

Der kleine Satz von Picard und seine Anwendungen

Jens Ole Hein

16. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Kleiner Picardscher Satz	2
1.1	Eine äquivalente Aussage	2
1.2	Kleiner Picardscher Satz über meromorphe Funktionen	2
2	Darstellung von Funktionen die zwei Werte auslassen	3
2.1	Lemma	3
2.2	Satz	3
3	Beweis des kleinen Picardschen Satzes	4
3.1	Anmerkung	4
4	Ein paar Anwendungsbeispiele	5
4.1	Behauptung	5
4.2	Behauptung	5
4.3	Behauptung	6
4.4	Ausblick	6
5	Zwei Anwendungen	7
5.1	Fixpunktsatz	7
5.2	Behauptung	7
5.3	Behauptung	8
5.4	Satz	8
5.5	Ausblick	8
5.5.1	Bemerkung 1	8
5.5.2	Bemerkung 2	9

Der Vortrag folgt dem Buch: R. Remmert, "Funktionentheorie 2", §10.2, S.231-235.

Nicht konstante Polynome nehmen jede komplexe Zahl als Funktionswert an. Bei nicht konstanten ganzen Funktionen können Werte ausgelassen werden, z.B. nimmt die Exponentialfunktion nie den Wert Null an.

1 Kleiner Picardscher Satz

Jede nicht konstante ganze Funktion lässt höchstens eine komplexe Zahl als Wert aus.

Diese Aussage ist äquivalent zu folgender Aussage

1.1 Eine äquivalente Aussage

Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, es gelte $0 \notin f(\mathbb{C})$ und $1 \notin f(\mathbb{C})$. Dann ist f konstant.

Beweis:

Nimmt ein $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ die Werte a und b nicht an mit $a \neq b$, so lässt $\frac{h(z)-a}{b-a} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ die Werte 0 und 1 aus, ist daher konstant und somit ist auch h konstant.

□

Meromorphe Funktionen können zwei Werte auslassen; z.B. nimmt $\frac{1}{1+e^z}$ weder 0 noch 1 als Wert an.

1.2 Kleiner Picardscher Satz über meromorphe Funktionen

Jede Funktion $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, die drei verschiedene Werte $a, b, c \in \mathbb{C}$ auslässt, ist konstant.

Beweis:

Betrachten wir die ganze Funktion $\frac{1}{h-a}$, so lässt diese $\frac{1}{b-a}$ und $\frac{1}{c-a}$ als Funktionswerte aus.

□

In den nächsten Abschnitten erbringen wir den Landau-Königschen Beweis des kleinen Satzes von Picard.

2 Darstellung von Funktionen die zwei Werte auslassen

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so besitzen die Einheiten aus $\mathcal{O}(G)$ Logarithmen und Quadratwurzeln in $\mathcal{O}(G)$. Hieraus erhalten wir folgendes Lemma:

2.1 Lemma

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und sei $f \in \mathcal{O}(G)$ so beschaffen, dass $1 \notin f(G)$ und $-1 \notin f(G)$. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{O}(G)$, so dass gilt

$$f = \cos F$$

Beweis:

$1 - f^2$ ist nullstellenfrei in G , somit gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass $(f + ig)(f - ig) = f^2 + g^2 = 1$. Damit ist $f + ig$ nullstellenfrei in G , folglich ist $f + ig = e^{iF}$ mit $F \in \mathcal{O}(G)$. Daraus folgt $f - ig = e^{-iF}$ und damit $f = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = \cos F$. □

Dieses Lemma hilft uns nun beim Beweis des nächsten Satzes.

2.2 Satz

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ so beschaffen, dass $0 \notin f(G)$ und $1 \notin f(G)$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass gilt:

$$f = \frac{1}{2}[1 + \cos \pi(\cos \pi g)] \quad (1)$$

Ist $g \in \mathcal{O}(G)$ irgendeine Funktion, für die (1) gilt, so enthält $g(G)$ keine Scheiben vom Radius 1.

