Eine Einführung in Riemannsche Flächen

Kapitel 1: Definitionen und Grundbegriffe

Definition 1.1:

Eine (komplexe) Karte auf einem topologischen Raum X ist ein Homöomorphismus $\Phi : U \to V$, von einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}$.
$z = \Phi(x)$ heißt dann lokale (komplexe) Koordinate von $x \in U$.

Beispiel 1.2:

Sei $X = \mathbb{R}^2$ und U eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
Dann definieren wir:
$\Phi_U : U \to \mathbb{C}$ durch $\Phi_U(x,y) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + i \cdot \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$
Dann ist Φ_U ein Homöomorphismus auf sein Bild und somit eine Karte für jedes $U \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiel 1.3:

Sei $\Phi : U \to V$ eine komplexe Karte auf einem topologischen Raum X. Sei $U_1 \subset U$, dann ist $\Phi|_{U_1} : U_1 \to \Phi(U_1)$ wieder eine Karte auf X. Diese Karte heißt Einschränkung von Φ auf U_1.

Definition 1.4:

Sei $\Phi : U \to V$ eine komplexe Karte auf X. Sei $\psi : V \to W$ eine biholomorphe Abbildung zwischen Teilmengen von $\mathbb{C}$.
Dann ist $\psi \circ \Phi : U \to W$ eine komplexe Karte auf X.
Dann ist ψ ein Koordinatenwechsel.

Definition 1.5:

Seien $\Phi_1 : U_1 \to V_1$ und $\Phi_2 : U_2 \to V_2$ 2 komplexe Karten auf X. Man nennt Φ_1 und Φ_2 Kompatibel, falls entweder $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \to \Phi_2(U_1 \cap U_2)$ holomorph ist.

Diese Definition ist symmetrisch wie folgt:
Wenn $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ holomorph auf $\Phi_1(U_1 \cap U_2)$ ist, ist $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ holomorph auf $\Phi_2(U_1 \cap U_2)$.

Definition 1.6:

Die Funktion $T := \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ heißt Kartenübergang zwischen den beiden Karten und ist offensichtlich bijektiv.

Beispiel 1.7:

Wir betrachten die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + w^2 = 1\}$$

Wir identifizieren die $w=0$ Ebene mit $\mathbb{C}$.

Sei $\Phi_1 : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ die Projektion:

$$\Phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}$$

und $\Phi_2 : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{C}$ die Abbildung:

$$\Phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} + i \frac{y}{1+w}$$

Der Kartenübergang ist dann:

$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ und somit holomorph.

Definition 1.8:

Ein komplexer Atlas $\mathcal{A}$ auf X ist eine Familie $\mathcal{A} = \{\Phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ von paarweise kompatiblen Karten, deren Definitionsbereiche X überdecken.

In Beispiel 1.7. ist ein komplexer Atlas für S^2 gegeben.

Definition 1.9:

Zwei komplexe Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen äquivalent, falls jede Karte aus $\mathcal{A}$ kompatibel zu jeder Karte aus $\mathcal{B}$ ist.

Daraus folgt direkt:

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ist ein Atlas

Es bleibt zu zeigen, dass dies eine wohldefinierte Äquivalenzrelation ist:

Beweis:

Sei $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$. Sei $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C} \in \mathcal{A}$ und $\Phi_\gamma : U_\gamma \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}$. Wir wollen zeigen, dass Φ_α und Φ_γ kompatibel sind, sei also $U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$, da sonst nichts zu zeigen ist. Sei $p \in \Phi_\gamma(U_\alpha \cap U_\gamma)$, dann existiert eine Karte $\Phi_\beta \in \mathcal{B}$, sodass $\Phi_\gamma^{-1}(p)$ im Definitionsbereich von Φ_β liegt.

$\Rightarrow \Phi_\alpha(\Phi_\gamma^{-1}(p)) = \Phi_\alpha(\Phi_\beta^{-1}(\Phi_\beta(\Phi_\gamma^{-1}(p))))$.

$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ ist nach Vorraussetzung holomorph, $\Phi_\beta \circ \Phi_\gamma^{-1}$ auch.

