $\pi : E \to B$ ist eine Abbildung
$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TB) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, s) &\mapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) ∇ ist $C^\infty(B)$-linear im ersten Argument, d.h. es gilt

$$\nabla_{(f_1X_1+f_2X_2)}s = f_1 \cdot \nabla_{X_1}s + f_2 \cdot \nabla_{X_2}s$$

für alle $f_1, f_2 \in C^\infty(B)$, $X_1, x_2 \in \Gamma(TB)$ und $s \in \Gamma(E)$, und

(ii) ∇ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Derivation im zweiten Argument, d.h.

$$\nabla_X(c_1 s_s + c_2 s_2) = c_1 \cdot \nabla_X s_1 + c_2 \nabla_X s_2$$

für alle $X \in \Gamma(TB)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, und

$$\nabla_X(f \cdot s) = f \cdot \nabla_X s + X(f) \cdot s$$

für alle $X \in \Gamma(TB)$, $f \in C^\infty(B)$ und $s \in \Gamma(E)$.

Es wird sich herausstellen, dass es im Allgemeinen auf einem Vektorbündel (sehr) viele kovariante Ableitungen gibt. Andererseits werden wir auf dem Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit mit einer *Riemannschen Metrik* eine ausgezeichnete kovariante Ableitung, den sogenannten *Levi-Civita-Zusammenhang*, kennenlernen, der durch einige besonders nützliche Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist. Bevor wir uns Beispielen zuwenden, wollen wir zunächst beweisen, dass die vor der Formulierung der Definition geforderte Lokalitätsbedingung für kovariante Ableitungen tatsächlich erfüllt ist.

Lemma 1. *Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel $\pi : E \to B$, und sind $X, Y \in \Gamma(TB)$ zwei Vektorfelder mit $X_b = Y_b$, so folgt*

$$(\nabla_X s)(b) = (\nabla_Y s)(b) \qquad \text{für alle } s \in \Gamma(E).$$

Beweis. Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ lokale Koordinaten auf einer Umgebung $U \subseteq B$ von b, und sei $\varrho : B \to [0,1]$ eine glatte Funktion mit $\varrho(b) = 1$ und $\operatorname{supp} \varrho \subseteq U$. Lokal auf U können wir die beiden Vektorfelder X und Y als

$$X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad Y = \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

schreiben, wobei

$$\alpha_i(b) = \beta_i(b) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

Dann gilt mit den in der Definition formulierten Regeln

$$\begin{aligned}
(\nabla_X s)(b) = \varrho(b) \cdot (\nabla_X s)(b) &= (\nabla_{\varrho X} s)(b) \\
&= \left(\nabla_{\varrho \cdot \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)} s\right)(b) \\
&= \sum_i \alpha_i(b) \left(\nabla_{\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}} s\right)(b) \\
&= \sum_i \beta_i(b) \left(\nabla_{\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}} s\right)(b) \\
&= \left(\nabla_{\varrho \cdot \left(\sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)} s\right)(b) \\
&= (\nabla_{\varrho Y} s)(b) \\
&= \varrho(b) \cdot (\nabla_Y s)(b) = (\nabla_Y s)(b).
\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zu ersten Beispielen.

Beispiel 2. *Wir betrachten $B = \mathbb{R}^n$ und $E = T\mathbb{R}^n$. Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$, so bilden die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ einen globalen Rahmen für E, d.h. jedes Vektorfeld Y auf $\mathbb{R}^n$ hat eine eindeutige Darstellung*

$$Y = \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit Funktionen $\beta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nun rechnet man leicht nach, dass der Ausdruck

$$\nabla_X Y := \sum_i X(\beta_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

alle Bedingungen für eine kovariante Ableitung erfüllt. In der Tat erlaubt uns der globale Rahmen, Vektorfelder mit glatten Abbildungen $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu identifizieren, und nach dieser Identifikation ist die hier beschriebene kovariante Ableitung gerade die gewöhnliche Ableitung.

Die Konstruktion in diesem Beispiel funktioniert für jedes Vektorbündel $E \to B$ mit einer globalen Trivialisierung, d.h. mit einem global definierten Rahmen $s_1, \ldots, s_k$. Jeder Schnitt $s \in \Gamma(E)$ hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination

$$s = \sum_i \beta_i s_i$$

mit $\beta_i \in C^\infty(B)$, und wir definiert wie zuvor

$$\nabla_X s := \sum_i X(\beta_i) \cdot s_i.$$

Beispiel 3. *Ist G eine Liegruppe und $v_1, \ldots, v_n \in \mathfrak{g}$ eine Basis der Liealgebra $\mathfrak{g}$, so bilden die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder einen globalen Rahmen $Z_1, \ldots, Z_n$ von TG. Die obige Konstruktion liefert dann einen* linksinvarianten Zusammenhang *auf G.*

Die folgenden Beobachtungen stützen unsere Behauptung, dass es auf jedem Vektorbündel von positivem Rang *viele* Zusammenhänge gibt.

Übungsaufgabe 1.

1. *Sind ∇ und $\widetilde{\nabla}$ zwei kovariante Ableitungen auf dem Vektorbündel $E \to B$, so ist jede Linearkombination $t\nabla + (1-t)\widetilde{\nabla}$ wieder eine kovariante Ableitung.*

2. *Ist $E \to B$ ein Vektorbündel, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von B, $\{\varrho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Zerlegung der Eins mit $\operatorname{supp} \varrho_\alpha \subseteq U_\alpha$, und sind $\{\nabla_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kovariante Ableitungen auf $E|_{U_\alpha}$, so wird durch*

$$\nabla := \sum_\alpha \varrho_\alpha \cdot \nabla_\alpha$$

eine kovariante Ableitung auf E definiert.

Jede Kollektion von lokalen Trivialisierungen liefert also eine kovariante Ableitung, indem man lokale, wie in den Beispielen "auf triviale Weise" definierte kovariante Ableitungen mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zusammenklebt.

