# Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen und ihre Eigenschaften

**Seminar Funktionentheorie bei Prof. Dr. Janko Latschev**

Tobias Vienenkötter

15.01.2014

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Funktionen auf Riemannschen Flächen

## Holomorphe Funktionen

Sei $X$ eine Riemannsche Fläche, $p \in X$ ein Punkt von $X$, $f$ eine komplexe Funktion definiert auf einer Umgebung $W$ von $p$.

**Definition 1.1**
Wir sagen, dass $f$ holomorph in $p$ ist, wenn es eine Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$ gibt, so dass die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ holomorph in $\phi(p)$ ist. Wir sagen f ist holomorph auf $W$, wenn sie in jedem Punkt von $W$ holomorph ist.

**Lemma 1.2**
Sei $X$ eine Riemannsche Fläche, $p \in X$, $W$ eine Umgebung von $p$ und sei $f : W \to \mathbb{C}$. Dann:

a) $f$ ist genau dann holomorph in $p$, wenn für jede Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$, die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ holomorph in $\phi(p)$ ist.

b) $f$ ist genau dann holomorph auf $W$, wenn es Karten $\{\phi_i : U_i \to V_i\}$ mit $W \subseteq \bigcup_i U_i$ gibt, so dass $f \circ \phi_i^{-1}$ holomorph auf $\phi_i(W \cap U_i)$ für jedes $i \in I$ ist.

c) Wenn f holomorph in $p$ ist, dann ist $f$ holomorph auf einer Umgebung von $p$.

**Beweis**
zu a):
Seien $\phi_1$ und $\phi_2$ zwei Karten deren Urbilder $p$ enthalten. Wir nehmen an dass $f \circ \phi_1^{-1}$ holomorph in $\phi_1(p)$ ist. Wir müssen zeigen, dass $f \circ \phi_2^{-1}$ holomorph in $\phi_2(p)$ ist. Nun ist

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})$$

was zeigt, dass $f \circ \phi_2^{-1}$ eine Komposition holomorpher Abbildungen ist und somit holomorph.
b) folgt direkt aus a).
c) folgt aus der entsprechenden Aussage für Funktionen auf offenen Umgebungen auf $\mathbb{C}$.

$\square$

**Beispiel 1.3**
Jede komplexe Karte, betrachtet als komplex-wertige Funktion auf ihrem Definitionsbereich ist holomorph auf ihrem Definitionsbereich.

**Beispiel 1.4**
Sei $f$ eine komplex-wertige Funktion auf einer offenen Teilmenge in $\mathbb{C}$. Dann stimmt die obige Definition über Holomorphie (mit $\mathbb{C}$ als Riemannsche Fläche) mit der gewohnten Definition überein.

**Beispiel 1.5**
Angenommen $f$ und $g$ sind holomoph in $p \in X$, dann sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ holomorph in $p \in X$. Gilt $g(p) \neq 0$, dann ist auch $f/g$ holomorph in $p \in X$.

**Beispiel 1.6**
Sei $f$ eine komplex-wertige Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ definiert auf einer Umgebung von $\infty$. Dann ist $f$ genau dann holomorph in $\infty$ wenn $f(1/z)$ holomorph in $z = 0$ ist. Ist $f$ insbesondere eine rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$, dann ist $f$ genau dann holomorph in $\infty$, wenn $deg(p) \leq deg(q)$.

**Beispiel 1.7**
Betrachte die projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ mit homogenen Koordinaten $[z : w]$. Seien $p(z, w)$ und $q(z, w)$ homogene Polynome des selben Grades. Angenommen $q(z_0, w_0) \neq 0$. Dann ist $f([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf einer Umgebung von $[z_0 : w_0]$.

**Beispiel 1.8**
Betrachte den komplexen Torus $\mathbb{C}/L$, mit Quotientenkarte $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$. Sei $f : W \to \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{C}/L$. Dann ist $f$ genau dann holomorph in einem Punkt $p \in W$, wenn ein Urbild $z$ von $p$ in $\mathbb{C}$ existiert, so dass $f \circ \pi$ holomorph in $z$ ist. Zudem ist $f$ genau dann holomorph auf $W$, wenn $f \circ \pi$ holomorph auf $\pi^{-1}(W)$ ist.

**Definition 1.9**
Wenn $W \subset X$ eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche $X$ ist, dann bezeichnen wir die Menge der holomorphen Funktionen auf $W$ mit $\mathcal{O}_X(W)$ (oder einfach $\mathcal{O}(W)$):

$$\mathcal{O}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} | f \text{ ist holomorph}\}$$

## Singularitäten von Abbildungen; meromorphe Abbildungen

**Definition 1.10**
Sei $p \in X$ ein Punkt einer Riemannschen Fläche $X$, $U$ eine Umgebung von $p$ und sei $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$.

a) Wir sagen $f$ hat genau dann eine hebbare Singularität bei $p$, wenn es eine Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$ gibt, so dass die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ eine hebbare Singularität in $\phi(p)$ hat.

b) Wir sagen $f$ hat genau dann einen Pol bei $p$, wenn es eine Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$ gibt, so dass die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ einen Pol bei $\phi(p)$ hat.

c) Wir sagen $f$ hat genau dann eine wesentliche Singularität bei $p$, wenn es eine Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$ gibt, so dass die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ eine wesentliche Singularität bei $\phi(p)$ hat.