$\Rightarrow \Phi_\alpha(\Phi_\gamma^{-1}(z))$ ist holomorph in p, da p beliebig war sind wir fertig.

$\square$

Definition 1.10:

Eine Komplexe Struktur auf X ist eine Äquivalenzklasse komplexer Atlanten auf X.

Definition 1.11:

Eine Riemannsche Fläche ist ein Hausdorffraum X, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und mit einer komplexen Struktur versehen ist.

Beispiel 1.12:

S^2 ist Hausdorff und zusammenhängend. Mit der komplexen Struktur, die durch den Atlas aus Beispiel 1.7 gegeben wird ist S^2 eine Riemannsche Fläche. (Riemannsche Zahlenkugel)

Bemerkung 1.13:

Man kann analog zu den bisherigen Definitionen auch höher dimensionalen Komplexe Mannigfaltigkeiten definieren.

Kapitel 2: Beispiele Riemannscher Flächen

Bemerkung 2.1:

Ist auf einer Menge X keine Topologie gegeben, ~~[illegible]~~ braucht man nicht zwingend erst eine Topologie auf X definieren, um zu zeigen, dass X eine Riemannsche Fläche ist. Man kann die Topologie auch auf halbem Weg aus den Karten gewinnen.

Wir beginnen also mit einer Menge X.

1) Wir finden eine abzählbare Menge von Teilmengen von X ($\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$), die X überdeckt.

2) Für jedes α finden wir eine Bijektion $\Phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ mit $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ offen.

3) Man überprüft, dass für alle α und β $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in V_α ist.

An dieser Stelle kann man nun eine Topologie auf X definieren:

- V_α hat eine Topologie als Teilmenge von ~~$\mathbb{C}$~~ $\mathbb{C}$.
- Sei also eine Menge U in U_α genau dann offen, wenn $\Phi(U) \subset V_\alpha$ offen ist.

Für $\tilde{U} \subset X$ definieren wir:

$\tilde{U}$ sei in X genau dann offen, wenn $\tilde{U} \cap U_\alpha$ offen in U_α ist für alle $\alpha \in I$.

Dies definiert eine Topologie auf X.

4) Man überprüft, ob die Karten kompatibel sind.

5) Man überprüft, ob X zusammenhängend und Hausdorffsch ist.

Wenn all dies erfüllt ist, ist X eine Riemannsche Fläche.

Die Projektive Gerade $\mathbb{P}^1$:

Die Projektive Gerade ist die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^2$. Ist $(z,w) \neq 0$ ein Punkt in $\mathbb{C}^2$, dann ist sein Span ein Punkt in $\mathbb{P}^1$, dieser wird mit $[z:w]$ bezeichnet. Jeder Punkt in $\mathbb{P}^1$ ist von der Form $[z:w]$, außerdem gilt:

$$[z:w] = [\lambda z, \lambda w] \text{ für } \lambda \in \mathbb{C}^* \ (*)$$

Satz 2.2:

$\mathbb{P}^1$ ist eine Riemannsche Fläche.

Beweis:

Wir betrachten $U_0 = \{[z;w] \mid z \neq 0\}$ und $U_1 = \{[z;w] \mid w \neq 0\}$.
U_0 und U_1 sind offene Teilmengen von $\mathbb{P}^1$ und ihre Vereinigung überdeckt $\mathbb{P}^1$. Wir definieren nun Karten:

$\Phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, \ [z:w] \longmapsto \frac{w}{z}$

$\Phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \ [z:w] \longmapsto \frac{z}{w}$

Diese sind aufgrund der Eigenschaft $*$ wohldefiniert.

Φ_0 und Φ_1 sind auch bijektiv: (gezeigt für Φ_1. Φ_0 analog)

surjektiv: Sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt: $\Phi_1([z,1]) = z$

injektiv: Sei $\Phi_1([z_1, w_1]) = \Phi_1([z_2, w_2])$

$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} \Rightarrow [z_1, w_1] = [z_2, w_2]$.