Beweis:

a) Die Funktion $2f - 1$ nimmt weder 1 noch -1 an. Mit dem Lemma 3.1 erhalten wir $2f - 1 = \cos \pi F$ mit $F \in \mathcal{O}(G)$. Da F alle ganzzahligen Werte auslässt existiert $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $F = \cos \pi g$.

b) Sei $A := \{m \pm i\pi^{-1} \log(n + \sqrt{n^2 - 1}), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, wir zeigen zunächst $g(G) \cap A = \emptyset$. Dafür sei $a := p \pm i\pi^{-1} \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \in A$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es gilt: $\cos \pi a = \frac{1}{2}(-1)^p[(q + \sqrt{q^2 - 1})^{-1} + (q + \sqrt{q^2 - 1})] = (-1)^p q$ und daher ist $\cos \pi(\cos \pi a) = \pm 1$. Da $0, 1 \in f(G)$ erhalten wir $g(G) \cap A = \emptyset$. Die Punkte von A sind die Eckpunkte eines "Rechtecknetzes" in $\mathbb{C}$. Die "Länge" eines jeden Rechtecks beträgt 1. Aus der Monotonie von $\log x$ folgt

$$\begin{aligned} \log(n + 1 + \sqrt{(n + 1)^2 - 1}) - \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) &= \log \frac{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\ &\leq \log(1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}) \leq \log(2 + \sqrt{3}) < \pi. \end{aligned}$$

Daher ist die "Höhe" jedes Rechtecks < 1 . Folglich finden wir zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $a \in A$ mit $|\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}$, d.h. $|a - z| < 1$. Somit trifft jede Scheibe vom Radius 1 die Menge A . Aus $g(G) \cap A = \emptyset$ folgt, dass $g(G)$ keine Scheiben vom Radius 1 enthält. □

Alternativ zu (1) kann man die Landausche Gleichung $f = -\exp[\pi i \cosh(2g)]$ benutzen. Die Darstellung mittels der iterierten Cosinusfunktion scheint natürlicher und geht auf Heinz König zurück.

3 Beweis des kleinen Picardschen Satzes

Beweis:

Nach dem Satz 2.2 gilt $f = \frac{1}{2}[1 + \cos \pi(\cos \pi a)]$ mit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $g(\mathbb{C})$ enthält keine Kreisscheibe vom Radius 1. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Bloch (*"Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht konstant, so enthält $f(\mathbb{C})$ Scheiben von jedem Radius"*) ist g konstant und somit auch f .

□

3.1 Anmerkung

Folgende Aussage ist äquivalent zum kleinen Satz von Picard:

Es seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, es gelte $1 = e^f + e^g$. Dann sind f und g konstant.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Es gelte der kleine Satz von Picard.

Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $1 = e^f + e^g$. Da $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ folgt $e^f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

$$1 = e^f + e^g$$

$$\Rightarrow e^f = 1 - e^g \neq 1$$

Weiter ist $e^f \neq 0$ und somit nach dem kleinen Satz von Picard konstant. Somit ist f konstant und daher auch g .

" $\Leftarrow$ " Gelte $1 = e^f + e^g \Rightarrow f, g$ sind konstant.

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $0, 1 \notin f(\mathbb{C})$.

Daher existieren $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $1 - f = e^g$ und $f = e^h$. Es gilt:

$$e^g + e^h = 1 - f + f = 1$$

Daher sind g und h konstant und somit auch f .

□

4 Ein paar Anwendungsbeispiele

Es seien $f, g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

4.1 Behauptung

Falls $h = e^f + e^g$, so ist h entweder nullstellenfrei in $\mathbb{C}$, oder h hat unendliche viele Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Beweis:

Sei $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit einer Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, es gilt

$$h = e^f + e^g$$

$$\Leftrightarrow e^{-f}h = 1 + e^{g-f}$$

$$\Rightarrow 0 = e^{-f(z_0)}h(z_0) = 1 + e^{(g-f)(z_0)}$$

$$\Leftrightarrow -1 = e^{(g-f)(z_0)}$$

Aus dem kleinen Satz von Picard wissen wir, dass eine ganze Funktion entweder konstant ist oder höchstens einen Wert auslässt. Da $(g-f) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ machen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $(g-f)$ konstant

Somit ist $-1 = e^{(g-f)(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ und damit $h \equiv 0$.