Beispiel 4. *Wir werden später auch zeigen: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit, und bezeichnen wir für $p \in M$ mit $\pi_p : T_p\mathbb{R}^d \to T_pM$ die orthogonale Projektion (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $T_p\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$), dann wird durch die Formel*

$$\nabla_X Y := \pi\left(\nabla_X^{\mathbb{R}^d} \widetilde{Y}\right)$$

eine kovariante Ableitung auf TM definiert. Hier bezeichnet $\widetilde{Y}$ eine (lokale) Fortsetzung des Vektorfeldes $Y \in \Gamma(TM)$ auf eine Umgebung von M und $\nabla^{\mathbb{R}^d}$ den Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^d$. Die so definierte kovariante Ableitung hängt natürlich von der konkreten Einbettung $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ab.

Für Rechnungen benötigen wir die Beschreibung einer kovarianten Ableitung ∇ auf dem Tangentialbündel $TM \to M$ einer glatten Mannigfaltigkeit in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir im Folgenden ∂_{x_i} für die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Aus den Rechenregeln folgt sofort, dass die Einschränkung $\nabla|_U$ von ∇ auf den Definitionsbereich U der lokalen Koordinaten eindeutig durch die Vektorfelder $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bestimmt ist. Diese können wir wieder im lokalen Rahmen darstellen, und erhalten

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}$$

für geeignete Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Diese werden *Christoffel-Symbole* des Zusammenhangs ∇ in den lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ genannt.

Beispiel 5. *Wir betrachten die mit den Standardkoordinaten (x, y) auf $\mathbb{R}^2$ definierte kovariante Ableitung, d.h.*

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = \nabla_{\partial_x} \partial_y = \nabla_{\partial_y} \partial_x = \nabla_{\partial_y} \partial_y = 0.$$

Alle acht Christoffel-Symbole verschwinden also in diesen Koordinaten, d.h. es gilt

$$\Gamma_{xx}^x = \Gamma_{xx}^y = \Gamma_{xy}^x = \Gamma_{xy}^y = \cdots = 0.$$

Wir wollen nun die Christoffel-Symbole der gleichen kovarianten Ableitung in Polarkoordinaten bestimmen. Mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ erhalten wir

$$\partial_r = \cos\phi\,\partial_x + \sin\phi\,\partial_y \qquad \textit{und} \qquad \partial_\phi = -r\sin\phi\,\partial_x + r\cos\phi\,\partial_y.$$

Aus den Rechenregeln folgt nun

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_r} \partial_r &= 0, \\
\nabla_{\partial_r} \partial_\phi &= -\sin\phi\,\partial_x + \cos\phi\,\partial_y = \frac{1}{r}\,\partial_\phi, \\
\nabla_{\partial_\phi} \partial_r &= -\sin\phi\,\partial_x + \cos\phi\,\partial_y = \frac{1}{r}\,\partial_\phi, \quad \textit{und} \\
\nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi &= -r\cos\phi\,\partial_x - r\sin\phi\,\partial_y = -r\,\partial_r.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Christoffel-Symbole

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\phi_{rr} = 0,\\
&\Gamma^r_{r\phi} = \Gamma^r_{\phi r} = 0 \quad \textit{und} \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \qquad \textit{sowie}\\
&\Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0 \quad \textit{und} \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r.
\end{aligned}
$$

Definition 2. Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel $E \to B$. Ein Schnitt $s : B \to E$ heißt parallel bezüglich ∇, falls

$$\nabla_X s = 0$$

für alle $X \in \Gamma(TB)$ gilt.

Beispiel 6.

- *Für das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der durch die Standardkoordinaten gegebenen kovarianten Ableitung sind die parallelen Vektorfelder gerade die, welche sich als Linearkombination mit konstanten Koeffizienten der Koordinatenvektorfelder ∂_{x_i} schreiben lassen.*
- *Analog sind auf jeder Liegruppe G mit einem linksinvarianten Zusammenhang ∇ alle linksinvarianten Vektorfelder parallel.*

Bemerkung. Die meisten kovarianten Ableitungen haben überhaupt keine global parallelel Vektorfelder. Wir werden jedoch bald sehen, dass zumindest entlang von Kurven stets parallele Vektorfelder existieren.

Hat man eine kovariante Ableitung ∇ auf einem Vektorbündel $E \to B$, so induziert diese auch kovariante Ableitungen auf anderen Bündeln, die aus E konstruiert werden, wie etwa dem dualen Bündel $E^* \to B$ oder Tensorprodukten von E und E^*. Statt dies abstrakt auszuführen, konzentrieren wir uns hier auf den Spezialfall eines Tangentialbündels $TM \to M$.
Für gegebene $r, s \geq 0$ mit $r + s \geq 1$ können wir das Vektorbündel

$$\underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{r} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{s} \to M$$

betrachten. Einen Schnitt in diesem Bündel nennt man ein (r, s)-*Tensorfeld* auf M. Diese sehr abstrakte Definition lässt sich etwas konkreter wie folgt übersetzen: (r, s)-Tensorfelder entsprechen Abbildungen

$$B : \Gamma(TM)^{\otimes r} \to \Gamma(TM)^{\otimes s},$$

welche in jedem Argument linear über $C^\infty(M)$ sind. Neben der üblichen Additivität bedeutet dies also für beliebige Vektorfelder $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(TM)$ und Funktionen $f \in C^\infty(M)$ die Beziehung

$$B(X_1, \ldots, f \cdot X_i, \ldots, X_r) = f \cdot B(X_1, \ldots, X_r).$$

Die Äquivalenz dieser beiden Sichtweisen ergibt sich aus folgendem Lemma, dessen Beweis eine direkte Verallgemeinerung des Beweises von Lemma 1 ist.

Lemma 2 (Serres Lemma)**.** *Ist B ein (r,s)-Tensorfeld auf M, so hängt der Wert von $B(X_1,\dots,X_r)$ im Punkt $p \in M$ nur von den Werten der Vektorfelder $X_1,\dots,X_r$ im Punkt p ab. Anders ausgedrückt: die Abbildung*

$$\begin{aligned} B_p : T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM &\to (T_pM)^{\otimes s} \\ (v_1,\dots,v_r) &\mapsto B_p(v_1,\dots,v_r) := B(X_1,\dots,X_r)(p) \end{aligned}$$

ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzungen der Vektoren $v_i \in T_pM$ zu Vektorfeldern X_i auf M. □

Bevor wir kovariante Ableitungen für Tensorfelder einführen, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 7. *Ein $(1,0)$-Tensorfeld ist eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung*

$$B : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)^{\otimes 0} := C^\infty(M),$$

entspricht also einer glatten 1-Form auf M. Allgemeiner sind glatte k-Formen (schiefsymmetrische) Beispiele für $(k,0)$-Tensorfelder auf M.