Außerdem gilt $\Phi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$ ist offen in $\mathbb{C}$ für $i \in \{0,1\}$.
Wir betrachten $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \ z \mapsto \frac{1}{z}$, dies ist auf $\mathbb{C}^*$ eine holomorphe Funktion, also sind Φ_0 und Φ_1 kompatibel. Nach Bemerkung 2.1 erhalten wir eine Topologie. U_0 und U_1 sind zusammenhängend, also ist auch $\mathbb{P}^1$ zusammenhängend, da $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$.

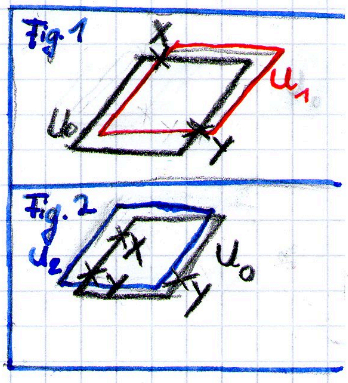
Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbb{P}^1$ Hausdorffsch ist.
Die U_i sind aufgrund der aus $\mathbb{C}$ erhaltenen Topologie Hausdorffsch. Es bleibt der Fall $p \in U_0 \setminus U_1$, $q \in U_1 \setminus U_0$.
Dann gilt aber $p = [1:0]$, $q = [0:1]$. Dann gilt: $q \in \Phi_1^{-1}(D)$, $p \in \Phi_0^{-1}(D)$, wobei D die offene Einheitskreisscheibe ist. Aus $\Phi_1^{-1}(D) \cap \Phi_0^{-1}(D)$ erhalten wir nun die gewünschte Trennung von p und q.
Insgesamt folgt die Behauptung.

$\square$

Komplexe Tori

Satz 2.3:
Sei L ein Gitter, dann ist $\mathbb{C}/L$ eine Riemannsche Fläche, komplexer Torus genannt.

Beweis:



Sei $\pi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ die Projektion. Sei nun U_0 das Innere der Grundmasche und U_1 das Innere einer leicht verschobenen Grundmasche (Fig. 1). Die Punkte x und y sind dann in keinem dieser beiden Inneren, daher nehmen wir noch eine weitere verschobene Grundmasche U_2 hinzu, die x und y im Inneren enthält (Fig. 2). Dann gilt nach Wahl der U_i: $\pi(U_0) \cup \pi(U_1) \cup \pi(U_2) = \mathbb{C}/L$. Auf den U_i gibt es jeweils Inverse zu π, da π auf dem Inneren der Grundmasche injektiv ist. Die Karten auf den U_i sind genau diese lokalen Inversen. Die Kartenübergänge sind einfach Translationen und daher holomorph.
$\mathbb{C}/L$ ist auch zusammenhängend und Hausdorffsch und daher eine Riemannsche Fläche.

$\square$

Lemma 2.4:

Sei $V \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Teilmenge und sei g holomorph auf V. Dann ist der Graph X von g: $X = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}$ eine Riemannsche Fläche.

Beweis:

Wir betrachten X mit der Teilraumtopologie bzgl. $\mathbb{C}^2$ und $\pi: X \to V$, die Projektion auf den ersten Eintrag. π ist ein Homöomorphismus, die Umkehrfunktion bildet z auf das geordnete Paar $(z, g(z))$ ab. Also ~~ist~~ π eine komplexe Karte auf ganz X. Daher ist X eine Riemannsche Fläche.

$\square$

Ebene affine Kurven

Zur Erinnerung:

Satz der impliziten Funktion:

Sei $f(z,w)$ ein Polynom über den komplexen Zahlen und $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z,w) = 0\}$ die Nullstellenmenge. Sei $p = (z_0, w_0)$ eine Nullstelle von f.
Angenommen es gilt $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$, dann existiert eine Funktion $g(z)$ lokal um z_0, so dass lokal X der Graph von g ist.

Definition 2.5:

Eine ebene affine Kurve ist die Nullstellenmenge eines Polynoms $f(z,w)$ in $\mathbb{C}^2$. Ein Polynom ist nicht-singulär in einer Nullstelle, falls eine der partiellen Ableitungen nicht 0 ist. Eine ebene affine Kurve X ist nicht-singulär in p, falls das zugehörige Polynom nicht-singulär in p ist. Die Kurve X heißt glatt, wenn sie nicht-singulär in all ihren Punkten ist.