Fall 2: $(g-f)$ nicht konstant

Somit nimmt $(g-f)$ höchstens einen Wert in $\mathbb{C}$ nicht an.

Daraus folgt mit $A := \{g(z_0) - f(z_0) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$, dass $(g-f)(\mathbb{C}) \cap A$ abzählbar unendlich ist, da $(g-f)$ maximal einen Wert aus A nicht annimmt. Und in den Punkten aus $(g-f)^{-1}(A)$ hat h damit eine Nullstelle, folglich also unendlich viele.

□

4.2 Behauptung

Ist h ein nicht konstantes Polynom, so nimmt he^f jeden Wert an.

Beweis:

Angenommen he^f nimmt einen Wert $a \in \mathbb{C}$ nicht an.

Fall 1: $a = 0$

Dann hat h keine Nullstelle und ist nach dem Hauptsatz der Algebra konstant.

Fall 2: $a \neq 0$

Dann hat $he^f - a \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ keine Nullstelle. Somit existiert ein $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $e^g = he^f - a$. Da $a \neq 0$ finden wir ein $c \in \mathbb{C}$ mit $e^c = a$, es gilt

$$e^g = he^f - a$$

$$\Rightarrow he^f = e^g + a = e^g + e^c$$

$$\Rightarrow h = e^{g-f} + e^{c-f}$$

Also hat h nach Behauptung 4.1 entweder keine oder unendlich viele Nullstellen. Hat h keine Nullstelle so ist h konstant, hat h unendlich viele Nullstellen so ist h ebenfalls konstant. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

□

4.3 Behauptung

Seien $h := ze^z$ und $k(z) := \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} - 1$. Dann ist $f = h \circ k$ eine lokal biholomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{C}$.

Beweis:

Wir bauen zunächst eine biholomorphe Abbildung $k: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

Hierzu bauen wir k^{-1} wie folgt:

$$k^{-1}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \xrightarrow{z+1} \mathbb{C} \setminus (-\infty, -0] \xrightarrow{z^2} \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0\} \xrightarrow{\frac{1-z}{1+z}} \mathbb{E}.$$

Also ist $k^{-1}(z) = \frac{1-(1+z)^2}{1+(1+z)^2}$ und somit $k(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} - 1$.

Betrachten wir nun $h(z) := ze^z$. Wir zeigen zunächst $h((-\infty, -1)) = h((-1, 0))$.

Es ist $h(-1) = -\frac{1}{e}$, weiter gilt $h(0) = 0$ und $\lim_{x \searrow -\infty} h(x) = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Aus $h'(z) = (1+z)e^z$ folgt, dass $h'(z)$ auf $(-\infty, -1)$ negativ und auf $(-1, 0)$ strikt positiv ist.

Da h stetig ist, folgt somit, dass $h: (-\infty, -1) \rightarrow (-\frac{1}{e}, 0)$ und $h: (-1, 0) \rightarrow (-\frac{1}{e}, 0)$ bijektiv abbildet.

Es ist also $h((-\infty, -1)) = h((-1, 0))$.

Jetzt zeigen wir $ze^z = -\frac{1}{e}$ besitzt eine Lösung $z_0 \neq 0$. Wir formen um für $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} (x + iy)e^{x+iy} &= -\frac{1}{e} \\ \Leftrightarrow (xe^x + iye^x)(\cos y + i \sin y) &= -\frac{1}{e} \\ \Leftrightarrow xe^x \cos y - ye^x \sin y &= -\frac{1}{e} \wedge ye^x \cos y + xe^x \sin y = 0 \\ \Leftrightarrow xe^x \cos y - ye^x \sin y &= -\frac{1}{e} \wedge y \cos y + x \sin y = 0 \\ \Rightarrow x &= -y \cot y \quad \text{wobei } y \notin \{\pi k: k \in \mathbb{Z}\} \\ \Rightarrow \underbrace{-y \cot(y)e^{-y \cot y} \cos y - y \sin(y)e^{-y \cot y}}_{:=f(y)} &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

f ist stetig auf $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi) \subset \mathbb{R}$.