Analog zum Lemma 1.2 erhalten wir:
**Lemma 1.11**
Mit der obigen Notation besitzt $f$ genau dann eine hebbare Singularität (einen Pol, eine wesentliche Singularität), wenn für jede Karte $\phi : U \to V$ mit $p \in U$, die Komposition $f \circ \phi^{-1}$ eine hebbare Singularität ( einen Pol, eine wesentliche Singularität) in $\phi(p)$ besitzt.

**Definition 1.12**
Eine Funktion $f$ auf $X$ ist meromorph in einem Punkt $p \in X$, wenn sie entweder holomorph ist, eine hebbare Singularität, oder einen Pol, in $p$ besitzt. Wir sagen $f$ ist meromorph auf einer offenen Umgebung $W$, wenn die Funktion meromorph in jedem Punkt von $W$ ist.

**Beispiel 1.13**
Sei $f$ eine komplex-wertige Funktion auf einer offenen Menge in $\mathbb{C}$. Dann stimmt die obige Definition über Meromorphie (wobei wir $\mathbb{C}$ als Riemannsche Fläche betrachten, siehe Beispiel 1.19) mit der gewohnten Definition überein.

**Beispiel 1.14**
Angenommen $f$ und $g$ sind meromorph in $p \in X$. Dann sind $f \pm g$ und $f \cdot g$ meromorph in $p \in X$. Ist $g$ nicht identisch Null, dann ist $f/g$ meromorph in $p$.

**Beispiel 1.15**
Sei $f$ eine komplex-wertige Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ definiert auf einer Umgebung von $\infty$. Dann ist $f$ genau dann meromorph in $\infty$, wenn $f(1/z)$ meromorph in $z = 0$ ist. Insebsondere, ist jede rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ meromorph in $\infty$; in der Tat ist jede rationale Funktion meromorph auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel.

**Beispiel 1.16**
Seien $f$ und $g$ holomorphe Funktionen auf einer Riemannschen Fläche $X$ in $p$. Dann ist $f/g$ eine meromorphe Funktion in $p$, falls $g$ nicht identisch Null in einer Umgebung von $p$ ist. In der Tat ist jede Funktion $h$, welche meromorph in einem Punkt $p \in X$ ist, lokal der Quotient von zwei holomorphen Funktionen.

**Beispiel 1.17**
Betrachte die projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ mit homogenen Koordinaten $[z : w]$. Seien $p(z, w)$ und $q(z, w)$ zwei homogene Polynome des selben Grades (wobei $q$ nicht identisch Null ist). Dann ist $f([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ eine wohldefinierte meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$.

**Beispiel 1.18**
Betrachten wir den komplexen Torus $\mathbb{C}/L$, mit Quotientenkarte $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$. Sei $f : W \to \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{C}/L$. Dann ist $f$ genau dann meromorph in einem Punkt $p \in W$, wenn ein Urbild $z$ von $p$ in $\mathbb{C}$ existiert, so dass $f \circ \pi$ meromorph in $z$ ist. Zudem ist $f$ genau dann meromorph auf $W$, wenn $f \circ \pi$ meromorph auf $\pi^{-1}(W)$ ist. Nun ist $g = f \circ \pi$ immer $L$-periodisch, also gilt $g(z + w) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und jedes $w \in L$,womit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine elliptische Funktion ist (*siehe Vortrag über die Liouville'schen Sätze*).

**Definition 1.19**
Wenn $W \subset X$ eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche $X$ ist, bezeichnen wir die Menge der meromorphen Funktionen auf $W$ mit $\mathcal{M}_X(W)$ (oder einfach $\mathcal{M}(W)$):

$$\mathcal{M}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} | f \text{ ist meromorph}\}$$