Satz 2.6:
Falls $f(z,w)$ ein irreduzibles Polynom ist und seine Nullstellenmenge X eine glatte ebene affine Kurve ist, dann ist X eine Riemannsche Fläche.

Beweis:
Sei X eine glatte ebene affine Kurve, die Nullstellenmenge des irreduziblen Polynoms $f(z,w)$ ist.
Sei $p \in X$, falls $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ ist, findet man eine holomorphe Funktion $g_p(z)$, deren Graph in einer Umgebung U von p mit X übereinstimmt. Dann ist die Projektion $\pi_z : U \to \mathbb{C}$ auf den ersten Eintrag eine Karte auf X. Falls $\frac{\partial f}{\partial w}(p) = 0$ ist folgt aus der Glattheit von X, dass $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ und man kann eine analoge Konstruktion mit π_w machen. Also haben wir für jedes $p \in X$ eine Umgebungskarte gefunden.
Wir wollen nun zeigen, dass all diese Karten kompatibel sind:
1. Fall: Beide Karten sind π_z mit jeweils geeignetem Definitionsbereich. Ist der Schnitt der Definitionsbereiche nicht leer, so ist der Kartenübergang auf dem Schnitt die Identität und somit holomorph.
2. Fall: Beide Karten sind π_w mit jeweils geeignetem Definitionsbereich. Analog zum 1. Fall.

<u>3. Fall:</u> Eine Karte ist π_z, die andere π_w mit jeweils geeignetem Definitionsbereich. Sei $p = (z_0, w_0)$ im Schnitt dieser Definitionsbereiche. Also ist X, nahe p, von der Form $(z, g(z))$ für eine holomorphe Funktion g. Also bildet π_z^{-1} z nahe z_0 auf $(z, g(z))$ ab.

$$\Rightarrow \quad \pi_w \circ \pi_z^{-1}(z) = \pi_w(\pi_z^{-1}(z)) = \pi_w(z, g(z)) = g(z)$$

Der Kartenübergang ist also holomorph, da g holomorph ist. Wir haben also einen komplexen Atlas auf X konstruiert. X ist ein Teilraum von $\mathbb{C}^2$ und daher Hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

<u>Fakt:</u> (aus der algebraischen Geometrie)
Aus der Irreduzibilität von f folgt, dass X zusammenhängend ist.

Damit ist X eine Riemannsche Fläche. $\square$

<u>Kapitel 3:</u> Projektive Kurven

Die Projektive Ebene $\mathbb{P}^2$

<u>Definition 3.1:</u>

Die <u>Projektive Ebene</u> $\mathbb{P}^2$ ist die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^3$. Analog zu $\mathbb{P}^1$ sind die Punkte in $\mathbb{P}^2$ von der Form $[x : y : z]$.
$\mathbb{P}^2$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Zur Erinnerung: Homogene Polynome:
Ein Polynom heißt homogen, falls jeder Term den gleichen Grad in allen Variablen hat. Dies ist der Grad des Polynoms.

Sei $F(x,y,z)$ homogen vom Grad d.
Dann gilt für $[x_1, y_1, z_1] = [x_2, y_2, z_2]$:

$F(x_1, y_1, z_1) = \lambda^d F(x_2, y_2, z_2)$, da

$[x_1, y_1, z_1] = [x_2, y_2, z_2] \Rightarrow x_1 = \lambda x_2,\ y_1 = \lambda y_2$ und $z_1 = \lambda z_2$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Daraus folgt, dass die Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^2$ von F wohldefiniert ist.
Wir wollen zeigen, dass die Menge $X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2, F(x,y,z) = 0\}$ eine Riemannsche Fläche ist. Diese nennt man <u>Projektive Kurve</u>.