Beispiel 8. *Analog entsprich ein $(0,1)$-Tensorfeld einem Vektorfeld auf M.*

Beispiel 9. *Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf TM, so wird für jedes feste $Y \in \Gamma(TM)$ durch*

$$X \mapsto \nabla_X Y$$

ein $(1,1)$-Tensorfeld ∇Y auf M definiert.

Beispiel 10. *Die Lieklammer*

$$[\,.\,,\,.\,] : \Gamma(TM) \otimes \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ist kein *$(2,1)$-Tensorfeld, denn*

$$[f \cdot X, Y] = f \cdot [X,Y] - Y(f) \cdot X,$$

und der zweite Term auf der rechten Seite ist im Allgemeinen ungleich Null.

Für jede kovariante Ableitung auf TM können wir zwei konkrete Tensorfelder definieren.

Definition 3. Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf TM.

- Der Ausdruck
  $$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
  definiert ein schiefsymmetrisches $(2,1)$-Tensorfeld auf M, den sogenannten *Torsionstensor* von ∇.

- Der Ausdruck
  $$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
  definiert ein $(3,1)$-Tensorfeld auf M, den sogenannten *Krümmungstensor* von ∇. Dieser ist schiefsymmetrisch in X und Y.

Um zum Beispiel nachzurechnen, dass die Torsion T ein Tensorfeld ist, bestimmen wir

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\cdot\nabla_X Y - f\cdot\nabla_Y X - Y(f)\cdot X - (f\cdot[X,Y] - Y(f)\cdot X) \\ &= f\cdot T(X,Y), \end{aligned}$$

was die $C^\infty(M)$-Linearität im ersten Argument zeigt. $C^\infty(M)$-Linearität im zweiten Argument erhält man aus einer analogen Rechnung, oder auch aus der Beobachtung, dass $T(X,Y) = -T(Y,X)$. Die Rechnungen für die Krümmung sind ähnlich.

Bemerkung. Sind ∇ und $\widetilde{\nabla}$ zwei kovariante Ableitungen auf TM, so ist die Differenz

$$S := \nabla - \widetilde{\nabla}$$

ein $(2,1)$-Tensorfeld. Umgekehrt gilt auch: Addiert man zu einer kovarianten Ableitung auf TM ein beliebiges $(2,1)$-Tensorfeld, so erhält man wieder eine kovariante Ableitung auf TM.

Übungsaufgabe 2. *Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf TM mit Torsionstensor T. Dann ist*

$$\widetilde{\nabla} := \nabla - \frac{1}{2}T(X,Y)$$

eine kovariante Ableitung auf TM mit verschwindender Torsion.

Wie schon erwähnt induziert jede kovariante Ableitung auf TM auch kovariante Ableitungen auf den Bündeln $(T^*M)^{\otimes r} \otimes (TM)^{\otimes s}$. Für diese induzierten kovarianten Ableitungen gilt allgemein

$$(\nabla_X B)(X_1,\ldots,X_r) = \nabla_X(B(X_1,\ldots,X_r)) - \sum_{j=1}^{r} B(X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_r).$$

Für $s \in \{0,1\}$ (und dies sind die einzigen Fälle, die wir im Folgenden verwenden werden) ist die induzierte kovariante Ableitung auf (r,s)-Tensorfeldern durch diese Formel schon eindeutig charakterisiert, denn der erste Term auf der rechten Seite hat in diesen Fällen bereits eine Bedeutung: für $s = 1$ ist es die gewöhnliche kovariante Ableitung des Vektorfeldes $B(X_1,\ldots,X_r)$, und für $s = 0$ ist es die Richtungsableitung der Funktion $B(X_1,\ldots,X_r)$.

Bemerkung. Ist B ein (r,s)-Tensorfeld auf M, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla B : \Gamma(TM)^{\otimes r+1} &\to \Gamma(TM)^{\otimes s} \\ (X_0,\ldots,x_r) &\mapsto (\nabla_{X_0}B)\,(X_1,\ldots,X_r) \end{aligned}$$

ein $(r+1,s)$-Tensorfeld auf M. Dies erklärt die Bezeichnung *kovariante* Ableitung, denn ∇ erhöht den kovarianten Grad r eines Tensorfeldes um 1.

Als Spezialfall der Definition eines parallelen Schnitts erhalten wir:

Definition 4. Ein Tensorfeld B heißt *parallel* für die kovariante Ableitung ∇, falls $\nabla B = 0$, d.h. falls für alle $X \in \Gamma(TM)$ die Gleichung $\nabla_X B = 0$ gilt.

Wie schon im Fall von parallelen Vektorfeldern ist die Existenz eines nichttrivialen parallelen Tensorfeldes eine seltene Eigenschaft von kovarianten Ableitungen.

Wir werden später gelegentlich mit folgender Situation konfrontiert: Für glatte Mannigfaltigkeiten N und M sei $f : N \to M$ eine glatte Abbildung.

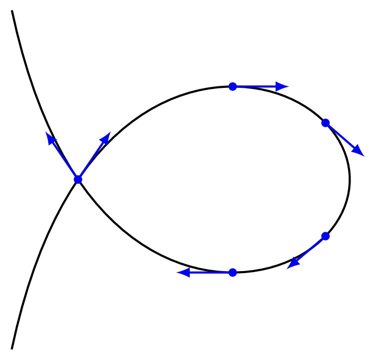
Definition 5. Eine glatte Abbildung $Y : N \to TM$ mit $\pi_M \circ Y = f$ heißt *Vektorfeld entlang* f. Wir bezeichnen den Raum aller Vektorfelder entlang f mit $\Gamma_f(TM)$.

Wir veranschaulichen die Situation mit folgendem kommutierenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
TN \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_N"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\
N \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "Y"] & M
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TN)$ auf N das Bild f_*X unter dem Differential der Abbildung f ein Vektorfeld entlang f im Sinne dieser Definition.