## Ordnung einer meromorphen Funktion in einem Punkt

**Definition 1.20**
Sei $f$ eine meromorphe Funktion in $p$, deren Laurent-Reihe in einer lokalen Koordinate $z$ sei $\sum_n c_n(z - z_o)^n$. Die Ordnung von $f$ in $p$, bezeichnet mit $ord_p(f)$, ist der kleinste Exponent der Laurent-Reihe dessen Koeffizient von Null verschieden ist:

$$ord_p(f) = min\{n | c_n \neq 0\}$$

Wir müssen zeigen, dass $ord_p(f)$ wohldefiniert und unabhängig von der Wahl lokaler Koordinaten, welche die Laurent-Reihe definieren, ist.
Angenommen $\psi : U' \to V'$ sei eine weitere Karte mit $p \in U'$, und seien lokale Koordinaten $w = \psi(x)$ für $x$ nahe $p$ gegeben. Sei weiter $\psi(p) = w_o$.
Betrachte den holomorphen Kartenübergang $T(w) = \phi \circ \psi^{-1}(w)$, welcher $z$ als eine holomorphe Abbildung von $w$ beschreibt. Da $T$ invertierbar in $w_0$ ist, gilt $T'(w_0) \neq 0$ (Kap. 1 Lemma 1.7).
Beschreiben wir die Potenzreihe für $T$, erhalten wir daher

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n(w - w_0)^n \quad \text{mit } a_1 \neq 0.$$

Nehme nun an, dass $c_{n_0}(z - z_0)^{n_0}$+(Terme höherer Ordnung) die Laurent-Reihe für $f$ in $p$ in Bezug zu den Koordinaten von $z$ ist, mit $c_{n_0} \neq 0$, so dass die Ordnung von $f$ sich zu $n_0$ via $z$ berechnet.
Um die Laurent-Reihe in Bezug zu $w$ zu erhalten, verknüpfen wir die obige Laurent-Reihe mit dem Ausdruck der obigen Potenzreihe $z - z_0 = \sum_{n \geq 1} a_n(w - w_0)^n$. Wir sehen sofort, das der Term der kleinst möglichen Ordnung in $w - w_0$

$$c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0}$$

ist.
Da weder $c_{n_0} = 0$ noch $a_1 = 0$, existiert der Term und die Ordnung von $f$ in Bezug auf $w$ ist auch $n_0$. Damit ist die Ordnung von $f$ in $p$ wohldefiniert.

**Bemerkung**
Wir sagen $f$ hat eine Nullstelle der Ordnung $n$ in $p$ wenn $ord_p(f) = n \geq 1$. Wir sagen $f$ hat einen Pol der Ordnung $n$ in $p$ wenn $ord_p(f) = -n < 0$.

**Beispiel 1.21**
Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine von Null verschiedene rationale Funktion von $z$, betrachtet als meromorphe Funktion auf der Riemannschen Sphäre wie in *Beispiel 1.18.* Wir können $p$ und $q$ faktorisieren und schreiben $f$ eindeutig als

$$f(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i},$$

wobei $c \neq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $e_i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $ord_{z=\lambda_i}(f) = e_i$ für jedes $i$. Weiter ist $ord_\infty(f) = deg(q) - deg(p) = -\sum_i e_i$. Letztlich ist $ord_x(f) = 0$ außer falls $x = \infty$ oder $x$ einer der Punkte $z = \lambda_i$ ist. Beachte

$$\sum_{x \in X} ord_x(f) = 0,$$

was, wie wir sehen werden, ein allgemeines Phänomen für meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen ist.

## 2 Beispiele meromorpher Funktionen

### Meromorphe Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel

**Theorem 2.1**
Jede meromorphe Funktion auf einer Riemannschen Zahlenkugel ist eine rationale Funktion.

**Beweis**
Sei $f$ eine meromorphe Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$. Da $\mathbb{C}_\infty$ kompakt ist, hat $f$ endlich viele Nullstellen und Pole. Sei $\{\lambda_i\}$ die Menge der Nullstellen und Pole von $f$ in der endlichen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und sei $ord_{z=\lambda_i}(f) = e_i$. Betrachte die rationale Funktion

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i},$$

welche die selben Nullstellen und Pole der selben Ordnung in der endlichen Ebene wie $f$ hat (*siehe Beispiel 1.30*). Sei $g(z) = \frac{f}{r(z)}$; g ist meromorph auf $\mathbb{C}_\infty$, ohne Nullstellen und Polen in der endlichen Ebene. Damit ist sie als Funktion auf $\mathbb{C}$ überall holomorph und hat eine Taylor-Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

welche auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Nun ist $g$ auch meromorph in $z = \infty$; mit den Koordinaten $w = \frac{1}{z}$ in $\infty$, erhalten wir

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$$

und somit ist sie meromorph in $w = 0$, womit $g$ nur endlich viele Terme hat, also ist $g$ ein Polynom in $z$. Wenn das Polynom $g$ nicht konstant ist, dann hat es eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, was ein Widerspruch ist. Damit ist $\frac{f}{r}$ konstant und $f$ ist eine rationale Funktion.

□

**Korollar 2.2**
Sei $f$ eine meromorphe Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel. Dann ist

$$\sum_p ord_p(f) = 0.$$

**Beweis**
Im *Beispiel 1.30* haben wir diese Aussage für rationale Funktionen gezeigt. Da eine meromorphe Abbildung auf $\mathbb{C}_\infty$ nach dem obigen Theorem eine rationale Funktion ist, ist die Behauptung gezeigt.