<u>Definition 3.2</u>:
Ein homogenes Polynom heißt <u>nicht-singulär</u>, falls es in $\mathbb{P}^2$ keine Lösung für das folgende Gleichungssystem gibt:
$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

<u>Lemma 3.3</u>: (Eulersche Formel)
Jedes homogene Polynom (für jede Anzahl von Variablen x_i) von Grad d erfüllt:
$$F = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

<u>Beweis</u>:
Wir zeigen die Formel zunächst für Monome:
Sei also $F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$ mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = d$
$$\Rightarrow \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} p_i F = \frac{1}{d} \cdot d \cdot F = F.$$
Da jedes Polynom Summe von Monomen ist, und die Formel additiv ist, folgt die Behauptung. $\square$

Für ein homogenes Polynom F definieren wir:

$$X_0 := \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,z) = 0,\ x \neq 0\}$$
$$X_1 := \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,z) = 0,\ y \neq 0\}$$
$$X_2 := \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,z) = 0,\ z \neq 0\}$$

Die Vereinigung dieser Mengen ist die ganze Nullstellenmenge von F in $\mathbb{P}^2$. Die X_i sind außerdem ebene affine Kurven.

Lemma 3.4:

Sei $F(x,y,z)$ ein homogenes Polynom von Grad d.
Dann ist F nicht-singulär genau dann, wenn jedes der obigen X_i eine glatte affine Kurve ist. (in $\mathbb{C}^2$)

Beweis:

„⇒" Sei eines der X_i nicht glatt.
o.B.d.A. sei X_0 nicht glatt.
Wir definieren $f(u,v) := F(1,u,v)$, dann ist X_0 die Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}^2$.
Da X_0 nicht glatt ist gibt es eine Lösung für
$f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$, sei diese Lösung $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$.

Behauptung: $[1:u_0:v_0]$ löst das Gleichungssystem aus Definition 3.2.

$$F([1:u_0:v_0]) = f(u_0,v_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}([1:u_0:v_0]) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}([1:u_0:v_0]) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}([1:u_0:v_0]) \overset{*}{=} \left(d \cdot F - u_0\frac{\partial F}{\partial y} - v_0\frac{\partial F}{\partial z}\right)([1:u_0:v_0]) = 0$$

Wobei $*$ aus der Eulerschen Formel folgt.

Also ist F singulär!

„$\Leftarrow$" Wenn F singulär ist folgt mit Hilfe der gleichen Formeln, dass eines der X_i nicht glatt sein kann.

$\square$

Satz 3.5:

Sei $F(x,y,z)$ ein nicht-singuläres homogenes Polynom. Dann ist die Nullstellenmenge X von F in $\mathbb{P}^2$ eine kompakte Riemannsche Fläche.

Fakt: Ein nicht-singuläres homogenes Polynom ist irreduzibel. Insbesondere sind die Polynome

$$f_0(y,z) := F(1,y,z)$$
$$f_1(x,z) := F(x,1,z)$$
$$f_2(x,y) := F(x,y,1)$$

irreduzibel.

Beweis des Satzes:

Aus dem Fakt und Lemma 3.4 folgt, dass die X_i Riemannsche Flächen sind. Die Karten sind wieder die Projektionen, in diesem Fall zum Beispiel für X_0 auf $\frac{y}{x}$ oder $\frac{z}{x}$, da $[x:y:z] = [1:\frac{y}{x}:\frac{z}{x}]$

in X_0 gilt. Die Karten können einfach diese Projektionen sein, da X_0 lokal ein Graph ist (vergleiche Satz 2.6). Lokale Karten für Punkte in X_1 bzw. X_2 erhält man analog. Das Karten von einem X_i paarweise kompatibel sind wissen wir bereits. Betrachten wir also $p \in X_0 \cap X_1$

$\Rightarrow p = [x:y:z]$ mit $x, y \neq 0$

Seien o.B.d.A. die Karten lokal um p $\Phi_0 : X_0 \to \mathbb{C}$, $[x:y:z] \mapsto \frac{y}{x}$ und $\Phi_1 : X_1 \to \mathbb{C}$, $[x:y:z] \mapsto \frac{z}{y}$

Wir betrachten $\Phi_0^{-1}: \mathbb{C} \to X_0$, da X_0 lokal ein Graph ist gilt: $\Phi_0^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$ für geeignetes holomorphes h.