Beispiel 11. *Ist $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve in M, so ist $\dot\gamma : (a, b) \to TM$ ein Vektorfeld entlang γ.*



Beispiel 12. *Ist $\gamma : (a, b) \to TM$ die konstante Kurve $\gamma(t) = p$, so ist ein Vektorfeld entlang γ einfach eine glatte Kurve in T_pM.*

Vektorfelder entlang f kann man auch als Schnitte in einem Vektorbündel über N betrachten, und zwar im zurückgezogenen Tangentialbündel f^*TM mit Totalraum

$$f^*TM = \{(x, v) \in N \times TM \,:\, f(x) = \pi_M(v)\} \subseteq N \times TM.$$

Die Projektion auf N entspricht in dieser Beschreibung einfach der Projektion auf die erste Komponente des Paares. und die Faser über $x \in N$ ist gerade $T_{f(x)}M$.
Der Raum $\Gamma_f(TM)$ der Vektorfelder entlang f ist also auf natürliche Weise ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und ein Modul über dem Ring $C^\infty(N)$. Da $f : N \to M$ auch einen Ringhomomorphismus $C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ induziert, der eine Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ auf $\varphi \circ f : N \to \mathbb{R}$ abbildet, ist $\Gamma_f(TM)$ auch ein Modul über $C^\infty(M)$.
Hier noch einige weitere Beobachtungen:

- Vektorfelder auf M können wir als Vektorfelder entlang der Identität $\mathrm{id} : M \to M$ auffassen.

- Die Abbildung $f : N \to M$ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned}\Gamma(TM) &\to \Gamma_f(TM)\\ X &\mapsto X \circ f,\end{aligned}$$

  die jedem Vektorfeld X seine *Einschränkung auf* f zuordnet. Wie wir in den Beispielen erkennen können, sind Vektorfelder entlang f *nicht immer* Einschränkungen von Vektorfeldern in diesem Sinn.[1]

- Ist $Y \in \Gamma_f(TM)$ ein Vektorfeld entlang f und $\varphi \in C^\infty(M)$ eine Funktion, so erhalten wir eine Funktion $Y\varphi \in C^\infty(N)$ deren Wert im Punkt $q \in N$ gerade die Richtungsableitung

$$(Y\varphi)(q) = Y_q\varphi$$

  ist (zur Erinnerung: $Y_q \in T_{f(q)}M$).

  Falls insbesondere $Y = X \circ f$ die Einschränkung eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(TM)$ ist, so ist $Y\varphi$ auch die Einschränkung von $X\varphi$, d.h. es gilt

$$(X \circ f)\varphi = (X\varphi) \circ f.$$

- *Lokal* lässt sich jedes Vektorfeld $Y \in \Gamma_f(TM)$ entlang f als *Linearkombination von Einschränkungen* mit Koeffizienten in $C^\infty(N)$ schreiben. Um dies einzusehen, betrachten wir für $q \in N$ eine Umgebung $U \subseteq M$ von $f(q)$ mit lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$. Ist $V := f^{-1}(U) \subseteq N$, so hat die Einschränkung eines Vektorfeld $Y \in \Gamma_f(TM)$ entlang f auf V die lokale Darstellung

$$Y|_V = \sum_{k=1}^{\dim M} (Yx_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ f\right).$$

Mit diesen Vorbemerkungen und Notationen kommen wir zu

Satz 3. *Sei $f : N \to M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und ∇ eine kovariante Ableitung auf TM. Dann existiert eine eindeutige und natürliche Fortsetzung von ∇ zu*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla} : \Gamma(TN) \otimes \Gamma_f(TM) &\to \Gamma_f(TM)\\ (A, Y) &\mapsto \overline{\nabla}_A Y\end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\overline{\nabla}$ ist $C^\infty(N)$-linear im ersten Argument.

(b) $\overline{\nabla}$ ist eine Derivation im zweiten Argument.

(c) Für $X \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\overline{\nabla}_A(X \circ f) = (\nabla_{f_*A}X) \circ f.$$

[1] Man kann zeigen, dass genau dann jedes Vektorfeld entlang f die Einschränkung eines Vektorfelds auf M ist, wenn f eine Einbettung ist.

Außerdem gelten folgende Strukturgleichungen:

(d)

$$T(f_*A, f_B) = \overline{\nabla}_A f_* B - \overline{\nabla}_B f_* A - f_*[A, B].$$

(e)

$$R(f_*A, f_*B)Y = \overline{\nabla}_A \overline{\nabla}_B Y - \overline{\nabla}_B \overline{\nabla}_A Y - \overline{\nabla}_{[A,B]} Y$$

Beweis. Bedingungen (a) und (b) sagen, dass $\overline{\nabla}$ (falls es existiert) ein Zusammenhang auf dem Bündel $f^*TM \to N$ ist. Insbesondere ist $\overline{\nabla}$ dann lokal in dem Sinne, dass $\left(\overline{\nabla}_A Y\right)_q$ nur von A_q und von der Einschränkung von Y auf eine (beliebig kleine) Umgebung von q abhängt.
Da jedes Vektorfeld entlang f lokal eine Linearkombination über $C^\infty(N)$ von Einschränkungen ist, und (c) die kovariante Ableitung von Einschränkungen $Y = X \circ f$ eindeutig festlegt, ist $\overline{\nabla}$ durch (a), (b) und (c) eindeutig charakterisiert (falls es existiert).
Für den Existenzbeweis verwenden wir ebenfalls die Eigenschaft (c) in Verbindung mit der lokalen Darstellbarkeit von Vektorfeldern entlang f als Linearkombination von Einschränkungen. Sei konkret $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M mit lokalen Karten mit Koordinaten $(x_{1,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha})$, und $\{\varrho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Zerlegung der Eins, die der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M untergeordnet ist. Dann ist $\{\varrho_\alpha \circ f\}_{\alpha \in A}$ eine Zerlegung der Eins auf N, welche der Überdeckung $\{V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ von N untergeordnet ist. Wir zerlegen nun $Y \in \Gamma_f(TM)$ als Summe

$$Y = \sum_{\alpha \in A} Y_\alpha \qquad \text{mit} \quad Y_\alpha := (\varrho_\alpha \circ f) \cdot Y,$$

so dass $\operatorname{supp} Y_\alpha \subseteq V_\alpha$. Jedes der Vektorfelder Y_α hat eine lokale Darstellung der Form

$$Y_\alpha = \sum_k Y_\alpha(x_{k,\alpha}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}} \circ f \right).$$