□

### Meromorphe Funktionen auf der Projektiven Gerade

Sei $\mathbb{P}^1$ die Projektive Gerade. In *Beispiel 1.20* haben wir behauptet, dass der Quotient von homogenen Polynomen des gleichen Grades eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ definiert. Wir werden nun dieses Beispiel detailierter betrachten.
Dafür bemerken wir, dass wir $\mathbb{P}^1$ als Quotientenraum

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

betrachten können wobei $\lambda \in \mathbb{C}^*$ auf einen von Null verschiedenen Vektor $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ wirkt, indem er diesen auf $(\lambda z, \lambda w)$ abbildet. Der Orbit von $(z, w)$ ist genau der Punkt $[z : w] \in \mathbb{P}^1$. Um Funktionen auf $\mathbb{P}^1$ zu konstruieren, definieren wir Funktionen auf $\mathbb{C}^2$, welche invariant unter $\mathbb{C}^*$. Eine solche Funktion steigt auf den Quotientenraum $\mathbb{P}^1$ ab, und wir können diese am Ende auf Meromorphie überprüfen. Eine solche Funktion bildet $(z, w)$ auf $z/w$ ab.
Ein Polynom $p(z, w)$ heißt homogen, wenn jeder seine Terme vom gleichen Grad ist; dieser Grad ist der Grad von $p$. Demnach kann ein homogenes Polynom von Grad $d$ eindeutig geschrieben werden als

$$p(z, w) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i w^{d-i}.$$

Wenn $p(z, w)$ ein homogenes Polynom vom Grad $d$ ist, dann gilt $p(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d p(z, w)$. Damit ist $p$ nicht invariant unter $\mathbb{C}^*$. Wenn $p(z, w)$ und $q(z, w)$ zwei homogene Polynome des gleichen Grades sind, mit $q$ nicht identisch Null, dann ist ihr Quotient $r(z, w) = p(z, w)/q(z, w)$ invariant unter $\mathbb{C}^*$. Betrachte die Funktion $u = z/w$, welche $\mathbb{C}^*$- invariant ist. Sei $r(u)$ eine rationale Funktion von $u$, dann ist auch $r$ $\mathbb{C}^*$- invariant. Wenn wir den Zähler und Nenner von $r$ mit dem entsprechenden Exponenten von $w$ multiplizieren, erhalten wir einen Quotienten von homogenen Polynomen des selben Grades.

**Lemma 2.3**
Wenn $p(z, w)$ und $q(z, w)$ homogen sind und vom selben Grad, mit $q$ nicht identisch Null, dann bildet $r(z, w) = p(z, w)/q(z, w)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$.

**Beweis**
Sei $\phi : \{w \neq 0\} \to \mathbb{C}$ eine von zwei Standardkarten auf $\mathbb{P}^1$, so dass $\phi([z : w]) = z/w$. Dabei gilt $\phi^{-1}(u) = [u : 1]$. Um zu zeigen, dass $r([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ meromorph auf $\{w \neq 0\}$ ist, müssen wir nachweisen, dass $r \circ \phi^{-1}$ meormorph auf $\mathbb{C}$ ist. Nun ist

$$r(\phi^{-1}(u)) = r([u : 1]) = p(u, 1)/q(u, 1)$$

eine rationale Funktion von $u$ und daher meromorph. Die analoge Komposition für die andere Karte, welche $[z : w]$ auf $w/z$ abbildet, vollendet die Komposition.

$\square$

Jedes homogene Polynom mit positivem Grad in $z, w$ lässt sich in lineare Faktoren zerlegen; homogene Polynome in zwei Variablen verhalten sich wie ein gewöhnliches Polynom in einer Variablen. Daher kann der Quotient von homogenen Polynomen des selben Grades ausgedrückt werden durch

$$r(z, w) = \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i},$$

wobei wir annehmen können, dass die verschiedenen Faktoren teilerfremd sind. Es is klar, dass mit dieser Notation $ord_{[a_i:b_i]}(r) = e_i$ gilt, wenn wir $r$ als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ betrachten. Damit ist das folgende analoge Theorem zu *2.1* einfach einzusehen.

**Theorem 2.4**
Jede Meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ ist ein Quotient homogener Polynome des selben Grades in $z, w$.