$\Rightarrow \Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}(w) = \frac{h(w)}{w}$, dies ist holomorph, da $w \neq 0$ ist wegen $p \in X_1$.

Analog zeigt man Komptibilität für alle anderen Kombinationen der x_i. Wir haben also eine komplexe Struktur auf X. Außerdem ist X als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\mathbb{P}^2$ kompakt. Insgesamt folgt, dass X eine kompakte Riemannsche Fläche ist.

$\square$

Man nennt X glatte Projektive Kurve von Rang d, wobei d der Rang des homogenen Polynoms F ist.

Höher dimensionale Projektive Räume

Definition 3.6:

Die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$ wird Projektiver n-Raum genannt und als $\mathbb{P}^n$ bezeichnet.

Durch analoge Betrachtung wie im Fall $\mathbb{P}^2$ sieht man, dass die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms in $n+1$ Variablen in $\mathbb{P}^n$ wohldefiniert ist. Diese Nullstellenmenge nennt man Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$.

Definition 3.7:

Seien $F_1, \dots, F_{n-1}$ homogene Polynome in $n+1$ Variablen $x_0, \dots, x_n$. Sei X der Durchschnitt ihrer Nullstellenmengen. Wir nennen X glatten vollständigen Durchschnitt in $\mathbb{P}^n$, falls die $(n-1) \times (n+1)$ Matrix der partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ in jedem Punkt von X vollen Rang hat.

Satz 3.8:

Ein zusammenhängender glatter vollständiger Durchschnitt in $\mathbb{P}^n$ ist eine Riemannsche Fläche.

Beweis - Skizze:

Die Bedingung an die Matrix der Ableitungen ist die Vorraussetzung für die Anwendung des Satzes der impliziten Funktion für den multivariablen Fall. Daraus folgt, dass X lokal der Graph von $n-1$ holomorphen Funktionen ist. Karten auf X erhält man dann einfach durch Quotienten geeigneter Koordinaten (ähnlich wie in Satz 3.5). $\square$

Lokal vollständige Durchschnitte

Nicht alle Riemannschen Flächen im Projektiven n-Raum sind vollständige Durchschnitte. Zum Beispiel ist das Bild der Funktion $H: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, die $[x:y]$ auf $[x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$ abbildet kein vollständiger Durchschnitt. Um das Bild X - eine Kurve in $\mathbb{P}^3$ - zu beschreiben benötigt man 3 Gleichungen. Zum Beispiel die Folgenden:

$$x_0 x_3 = x_1 x_2, \quad x_0 x_2 = x_1^2 \quad \text{und} \quad x_1 x_3 = x_2^2$$

Um einzusehen, dass X eine Riemannsche Fläche ist, bemerkt man, dass man an jedem Punkt von X nur 2 der 3 Gleichungen benötigt.
Nahe $[1:0:0:0]$ benötigt man zum Beispiel nur

$x_0 x_3 = x_1 x_2$ und $x_0 x_2 = x_1^2$, da die dritte Gleichung unter Ausnutzung von $x_0 \neq 0$ nahe $[1:0:0:0]$ aus diesen beiden folgt. Da aber kein paar der Gleichangen immer funktioniert machen wir folgende Definition.

Definition 3.9:

Ein <u>lokal vollständiger Durchschnitt</u> ist eine Menge $X \subset \mathbb{P}^n$, die Nullstellenmenge einer Familie $\{F_\alpha\}$ von homogenen Polynomen ist. Dabei muss gelten, dass nahe p X lokal von $n-1$ diesen Polynome definiert wird:

$$F_{\alpha_1} = F_{\alpha_2} = \ldots = F_{\alpha_{n-1}} = 0$$

wobei die Matrix der partiellen Ableitung dieser Polynome in p maximalen Rang haben muss.

Satz 3.10:

Jeder zusammenhängende lokal vollständige Durchschnitt X in $\mathbb{P}^n$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche.

Beweis

Da die Karten von vollständigen Durchschnitten lokal durch den Satz der impliziten Funktion geliefert werden, genügt die lokale Anforderung an die F_{α_i} um sicherzustellen, das X eine Riemannsche Fläche ist.

$\square$