Nun definieren wir

$$\overline{\nabla}_A Y := \sum_\alpha \overline{\nabla}_A Y_\alpha = \sum_\alpha \sum_{k=1}^n \left(A(Y_\alpha(x_{k,\alpha})) \frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}} \circ f + Y_\alpha(x_{k,\alpha}) \cdot \left(\nabla_{f*A} \frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}} \right) \circ f \right).$$

Die Eigenschaften (a), (b) und (c) folgen nun relativ direkt aus den Definitionen. Wir zeigen dies exemplarisch für (c): Ist $Y = X \circ f$, und ist

$$X = \sum_\alpha X_\alpha = \sum_\alpha \sum_k X_\alpha(x_{k,\alpha}) \frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}$$

die lokale Zerlegung von X mit $X_\alpha = \varrho_\alpha \cdot X$, so gilt $Y_\alpha = X_\alpha \circ f$, und die lokalen Koeffizienten $Y_\alpha(x_{k,\alpha})$ haben die Form

$$Y_\alpha(x_{k,\alpha}) = (X_\alpha(x_{k,\alpha})) \circ f.$$

Mit dieser Vorüberlegung rechnen wir nun nach, dass

$$\begin{aligned}
(\nabla_{f_*A}X)\circ f &= \left(\nabla_{f_*A}\left(\sum_\alpha X_\alpha\right)\right)\circ f\\
&= \left(\nabla_{f_*A}\left(\sum_\alpha\sum_{k=1}^n X_\alpha(x_{k,\alpha})\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\right)\right)\circ f\\
&= \left(\sum_\alpha\sum_{k=1}^n (f_*A)(X_\alpha(x_{k,\alpha}))\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}} + X_\alpha(x_{k,\alpha})\nabla_{f_*A}\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\right)\circ f\\
&= \sum_\alpha\sum_{k=1}^n A(X_\alpha(x_{k,\alpha})\circ f)\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\circ f + (X_\alpha(x_{k,\alpha})\circ f)\cdot\left(\nabla_{f_*A}\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\right)\circ f\\
&= \sum_\alpha\sum_{k=1}^n A(Y_\alpha(x_{k,\alpha}))\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\circ f + Y_\alpha(x_{k,\alpha})\cdot\left(\nabla_{f*A}\frac{\partial}{\partial x_{k,\alpha}}\right)\circ f\\
&= \overline{\nabla}_A Y.
\end{aligned}$$

Auch die Formeln (d) und (e) prüft man durch Rechnungen in lokalen Koordinaten. Sei also $q\in N$ gegeben, und seien $(x_1,\dots,x_n)$ lokale Koordinaten auf M in einer Umgebung $U\subseteq M$ von $f(q)$. Wir verwenden die Notation $X_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$. Dann haben wir auf $V := f^{-1}(U)$ die lokalen Darstellungen

$$f_*A|_V = \sum_k A(x_k\circ f)\cdot X_k\circ f \qquad\text{und}\qquad f_*B|_V = \sum_k B(x_k\circ f)\cdot X_k\circ f,$$

und analog

$$f_*[A,B]|_V = \sum_k [A,B](x_k\circ f)\cdot X_k\circ f.$$

Da die X_i Koordinatenvektorfelder sind, haben wir $[X_i,X_j]=0$ für alle $1\le i,j\le n$ und somit

$$T(X_i,X_j) = \nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
T(f_*A,f_*B) &= \sum_{i,j} A(x_i\circ f)B(x_j\circ f)T(X_i,X_j)\circ f\\
&= \sum_{i,j} A(x_i\circ f)B(x_j\circ f)\left(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i\right)\circ f\\
&= \sum_j B(x_j\circ f)\,(\nabla_{f_*A}X_j)\circ f - \sum_i A(x_i\circ f)\,(\nabla_{f_*B}X_i)\circ f\\
&= \sum_j B(x_j\circ f)\left(\overline{\nabla}_{f_*A}(X_j\circ f)\right) - \sum_i A(x_i\circ f)\left(\overline{\nabla}_{f_*B}(X_i\circ f)\right)\\
&= \overline{\nabla}_A f_*B - \sum_j A(B(x_j\circ f))X_j\circ f - \left(\overline{\nabla}_B f_*A - \sum_i B(A(x_i\circ f))X_i\circ f\right)\\
&= \overline{\nabla}_A f_*B - \overline{\nabla}_B f_*A - f_*[A,B].
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert (e). Dazu schreiben wir das Vektorfeld $Y \in \Gamma_f(TM)$ lokal in V als

$$Y = \sum_k Y(x_k) X_k \circ f.$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
R(f_*A, f_*B)Y &= \sum_{i,j,k} A(x_i \circ f) B(x_j \circ f) Y(x_k) \quad \underbrace{(R(X_i, X_j)X_k)}_{=\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k} \circ f \\
&= \sum_{j,k} B(x_j \circ f) Y(x_k) \overline{\nabla}_A \left((\nabla_{X_j} X_k) \circ f \right) \\
&\quad - \sum_{i,k} A(x_i \circ f) Y(x_k) \overline{\nabla}_B \left((\nabla_{X_i} X_k) \circ f \right) \\
&= \sum_k Y(x_k) \cdot \left(\overline{\nabla}_A \overline{\nabla}_B (X_k \circ f) - \overline{\nabla}_B \overline{\nabla}_A (X_k \circ f) \right) \\
&\quad - \sum_{i,k} (AB - BA)(x_i \circ f) Y(x_k) (\nabla_{X_i} X_k) \circ f \\
&= \sum_k Y(x_k) \cdot \left(\overline{\nabla}_A \overline{\nabla}_B (X_k \circ f) - \overline{\nabla}_B \overline{\nabla}_A (X_k \circ f) - \overline{\nabla}_{[A,B]} (X_k \circ f) \right) \\
&= \overline{\nabla}_A \overline{\nabla}_B Y - \overline{\nabla}_B \overline{\nabla}_A Y - \overline{\nabla}_{[A,B]} Y,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Tatsache folgt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung $C^\infty(N)$-linear in Y ist. □

Bemerkung. In Zukunft vereinfachen wir die Notation etwas und schreiben $\nabla_A Y$ auch dann, wenn wir eigentlich $\overline{\nabla}_A Y$ meinen.