**Beweis**
Sei $f$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$, welche nicht identisch Null ist. Da $\mathbb{P}^1$ kompakt ist, besitzt $f$ endlich viele Nullstellen und Pole, welche wir durch $\{[a_i : b_i]\}$ bezeichnen.
Angenommen $ord_{[a_i:b_i]}(f) = e_i$, und betrachte den Quotient

$$r(z,w) = w^n \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i},$$

wobei $n$ lediglich gewählt wird damit $r$ ein Quotient von homogenen Polynomen des selben Grades $n = -\sum_i e_i$ ist. Der Quotient $g = f/r$ besitzt weder Nullstellen noch Polstellen, ausgenommen möglicher Weise beim Punkt $[1 : 0]$ wo $w = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass $g$ konstant ist.
Wenn $g$ einen Pol bei $[1 : 0]$ besitzt, dann besitzt $1/g$ keinen Pol, da $g$ keine Nullstellen hat. Damit ist $1/g$ konstant, da $\mathbb{P}^1$ kompakt ist; jedoch besitzt $1/g$ eine Nullstelle bei $[1 : 0]$, was zum Widerspruch führt, da $1/g = r/f$ nicht identisch Null ist.
Somit können wir annehmen, dass $g$ keinen Pol bei $[1 : 0]$ besitzt. Also ist $g$ auf ganz $\mathbb{P}^1$ holomorph und demnach konstant, da $\mathbb{P}^1$ kompakt ist.

$\square$

Da $r$ ein Quotient von Polynomen des gleichen Grades ist, gilt für $r(z,w) = \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i}$, dass $\sum_i e_i = 0$. Womit wir einsehen, dass für rationale Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\sum ord_p(r) = 0$ gilt. Nach dem obigem Theorem ist jede meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ von dieser Form. Daher erhalten wir:
**Korollar 2.5**
Sei $f$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$. Dann ist

$$\sum_p ord_p(f) = 0.$$

# 3 Holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen

## Definition einer holomorphen Abbildung

**Definition 3.1**
Seien $X$ und $Y$ Riemannsche Flächen. Eine Abbildung $F : X \to Y$ ist genau dann holomorph in $p \in X$, wenn Karten $\phi_1 : U_1 \to V_1$ auf $X$ mit $p \in U_1$ und $\phi_2 : U_2 \to V_2$ auf $Y$ mit $F(p) \in U_2$ existieren, so dass $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorph in $\phi_1(p)$ ist. Ist $F$ auf einer offenen Menge $W \subset X$ definiert, dann heißt $F$ holomorph auf $W$, wenn $F$ holomorph in jedem Punkt von $W$ ist. Also ist $F$ genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn $F$ holomorph auf ganz $X$ ist.

**Beispiel 3.2**
Die identische Abbildung $id : X \to X$ ist holomorph für jede Riemannsche Fläche.

**Lemma 3.3**
Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Riemannschen Flächen.

a) $F$ ist genau dann holomorph, wenn jedes Paar von Karten $\phi_1 : U_1 \to V_1$ auf $X$ mit $p \in U_1$ und $\phi_2 : U_2 \to V_2$ auf $Y$ mit $F(p) \in U_2$ die Komposition $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorph in $\phi_1(p)$ ist.

b) $F$ ist genau dann holomorph auf $W$, wenn zwei Atlanten $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \to V_1^{(i)}\}$ auf $X$ mit $W \subset \bigcup_i U_1^{(i)}$ und $\{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \to V_2^{(j)}\}$ auf $Y$ mit $F(W) \subset \bigcup_j U_2^{(j)}$ existieren, so dass $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1}$ holomorph für alle $i$ und $j$ ist.

**Beispiel 3.4**
Ist $Y$ die komplexe Ebene $\mathbb{C}$, dann ist eine holomorphe Funktion auf $X$ eine holomorphe Abbildung $F : X \to Y$.

**Lemma 3.5**

a) Ist $F$ holomorph, dann ist $F$ stetig und $C^\infty$.

b) Die Komposition holomorpher Abbildungen ist holomorph: Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ holomorphe Abbildungen, dann ist auch $G \circ F : X \to Z$ eine holomorphe Abbildung.

c) Die Komposition von einer holomorphen Abbildung mit einer holomorphen Funktion ist holomorph: Ist $F : X \to Y$ holomorph und $g$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $W \subset Y$, dann ist $g \circ F$ eine holomorphe Funktion auf $F^{-1}(W)$.

d) Die Komposition von einer holomorphen Abbildung mit einer meromorphen Funktion ist meromorph: Ist $F : X \to Y$ holomorph und $g$ eine meromorphe Funktion auf einer offenen Menge $W \subset Y$, dann ist $g \circ F$ eine meromorphe Funktion auf $F^{-1}(W)$. (Wobei das Bild $F(X)$ keine Teilmenge der Menge von Polen von $g$ sein darf.)

## Isomorphismen und Automorphismen

**Definition 3.6**
Ein Isomorphismus zwischen Riemannschen Flächen ist eine bijektive holomorphe Abbildung $F : X \to Y$. Ein Isomorphismus $F : X \to X$ heißt Automorphismus von $X$. Existiert ein Isomorphismus zwischen $X$ und $Y$, heißen $X$ und $Y$ isomorph zueinander.

