Universität Hamburg
Janko Latschev

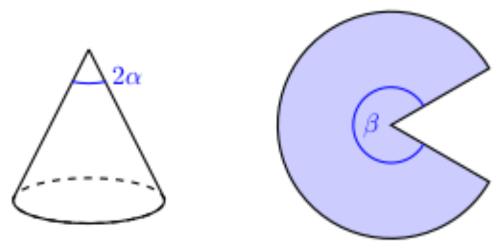
Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 9

Präsenzaufgaben

(P18) Wir betrachten einen Kreiskegel mit Öffnungswinkel 2α wie im linken Bild.



Wenn man diesen Kegel entlang des Schnitts mit der Halbebene $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0, y = 0\}$ aufschneidet, kann man die Fläche isometrisch auf die Ebene abrollen und erhält eine Teilmenge der rechts abgebildeten Form.

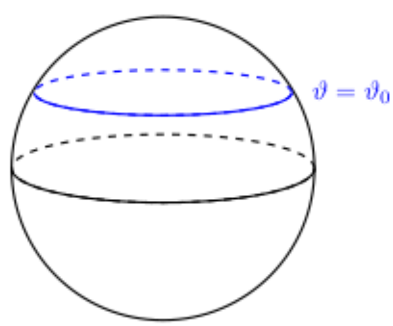
a) Bestimmen Sie den Winkel β in Abhängigkeit von α.

b) Stellen Sie sich vor, wir werfen ein Lasso mit fester Schlingenlänge über den Kegel und ziehen das Ende der Schlinge nach unten. Für kleine Winkel $\alpha > 0$ wird das Lasso auf dem Kegel hängen bleiben, für großes α rutscht es über die Spitze ab. Bei welchem $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ findet der Übergang zwischen diesen beiden Alternativen statt?

(P19) $\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ seien zwei Flächen, die entlang einer Kurve $\gamma : [a, b] \to \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ tangential zueinander sind.

a) Zeigen Sie, dass die Paralleltransporte entlang γ in Σ_1 und Σ_2 für die induzierten Metriken übereinstimmen.

b) Bestimmen Sie den Paralleltransport entlang eines Breitenkreises $\{\vartheta = \vartheta_0\} \subseteq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.



Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 27.6., in der Vorlesung

(A24) Eine Isometrie $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten bildet den Levi-Civita-Zusammenhang von g auf den Levi-Civita-Zusammenhang von h ab, d.h. für Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\varphi_*(\nabla^g_X Y) = \nabla^h_{\varphi_* X}(\varphi_* Y).$$

Insbesondere bildet φ auch Geodätische in (M,g) auf Geodätische in (N,h) ab.

a) Sei $(N,h) = (M,g)$ und sei $F \subset M$ die Fixpunktmenge der Isometrie $\varphi : (M,g) \to (M,g)$. Zeigen Sie: Ist die Geodätische $\gamma : (a,b) \to M$in einem Punkt $p = \gamma(t_0) \in F$ tangential an F, d.h. gilt $\dot\gamma(t_0) \in T_pF \subset T_pM$, so liegt das Bild von γ vollständig in F.

b) Geben Sie verschiedene Beispiele für Flächen $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, für die sie mit solchen Symmetrieargumenten die Bilder von (zumindest gewissen) Geodätischen ohne Rechnung finden können.

(A25) Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ die Rotationsfläche, die durch Rotation einer glatten Kurve $\Gamma \subseteq H = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0$ um die z-Achse in $\mathbb{R}^3$ entsteht. Ist $\gamma : I \to H$, $\gamma(u) = (a(u), 0, b(u))$ eine glatte Parametrisierung der Kurve Γ, so ist

$$\begin{aligned} I \times [0,2\pi] &\to \Sigma \\ (u,\varphi) &\mapsto (a(u)\cos\varphi, a(u)\sin\varphi, b(u)) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung von Σ. Wir nehmen im Folgenden an, dass γ eine Parametrisierung nach Bogenlänge ist, dass also $\|\dot\gamma(u)\|^2_{\mathrm{st}} \equiv 1$.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der von g_{st} induzierten Metrik g auf $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Christoffel-Symbole dieser Metrik in den Koordinaten (u,φ).