Da $\lim_{y \nearrow 3\pi} f(y) = -\infty$ und $\lim_{y \searrow 2\pi} f(y) = 0$ gilt, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $y_0 \in (2\pi, 3\pi)$ mit $f(y_0) = -\frac{1}{e}$ gibt.

Mit $x_0 := -y_0 \cot y_0$ gilt für $z_0 := x_0 + iy_0 \neq 1$, da $y_0 \neq 0$. z_0 erfüllt die oben angegebenen Äquivalenzen und somit ist $z_0 e^{z_0} = -\frac{1}{e}$.

Wir setzen nun $f = h \circ k$, es gilt

$$f(\mathbb{E}) = h(k(\mathbb{E})) = h(\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]) = h(\mathbb{C} \setminus \{-1\}) = h(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \text{ nach Behauptung 4.2.}$$

□

4.4 Ausblick

Man kann einen "Drei-Zeilen Beweis" des kleinen Picardschen Satzes geben, wenn man weiß, dass es eine holomorphe Überlagerung $u: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gibt (Uniformisierung). Nach einem allgemeinen Prinzip der Topologie lässt sich jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f = u \circ \tilde{f}$ "liften". Nach Liouville ist $\tilde{f}$ konstant und somit auch f .

Ein weiterer Beweis ist mit Hilfe der Theorie der Brownschen Bewegung möglich (vgl. *R. Durrett: Brownian Motion and Martingales in Analysis*).

5 Zwei Anwendungen

Im Allgemeinen haben holomorphe Abbildungen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ keine Fixpunkte, z.B. $f(z) = z + e^z$. Es gilt aber der:

5.1 Fixpunktsatz

Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat $f \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stets einen Fixpunkt, es sei denn, f ist eine Translation $z \mapsto z + b, b \neq 0$.

Beweis:

Es sei $f \circ f$ fixpunktfrei. Somit hat auch f keinen Fixpunkt, folglich ist $g(z) := \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Diese Funktion wird nie Null, da $f \circ f$ keinen Fixpunkt hat.

Auch wird sie nie 1, denn:

Angenommen es existiert ein z_0 mit $\frac{f(f(z_0)) - z_0}{f(z_0) - z_0} = 1$, dann ist $f(f(z_0)) - z_0 = f(z_0) - z_0$ und somit $f(f(z_0)) = f(z_0)$. Daher ist $f(z_0)$ ein Fixpunkt von f , was ein Widerspruch ist.

Somit existiert nach dem kleinen Satz von Picard ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ mit

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Durch Differentiation erhalten wir $f'(z)[f'(f(z)) - c] = 1 - c$.

Da $c \neq 1$ ist, hat f' keine Nullstellen und $f'(f(z))$ kein c -Stellen. Somit lässt $f' \circ f$ die Werte 0 und $c \neq 0$ aus; daher ist $f' \circ f$ nach Picard konstant. Es folgt $f' = \text{const.}$, also $f(z) = az + b$. Da f keinen Fixpunkt besitzt gilt $a = 1$ (sonst wäre $z = \frac{b}{1-a}$ Fixpunkt) und $b \neq 0$ (sonst wäre 0 Fixpunkt).

□

5.2 Behauptung

Jede ganze periodische Funktion hat einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ periodisch, d.h. $\exists z_0 \in \mathbb{C}^* \forall z \in \mathbb{C}: f(z + z_0) = f(z)$.

Angenommen f besitzt keinen Fixpunkt

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: f(z) - z \neq 0$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: f(z + z_0) - (z + z_0) + z_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: f(z + z_0) - (z + z_0) \neq -z_0$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: f(z) - z \neq -z_0$$

Also ist $h(z) := f(z) - z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und lässt zwei Werte aus. Nach Picard ist h konstant und somit ist $f(z) = z + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$.

Das ist ein Widerspruch zur Periodizität von f .

□

5.3 Behauptung

Die ganzen Funktion $f := \cos(h), g := \sin(h), h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ erfüllen die Gleichung $f^2 + g^2 = 1$. Dies sind alle Lösungen der Gleichung $(f + ig)(f - ig) = 1$.