**Lemma 3.7**
Die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ und die Projektive Linie $\mathbb{P}^1$ sind isomorph.

**Beweis**
Sei $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}_\infty$ eine Abbildung, definiert durch

$$f([z : w]) := \left( \frac{z\overline{w} + w\overline{z}}{|z|^2 + |w|^2}, i \cdot \frac{\overline{z}w - \overline{w}z}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right) \in S^2.$$

Wir wollen zeigen, dass $f$ ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{C}_\infty$ ist. Dafür betrachten wir Karten

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3} \text{ bzw. } \psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 + x_3} - i\frac{x_2}{1 + x_3}$$

von $S^2$ und Karten

$$\phi_1([z : w]) = w/z \text{ bzw. } \phi_2([z : w]) = z/w$$

von $\mathbb{P}^1$. Zunächst müssen wir zeigen, dass $f$ wohldefiniert ist, also dass $f([z:w]) \in S^2\ \forall [z:w] \in \mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned}
|f([z:w])| =& \left(\frac{z\overline{w}+w\overline{z}}{|z|^2+|w|^2}\right)^2 + \left(i\cdot\frac{\overline{z}w-\overline{w}z}{|z|^2+|w|^2}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2}\right)^2 \\
=& \frac{4(Re(z\overline{w}))^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} - \frac{4(Im(\overline{z}w))^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} + \frac{|z|^4-2|z|^2|w|^2+|w|^4}{(|z|^2+|w|^2)^2} \\
=& \frac{4(Re(z\overline{w}))^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} + \frac{4(Im(z\overline{w}))^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} + \frac{|z|^4-2|z\overline{w}|^2+|w|^4}{(|z|^2+|w|^2)^2} \\
=& \frac{4|z\overline{w}|^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} + \frac{|z|^4-2|z\overline{w}|^2+|w|^4}{(|z|^2+|w|^2)^2} \\
=& \frac{|z|^4+2|z\overline{w}|^2+|w|^4}{(|z|^2+|w|^2)^2} \\
=& \frac{(|z|^2+|w|^2)^2}{(|z|^2+|w|^2)^2} \\
=& 1
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$f([z:w]) = (0,0,1) \Leftrightarrow w = 0 \Leftrightarrow [z:w] = [1:0].$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ f)([z:1]) =& \varphi\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, i\cdot\frac{\overline{z}-z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\
=& \frac{\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} + i\cdot\frac{i\cdot\frac{\overline{z}-z}{|z|^2+1}}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} \\
=& \frac{\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}}{\frac{2}{|z|^2+1}} - \frac{\frac{\overline{z}-z}{|z|^2+1}}{\frac{2}{|z|^2+1}} \\
=& \frac{z+\overline{z}}{2} - \frac{\overline{z}-z}{2} \\
=& z
\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass $f$ injektiv ist. Mit dem selben Argument sehen wir aber ein, dass $f$ surjektiv ist, womit $f$ also bijektiv und stetig ist. Um einzusehen, dass $f$ holomorph ist, untersucht man die Abbildungen

$$\varphi\circ f\circ\phi_1^{-1},\ \varphi\circ f\circ\phi_2^{-1},\ \psi\circ f\circ\phi_1^{-1},\ \psi\circ f\circ\phi_2^{-1}$$

auf Holomorphie:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U_\psi) =& \{[z:w] : |z|^2+|w|^2 \neq |z|^2-|z|^2\} \\
=& \{[z:w] \neq 0\} \\
=& U_1
\end{aligned}$$

dann ist $\phi_2(f^{-1}(U_\psi)\cap U_2) = \mathbb{C}^*$ und es ergibt sich, dass $\psi\circ f\circ\phi_2^{-1}(z) = 1/z$. In allen 4 Fällen erhält man holomorphe Funktionen $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, was bedeutet, dass $f$ holomorph ist. Wegen $f$ stetig und bijektiv ist auch $f^{-1}$ holomorph.

□

### Theoreme über holomorphe Abbildungen

Viele Theoreme über holomorphe Abbildungen folgen direkt aus Theoremen über holomorphe Funktionen. Wir wollen einige davon hier aufführen.

**Proposition 3.8** (Theorem über offene Abbildungen)
Sei $F : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Dann ist $F$ eine offene Abbildung.

**Proposition 3.9**
Sei $F : X \to Y$ eine injektive holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Dann ist $F$ ein Isomorphismus zwischen $X$ und ihrem Bild $F(X)$.

**Proposition 3.10** (Identitätssatz)
Seien $F$ und $G$ zwei holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen $X$ und $Y$. Wenn $F = G$ auf einer Teimenge $S$ von $X$ mit Häufungspunkt in $X$, dann ist $F = G$.