Wir wollen nun als konkretes Beispiel den Spezialfall betrachten, dass $N = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve in M ist. Sei weiterhin ∇ eine beliebige kovariante Ableitung auf TM. Für $t_0 \in [a, b]$ seien $(x_1, \ldots, x_n)$ lokale Koordinaten in der Nähe von $\gamma(t_0) \in M$. Wir schreiben wieder $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ für die Koordinatenvektorfelder. In einer Umgebung $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ lässt sich jedes Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ entlang γ dann schreiben als

$$Y|(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = \sum a_k \cdot X_k \circ \gamma, \qquad \text{mit } a_k = Y x_k.$$

Insbesondere hat die kovariante Ableitung von Y in Richtung des Standard-Koordinatenvektorfeldes $\frac{d}{dt}$ auf $[a, b]$ dann die Darstellung

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} Y = \sum_k \left(\frac{da_k}{dt} \right) \cdot X_k \circ \gamma + \sum_j a_j \cdot \nabla_{\frac{d}{dt}} (X_j \circ \gamma)$$

mit

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d}{dt}} (X_j \circ \gamma) &= \left(\nabla_{\gamma_* \frac{d}{dt}} X_j \right) \circ \gamma \\
&= \sum_i \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} (\nabla_{X_i} X_j) \circ \gamma \\
&= \sum_{i,k} \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \cdot (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \cdot X_k \circ \gamma,
\end{aligned}$$

und wir erhalten somit

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} Y = \sum_k \left(\frac{da_k}{dt} + \sum_{i,j} a_j \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \cdot X_k \circ \gamma. \tag{2.1}$$

Definition 6. Wir nennen ein Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ entlang der Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ parallel, falls $\nabla_{\frac{d}{dt}} Y = 0$.

Im Gegensatz zu global parallelen Vektorfeldern, die eher selten existieren, können wir die Differentialgleichung (2.1) für jede Anfangsbedingung lösen, und somit finden wir entlang Kurven stets parallele Vektorfelder mit beliebigen Anfangsbedingungen. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 4. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM, und sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve. Für jedes $t_0 \in [a,b]$ und jeden Tangentialvektor $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ existiert dann ein eindeutiges paralleles Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ entlang γ mit $Y_{t_0} = v$.*

Beweis. Da $\gamma([a,b]) \subseteq M$ kompakt ist, finden wir endlich viele Karten für M und eine endliche Zerlegung $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_r = b$, so dass $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ in einer der Kartenumgebungen enthalten ist. Es genügt also, die Aussage für den Fall zu beweisen, dass $\gamma([a,b])$ vollständig in einer Karte enthalten ist.
Seien dafür $(x_1, \ldots, x_n)$ die entsprechenden lokalen Koordinaten. Dann können wir jedes Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ schreiben als

$$Y = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \gamma.$$

Aus der Gleichung (2.1) folgt dann

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} Y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\} \, : \, \frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^n B_j^k a_j \tag{2.2}$$

mit

$$B_j^k = -\sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \gamma. \tag{2.3}$$

Dies ist ein System linearer Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen a_k, und jedes solche System hat eine eindeutige global (also auf ganz $[a,b]$) definierte Lösung zu jedem Anfangswert. $\square$

Folgerung 1. *Die entlang γ parallelen Vektorfelder bilden einen Unterraum der Dimension $n = \dim M$ in $\Gamma_\gamma(TM)$.* $\square$

Folgerung 2. *Parallele Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_k$ entlang einer Kurve γ sind genau dann in einem Punkt $t_0 \in [a,b]$ linear unabhängig, wenn sie in jedem Punkt $t \in [a,b]$ linear unabhängig sind.* $\square$

Mit Hilfe des Satzes 4 können wir den Paralleltransport entlang einer Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ als diejenige Abbildung

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$$

definieren, die jedem Tangentialvektor $v \in T_{\gamma(a)}M$ den Wert $Y_b \in T_{\gamma(b)}M$ im Punkt b des eindeutigen parallelen Vektorfeldes Y mit diesem Startwert zuordnet. Allgemeiner haben wir für festes $\gamma : [a,b] \to M$ auch

$$P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

für beliebige $t_0, t_1 \in [a,b]$.

Übungsaufgabe 3. *Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardkoordinate t und eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ und definieren durch*

$$\nabla_{\partial_t}\partial_t = c\partial_t$$

eine kovariante Ableitung ∇^c auf $T\mathbb{R}$. Bestimmen Sie für $a < b$ in $\mathbb{R}$ den Paralleltransport $P_\gamma : T_a\mathbb{R} \to T_b\mathbb{R}$ bezüglich dieser kovarianten Ableitung entlang der Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = t$.[2]

Proposition 5. *Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf M und $\gamma : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve. Für $t_0 \in [a,b]$ und $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ gilt dann*

$$\left(\nabla_{\frac{d}{dt}} X\right)_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} X_t - X_{t_0}}{t - t_0}.$$

Beweis. Wir wählen einen Rahmen paralleler Vektorfelder $Z_1, \ldots, Z_n$ entlang γ. Dann können wir X als

$$X = \sum_k a_k Z_k \qquad \text{mit glatten Funktionen } a_k : [a,b] \to \mathbb{R}$$

schreiben. Weil die Z_k parallel sind, gilt

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X = \sum_k \frac{da_k}{dt} Z_k.$$

Außerdem gilt

$$P_{t_0 t}^{-1} X_t = \sum_k a_k(t)(Z_k)_{t_0},$$

also

$$\lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} X_t - X_{t_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \sum_k \frac{a_k(t) - a_k(t_0)}{t - t_0} \cdot (Z_k)_{t_0} = \sum_k \left(\frac{da_k}{dt} Z_k\right)_{t_0} = \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} X\right)_{t_0}.$$

□

Bemerkung. Hier ist noch eine andere Sichtweise auf Paralleltransport und kovariante Ableitungen: Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf TM, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Zu jedem $w \in T_pM$ finden wir eine Kurve $\gamma_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = w$. Sei Y_w das entlang γ_w parallele Vektorfeld mit Anfangswert $Y_w(0) = v$. Dieses Vektorfeld