b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichungen für Geodätische $c(t) = (u(t), \varphi(t))$ in diesen Koordinaten folgende Form haben (mit $a' = \frac{da}{du}$):

$$\ddot u(t) - (\dot\varphi(t))^2\, a(u(t))a'(u(t)) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot\varphi(t) + 2\dot u(t)\dot\varphi(t)\frac{a'(u(t))}{a(u(t))} = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass folgende Kurven $c(t) = (u(t), \varphi(t))$ Geodätische mit Geschwindigkeit 1 auf Σ sind:

(i) Die Meridiane, d.h. Kurven mit $\varphi(t) \equiv \varphi_0$, parametrisiert als Rotationen von γ.

(ii) Die Breitenkreise $u(t) = u_0$ mit $\frac{da}{du}(u_0) = 0$, parametrisiert nach Bogenlänge.

(iii) Kurven, deren Komponenten die Gleichungen

$$(\dot u(t))^2 + a(u(t))^2\,(\dot\varphi(t))^2 = 1 \quad \text{und} \quad a(u(t))^2\dot\varphi(t) = K$$

für eine Konstante $K > 0$ erfüllen, die von der Geodätischen c abhängt. [1]

d) Skizzieren Sie je ein Beispiel von Geodätischen für jeden der drei Typen für den Torus $\Sigma \cong T^2$ zur Kurve $\gamma(u) = (3 + \cos(u), 0, \sin(u))$ mit $u \in [-\pi, \pi]$.

[1] Diese Kurven oszillieren zwischen zwei aufeinanderfolgenden Breitenkreisen der Form $a(u) = K$, es sei denn, einer dieser Breitenkreise ist selbst eine Geodätische. Ist das der Fall, so ist die Kurve c asymptotisch zu diesem Breitenkreis.

Siehe nächstes Blatt!

(A26) In Aufgabe **(A23)** auf Blatt 8 haben Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs einer Riemannschen Metrik h auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt. Wir identifizieren im folgenden $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und schreiben $z = x + \mathbf{i}y$, so dass die Metrik h auf $T_z\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ die Form

$$h_z(v, w) = \frac{1}{(\mathrm{Im}(z))^2}\mathrm{Re}(v\overline{w})$$

annimmt.

a) In der Funktionentheorie zeigt man, dass durch

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Gruppenwirkung von $SL(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ definiert wird, d.h. für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$ bildet φ_A den Raum $\mathbb{H}$ bijektiv auf sich selbst ab, und es gilt $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$. Zeigen Sie, dass diese Wirkung isometrisch ist, d.h. dass $\varphi_A^* h = h$ für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$.
Hinweis: Es lohnt sich, hier komplex zu rechnen.

b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$ wirkt, d.h. zu $z, w \in \mathbb{H}$ existiert ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $\varphi_A(z) = w$.
Hinweis: Durch Elemente von $SL(2, \mathbb{R})$ lassen sich sowohl Translationen $z \mapsto z + b$ in x-Richtung als auch Skalierungen $z \mapsto \alpha z$ für beliebiges $\alpha > 0$ realisieren.

c) Bestimmen Sie die Untergruppe $G \subseteq SL(2, \mathbb{R})$ derjenigen Abbildungen, welche $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$ fixieren, und zeigen Sie, dass die zugehörigen Differentiale transitiv auf den Einheitsvektoren im Tangentialraum $T_{\mathbf{i}}\mathbb{H}$ wirken.

d) Folgern Sie aus **b)** und **c)**, dass $SL(2, \mathbb{R})$ auch transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $T^1\mathbb{H} := \{v \in T\mathbb{H} \mid h(v, v) = 1\}$ wirkt, und dass die Exponentialabbildung in jedem Punkt $z \in \mathbb{H}$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_z\mathbb{H}$ definiert ist!
Hinweis: In Aufgabe **(A23) c)** *haben Sie gezeigt, dass die Kurven $t \mapsto x + \mathbf{i}e^t$ Geodätische für h sind.*

e) Wie sehen die Bilder der Geodätischen der Metrik h aus?