**Beweis**
Sei $p \in X$ ein Häufungspunkt von $S$. Da $F$ und $G$ stetig sind, gilt $F(p) = G(p) \Rightarrow p \in S$. $S$ enthält also alle seine Häufungspunkte und ist damit abgeschlossen. Sei $\phi : U_1 \to V_1$ eine Karte mit $p \in U$ und $\psi : U_2 \to V_2$ eine Karte mit $F(p) \in U_2$. Dann sind $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ und $\psi \circ G \circ \phi^{-1}$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Teilmenge in $\mathbb{C}$. Sie stimmen auf $\phi(S \cap U_1)$ überein, und diese Menge hat in $V_1$ einen Häufungspunkt, nämlich $\phi(p)$. Nach dem Identitätssatz der Funktionentheorie sind die zwei Funktionen auf $V_1$ identisch, also gilt auch $F|_{U_1} = G|_{U_1}$. Jeder Punkt $p \in S$ hat also eine offene Umgebung $U_1 \subset S$, folglich ist $S$ offen; $S$ ist aber auch abgeschlossen, und da $X$ zusammenhängend ist, folgt $S = X \Rightarrow F = G$.

$\square$

**Proposition 3.11**
Sei $X$ eine kompakte Riemannsche Fläche und sei $F : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung. Dann ist $Y$ kompakt und $F$ ist surjektiv.

**Beweis**
Da $F$ holomorph ist und $X$ in sich selbst offen, ist $F(X)$ offen in $Y$ nach dem Theorem über offene Abbildungen. Andererseits, da $X$ kompakt ist, ist $F(X)$ kompakt und da $Y$ Hausdorffsch ist, muss $F(X)$ abgeschlossen in $Y$ sein. Damit ist $F(X)$ offen und abgeschlossen in $Y$ und da $Y$ zusammenhängendist, ist $F(X)$ ganz $Y$. Womit $F$ surjektiv ist und $Y$ kompakt.

$\square$

**Proposition 3.12**
Sei $F : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Dann ist für jedes $y \in Y$ das Urbild $F^{-1}(y)$ eine diskrete Teilmenge von $X$. Sind $X$ und $Y$ kompakt, dann ist $F^{-1}(y)$ eine nichtleere endliche Menge für alle $y \in Y$.

**Beweis**
Fixiere eine lokale Koordinate $z$ zentriert bei $y \in Y$, und wähle für einen Punkt $x \in F^{-1}(y)$ eine lokale Koordinate $w$ bei $x$. Dann ist die Abbildung $F$, ausgedrückt durch die lokalen Koordinaten, eine nichtkonstante holomorphe Funktion $z = g(w)$; außerdem besitzt $g$ eine Nullstelle in ihrem Urbild, da $x$ (welche $w = 0$ ist) abbildet auf $y$ (welche $z = 0$ ist). Da Nullstellen von nichtkonstanten holomorphen Funktionen diskret sind, ist $x$ in einer geeigneten Umgebung das einzige Urbild von $y$. Dies beweißt das $F^{-1}(y)$ eine diskrete Teilmenge von $X$

ist. Die zweite Aussage folgt, da $F$ surjektiv sein muss (Proposition 3.11) und diskrete Teilmengen von kompakten Räumen endlich sind.

$\square$

### Meromorphe Funktionen als holomorphe Abbildungen mit Werten in $\mathbb{C}_\infty$

**Satz 3.13**
Seien $X$ eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$. Für jeden Pol $p$ von $f$ setzen wir

$$f(p) := \infty \in \mathbb{C}_\infty.$$

Dann wird $f$ zu einer holomorphen Abbildung

$$f : X \to \mathbb{C}_\infty.$$

Ist umgekehrt $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ eine holomorphe Abbildung, dann ist $f$ entweder konstant gleich $\infty$ oder die Menge $f^{-1}(\infty)$ besteht nur aus isolierten Punkten und die Einschränkung von $f$ auf das Komplement dieser Menge ist eine meromorphe Funktion

$$X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$$

von $X$.

**Bemerkung**
Im folgenden werden wir zwischen meromorphen Funktionen auf $X$ und holomorphen Abbildungen $X \to \mathbb{C}_\infty$ keinen Unterschied machen.

**Beweis**
Sei $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ die oben beschriebene Fortsetzung einer meromorphen Funktion von $X$, und sei $p \in X$ ein Pol dieser meromorphen Funktion. Wir haben zu zeigen, dass $f$ holomorph in einer Umgebung von $p$ ist. Wir wählen eine Karte $\phi_1 : U_1 \to V$ von $X$ mit $p \in U_1$ und $\phi_1(p) = 0$. Entwickeln wir nun die Laurent-Reihe von $f$ in einer Umgebung von $p$ erhalten wir

$$f(\phi_1^{-1}(z)) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \frac{1}{z^k}(c_{-k} + c_{-k+1}z + c_{-k+2}z^2 + ...) = \frac{g(z)}{z^k},$$