[2] Der globaler Rahmen ∂_t für $T\mathbb{R}$ erlaubt uns die Identifikation $T_a\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \cong T_b\mathbb{R}$, d.h. mit diesen Identifikationen ist P_γ ein linearer Isomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hat also die Form $\xi \mapsto \alpha\xi$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ihre Aufgabe ist die Bestimmung der Konstante α in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.

entlang γ_w können wir auch als Kurve $Y_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ mit $\pi \circ Y_w = \gamma_w$ auffassen (wobei $\pi : TM \to M$ die Bündelprojektion ist), d.h. Y_w liefert uns eine "Hochhebung" von γ_w mit Startpunkt $v \in \pi^{-1}(p) = T_pM \subseteq TM$.
Die Gleichungen (2.2) und (2.3) zeigen, dass für gegebenes v der Tangentialvektor $\dot{Y}_w(0) \in T_vTM$ linear vom Tangentialvektor $\dot{\gamma}_w(0) = w$ abhängt, den $\dot{Y}_w(0)$ hat in der Faserrichtung die Komponenten $\dot{a}_k(0)$, und für $\dot{\gamma}(0) = w$ gilt

$$\dot{a}_k(0) = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j w_i.$$

Die Zuordnung

$$\begin{aligned} T_pM &\to T_vTM \\ w &\mapsto \dot{Y}_w(0) \end{aligned}$$

liefert also eine lineare Einbettung. Das Bild ist ein linearer Unterraum $H_v \in T_vTM$, der wegen $\pi \circ Y_w = \gamma_w$ durch π_* bijektiv auf T_pM projeziert wird. Man nennt $H_v \in T_vTM$ den vom Zusammenhang ∇ bestimmten *horizontalen Unterraum*. Die Familie dieser Unterräume $H_v \subseteq T_vTM$ beschreibt eine n-dimensionale Distribution $H \subset T(TM)$, welche den Zusammenhang ∇ eindeutig charakterisiert. Ein Vektorfeld ist (global oder entlang einer Abbildung $f : N \to M$) parallel für ∇, wenn sein Graph überall tangential an diese Distribution ist.

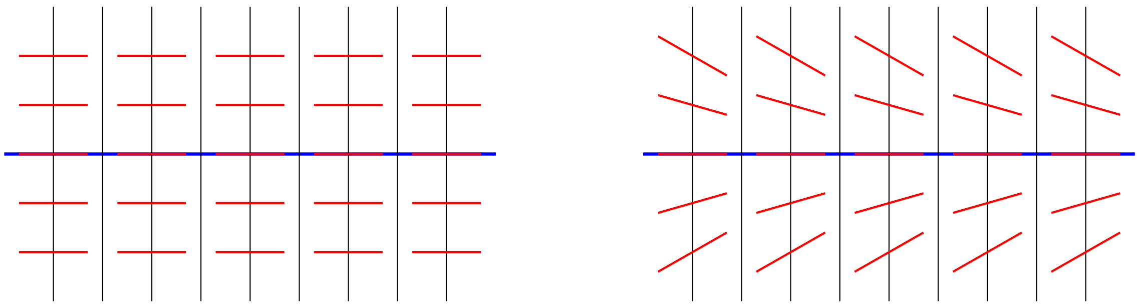


Abbildung 2.1: Diese Bilder zeigen schematisch die horizontalen Räume $H_v \subseteq T_v(T\mathbb{R})$ für die in Übungsaufgabe 3 beschriebene kovariante Ableitung ∇^c auf $T\mathbb{R}$ für $c = 0$ (links) bzw. für $c > 0$ (rechts).

Die Familie der horizontalen Unterräume liefert uns auch eine Beziehung der kovarianten Ableitung $\nabla_X Y$ zur gewöhnlichen Ableitung $Y_*(X)$, wenn wir Y als Abbildung $Y : M \to TM$ auffassen. In der Tat ist $V_v := \ker(\pi_{*,v} : T_vTM \to T_pM) \subseteq T_vTM$ ein zu H_v komplementärer Unterraum, d.h. in jedem Punkt $v \in TM$ ist der Tangentialraum an das Tangentialbündel die direkte Summe

$$T_vTM = V_v \oplus H_v.$$

Im Gegensatz zu den Unterräumen H_v sind die Unterräume V_v kanonisch gegeben, und besteht gerade aus allen Vektoren, die tangential an die Faser T_pM der Projektion π sind. Da T_pM ein Vektorraum ist, können wir dessen Tangentialraum in jedem $v \in T_pM$ mit dem Raum T_pM selbst identifizieren. Die Wahl der komplementären Räume H_v bestimmt nun Projektionen $\mathrm{pr} : T_vTM \to V_v \cong T_pM$, und es gilt

$$(\nabla_X Y)_p = \mathrm{pr}(Y_*(X_p)).$$

Kurz zusammengefasst: Die Wahl der horizontalen Unterräume ist genau das, was wir brauchen, um aus dem gewöhnlichen Differential von $Y : M \to TM$ durch Projektion auf die vertikalen Unterräume eine kovariante Ableitung zu machen.

Haben wir zwei Punkte $p, q \in M$, so liefert uns jede glatte Kurve von p nach q einen Paralleltransport von T_pM nach T_qM. Als nächstes wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, in welcher Weise dieser Paralleltransport von der gewählten Kurve γ abhängt.

Satz 6. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM, $p \in M$ ein Punkt und $u, v, w \in T_pM$ Tangentialvektoren im Punkt p. Sei $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Abbildung mit $F(0,0) = p$, $F_{*,0}(\partial_t) = u$ und $F_{*,0}(\partial_s) = v$ (hier bezeichnen wir mit t die erste und mit s die zweite Koordinate in $(-\varepsilon, \varepsilon)^2$).*
Für $|s|, |t| < \varepsilon$ definieren wir die Abbildung

$$\Pi_{st} : T_pM \to T_pM$$

als Verknüpfung der folgenden Paralleltransporte:

- *P_t von $F(0,0) = p$ nach $F(t,0)$ entlang der Kurve $\tau \mapsto F(\tau, 0)$,*
- *P_s von $F(t,0)$ nach $F(t,s)$ entlang der Kurve $\sigma \mapsto F(t, \sigma)$,*
- *P_t^{-1} von $F(t,s)$ nach $F(0,s)$ entlang der Kurve $\tau \mapsto F(\tau, s)$, und*
- *P_s^{-1} von $F(0,s)$ nach $F(0,0) = p$ entlang der Kurve $\sigma \mapsto F(0, \sigma)$.*

Dann gilt

$$R(u,v)w = \lim_{s,t \to 0} \frac{\Pi_{st}^{-1} w - w}{ts} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right) |_{t=s=0}.$$

Beweis. Wir definieren ein Vektorfeld $Y \in \Gamma_F(TM)$ entlang F durch folgende Bedingungen:

- $Y(0,0) = w$
- $\sigma \mapsto Y_{(0,\sigma)}$ ist parallel entlang $\sigma \mapsto F(0, \sigma)$, und
- für jedes $\sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $\tau \mapsto Y_{(\tau,\sigma)}$ parallel entlang $\tau \mapsto F(\tau, \sigma)$.