Beweis:

Aus $(f + ig)(f - ig) = 1$ folgt, dass $(f + ig)$ nullstellenfrei ist. Wir finden also ein $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $(f + ig) = e^{ih}$. Folglich ist $(f - ig) = e^{-ih}$. Es folgt

$$f = \frac{1}{2}(f + ig + f - ig) = \frac{1}{2}(e^{ih} + e^{-ih}) = \cos(h)$$

$$g = \frac{1}{2i}(f + ig - f - ig) = \frac{1}{2i}(e^{ih} - e^{-ih}) = \sin(h)$$

□

Es stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit der Fermat-Gleichung $X^n + Y^n = 1, n \geq 3$, durch in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen.

5.4 Satz

Es seien $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, und es gelte $f^n + g^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dann sind f und g konstant, oder sie haben gemeinsame Polstellen.

Beweis:

Sei $P(f) \cap P(g) = \emptyset$. Aus $f^n + g^n = 1$ folgt $P(f) = P(g)$, also $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Sei $g \neq 0$. Wegen $N(f) \cap N(g) = \emptyset$, hat $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ in $z \in \mathbb{C}$ genau dann den Wert $a \in \mathbb{C}$, wenn $f(z) = ag(z)$. Aus der Faktorisierung

$$1 = \prod_{v=1}^n (f - \zeta_v g), \quad \zeta_1 \dots \zeta_n \text{ die } n \text{ Wurzeln von } X^n + 1,$$

folgt nun, dass $\frac{f}{g}$ keinen der n verschiedenen Werte $\zeta_1 \dots \zeta_n$ annimmt. Wegen $n \geq 3$ ist nach Picard $f = cg$ mit einer Konstante $c \neq \zeta_1 \dots \zeta_n$. Somit gilt $(c^n + 1)g^n = 1$. Folglich ist g konstant und damit auch f .

□

5.5 Ausblick

5.5.1 Bemerkung 1

Die eben bewiesene Aussage ist ein Beispiel für Sätze folgenden Typs. Man betrachtet Polynome $F(z_1, z_2)$ von zwei Variablen, etwa $z_1^n - z_2^n - 1$, und betrachtet ihre Nullstellenmenge X in $\mathbb{C}^2$. Es gilt:

Ist der Einheitskreis $\mathbb{E}$ die universelle Überlagerung der "projektiven Kurve" $\overline{X}$, so gibt es keine nichtkonstanten Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $F(f, g) = 0$.

Erfüllt sind die Voraussetzungen genau dann, wenn die Kurve $\overline{X}$ ein Geschlecht $g > 1$ hat; für die Fermat-Kurven $z_1^n + z_2^n - 1$ gilt $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

5.5.2 Bemerkung 2

Es gibt nichtkonstante Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit gemeinsamen Polen, so dass $f^3 + g^3 = 1$. $X^3 + Y^3 = 1$ beschreibt nämlich eine affine elliptische Kurve in $\mathbb{C}^2$, die universelle Überlagerung der projektiven Kurve ist $\mathbb{C}$, und die Projektion von $\mathbb{C}$ auf die Kurve bestimmt solche Funktionen f, g . Mithilfe der Weierstraßschen $\wp$ -Funktion kann man diese explizit angeben.

Der Ansatz $(a + b\wp')^3 + (a - b\wp')^3 = \wp^3$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$

führt wegen der Differentialgleichung $\wp'^2 = 4\wp - g_2 - g_3$ sofort zu $24ab^2 = 1, g_2 = 0, 8a^3 = g_3$.

Nun ist wohlbekannt, dass zum "Dreiecksgitter" $\{m + ne^{\frac{2\pi i}{3}} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ der Wert $g_2 = 0$ gehört

(und $g_3 = \pm \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^{18}}{(2\pi)^6}$). Wählt man zu diesem Gitter die $\wp$ -Funktion, so gilt $f^3 + g^3 = 1$ für

$f := \frac{a+b\wp'}{\wp}, g := \frac{a-b\wp'}{\wp}$ mit $a := \frac{1}{2} \sqrt[3]{g_3}, b := \frac{1}{\sqrt{24a}}$.