wobei wir $c_{-k} \neq 0$ annehmen können, d.h. $g(z) = c_{-k} + c_{-k+1}z + c_{-k+2}z^2 + ...$ ist eine in einer Umgebung von $p$ holomorphe Funktion, die in $p$ keine Nullstelle hat. Dann ist aber auch das Inverse $h(z) := 1/g(z)$ holomorph in einer Umgebung von $p$. Indem wir $U_1$ bei Bedarf verkleinern, können wir annehmen, dass $h$ holomorph auf $U_1$ ist. Sei jetzt $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi_2(z) = 1/z$ und $\phi_2(\infty) = 0$ die Karte der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$, welche den Fernpunkt enthält. Dann gilt

$$(\phi_2 \circ f)(z) = \frac{z^k}{g(z)} = z^k \cdot h(z),$$

d.h $\phi_2 \circ f : U_1 \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion. Dann ist aber $f$ in einer Umgebung von $p$ eine holomorphe Abbildung.
Wir haben gezeigt, dass sich jede meromorphe Funktion auf $X$ zu einer holomorphen Abbildung mit Werten in der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ fortsetzen lässt.
Sei jetzt umgekehrt $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ eine holomorphe Abbildung. Falls die Menge $f^{-1}(\infty)$ einen Häufungspunkt enthält, stimmt $f$ nach dem *Identitätssatz 3.10* mit der konstanten Funktion

$f : X \to \mathbb{C}_\infty$ mit $f(x) = \infty$ überein. Andernfalls besteht $f^{-1}(\infty)$ aus isolierten Punkten, ist also eine abgeschlossene Menge. Nun ist die Einschränkung $X \setminus f^{-1}(\infty) \to C_\infty$ der holomorphen Abbildung $f$ eine holomorphe Abbildung, deren Werte von $\infty$ verschieden sind, also in $\mathbb{C}$ liegen. Mit anderen Worten, ist dies eine meromorphe Funktion mit der Polmenge $f^{-1}(\infty)$.

□

## Meromorphe Funktionen auf dem komplexen Torus

**Lemma 3.14**
Sei $f$ ein beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf dem komplexen Torus $X = \mathbb{C}/L$. Dann gilt

$$\sum_p ord_p(f) = 0.$$

**Beweis**
Folgt direkt aus dem *"Dritten Liouville'schen Satz"* (siehe Vortrag *"Die Liouville'schen Sätze"*).

□

## Hyperelliptische Flächen

Sei $h(x)$ ein Polynom in einer komplexen Variablen vom Grad $2g + 1 + \epsilon$, wobei $\epsilon$ gleich 1 oder 0 ist. Weiter nehmen wir an, dass $h(x)$ einfache Nullstellen besitzt. Wir definieren eine glatte affine ebene Kurve $X := \{(x, y)|y^2 = h(x)\}$. Sei $U = \{(x, y) \in X|x \neq 0\}$, dann is $U$ eine offene Teilmenge von $X$.
Sei $k(z) := z^{2g+2}h(1/z)$. $k(z)$ is ein Polynom in $z$ mit einfachen Nullstellen, da $h$ einfache Nullstellen besitzt. Nun definiere eine weitere glatte affine ebene Kurve $Y := \{(z, w)|w^2 = k(z)\}$ und betrachte die offene Teilmenge $V = \{(z, w) \in Y|z \neq 0\}$. Wir definieren noch den Isomorphismus $\phi : U \to V$ durch

$$\phi(x, y) = (z, w) = (1/x, y/x^{g+1}).$$

Sei $Z$ eine Riemannsche Fläche, welche wir durch Kleben von $U$ und $V$ via $\phi$ erhalten.

**Lemma 3.15** (ohne Beweis)
Mit der obigen Konstruktion ist $Z$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g$. Die meromorphe Funktion $x$ auf $X$ steigt zu einer holomorphen Abbildungen $\pi : Z \to \mathbb{C}_\infty$ vom Grad 2 auf. Die Verzweigung von $\pi$ sind die Wurzeln von $h$ (und der Punkt $\infty$ falls $h$ ungerades Grades ist).

**Definition 3.16**
Eine solch konstruierte Riemannsche Fläche heißt hyperelliptische Fläche.

**Bemerkung**
Jede Hyperelliptische Fläche $Z$ definiert durch $y^2 = h(x)$ besitzt einen Automorphimus $\sigma : Z \to Z$,

$$\sigma(x, y) = (x, -y).$$

$\sigma$ ist eine Involution, d.h. es gilt $\sigma \circ \sigma = id$. Diese Involution nennt man hyperelliptische Involution auf $X$. Sie kommunitiert mit der Abbildung $\pi : X \to \mathbb{C}_\infty$ in dem Sinne, dass $\pi \circ \sigma = \pi$.

## Quellenverzeichnis

Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, 1995. ISBN: 978-0821802687