Warnung: Mit dieser Definition ist für $\tau \neq 0$ die Zuordnung $\sigma \mapsto Y_{(\tau,\sigma)}$ im allgemeinen nicht *parallel entlang $\sigma \mapsto F(\tau, \sigma)$.*
Im Folgenden kürzen wir die Schreibweise der Koordinatenvektorfelder auf $(-\varepsilon, \varepsilon)^2$ ab zu $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ und $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$. Aus den Strukturgleichungen für die Krümmung entlang F erhalten wir

$$R(F_* \partial_t, F_* \partial_s) Y = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} Y - \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} Y - \nabla_{[\partial_t, \partial_s]} Y.$$

Unsere Konstruktion von Y ist gerade so gemacht, dass der zweite Term verschwindet, und der dritte Term verschwindet auch, da ∂_t und ∂_s als Koordinatenvektorfelder kommutieren. Also wissen wir, dass

$$R(u,v)w = (R(F_* \partial_t, f_* \partial_s) Y)_{(0,0)} = \left(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} Y \right)_{(0,0)}.$$

Nach Konstruktion haben wir $Y_{(t,s)} = P_t P_s w$. Andererseits gilt wegen $\Pi_{ts} = P_s^{-1} P_t^{-1} P_s P_t$ für die inverse Abbildung $\Pi_{ts}^{-1} = P_t^{-1} P_s^{-1} P_t P_s$.
Wir berechnen nun zunächst

$$(\nabla_{\partial_s} Y)_{(t,0)} = \lim_{s \to 0} \frac{P_s^{-1} Y_{(t,s)} - Y_{(t,0)}}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{P_t \Pi_{st}^{-1} w - P_t w}{s} = P_t \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right)_{(t,0)} \right).$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} Y)_{(0,0)} &= \lim_{t \to 0} \frac{P_t^{-1} \left(P_t \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right)_{(t,0)} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right)_{(0,0)}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right)_{(t,0)} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\Pi_{st}^{-1} w \right)_{(0,0)}}{t} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Pi_{st}^{-1} w \right)_{(0,0)}
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Der Satz liefert eine Erklärung für die vielleicht zunächst etwas seltsam anmutende Notation $R(u, v)w$ für die Krümmung. Insbesondere erhalten wir nun auch eine geometrische Interpretation für R: Die Krümmung gibt eine quantifizierte Aussage darüber, wie der Paralleltransport über den Rand "kleiner Rechtecke" in M von der Tangentialebene des Rechtecks im betrachteten Punkt abhängt. Verschwindet die Krümmung auf einer offenen Menge $U \subseteq M$, so ist Paralleltransport in U unabhängig vom Weg in folgendem Sinn: Sind $p, q \in U$ zwei Punkte und sind γ_1 und γ_2 zwei Wege von p nach q in U, die in U relativ zu ihren Endpunkten homotop sind, so gilt $P_{\gamma_1} = P_{\gamma_2}$.
Umgekehrt kann man auch zeigen: Ist Paralleltransport in U unabhängig vom Weg im gerade beschriebenen Sinn, so verschwindet die Krümmung R des Zusammenhangs auf U.

Bemerkung. Die in der Bemerkung auf Seite 14 beschriebene n-dimensionale horizontale Distribution $H \subseteq T(TM)$ ist genau dann integrabel (im Sinne des Satzes von Frobenius), wenn der Krümmungstensor der kovarianten Ableitung ∇ verschwindet.

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir noch kurz eine globale Interpretation des Paralleltransport einer kovarianten Ableitung. Sei also M eine glatte Mannigfaltigkeit, ∇ eine kovariante Ableitung auf TM und $p \in M$ ein Punkt. Wir betrachten den Raum

$$\Omega_p(M) := \{\gamma : [0,1] \to M \ : \gamma \text{ ist stückweise glatt und } \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$$

der Schleifen mit Fusspunkt $p \in M$. Mit der Verknüpfung

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist $\Omega_p(M)$ ein Monoid. Paralleltransport definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\Omega_p(M) &\to GL(T_pM) \cong GL(n, \mathbb{R}) \\
\gamma &\mapsto P_\gamma,
\end{aligned}$$

deren Bild eine Untergruppe von $Hol_p(\nabla) \subseteq GL(T_pM) \cong GL(n, \mathbb{R})$ bildet, welche man die *Holonomiegruppe in p* des Zusammenhangs ∇ nennt. Ist M zusammenhängend, so sind die Holonomiegruppen in verschiedenen Punkten p und q zueinander konjugierte Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$. Betrachtet man in $\Omega_p(M)$ die Teilmenge $\Omega_p^0(M)$ der kontrahierbaren Schleifen, so erhält man die sogenannte *reduzierte Holonomiegruppe* $Hol_p^0(\nabla) \subseteq Hol_p^0(\nabla)$. Man kann nun zeigen, dass

$$Hol_p^0(\nabla) \cong \{\mathbb{1}\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R \equiv 0.$$

In dieser Situation steigt der Paralleltransport zu einem wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(M, p) \to GL(T_pM)$$

ab.

Bemerkung. Gibt es auf M ein bezüglich ∇ paralleles Tensorfeld B, so liegt die Holonomiegruppe $Hol_p(\nabla)$ in der Untergruppe $Aut(B_p) \subseteq GL(T_pM)$ derjenigen Automorphismen, die den Tensor B_p invariant lassen.