

Seminar zur Funktionentheorie: Das Abel'sche Theorem

Torben Albers

4.12.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Satz: Das Abel'sche Theorem	1
3	Beweis des Abel'schen Theorems	2
3.1	Hinrichtung	2
3.2	Hilfssatz	3
3.3	Beweis des Hilfssatzes	4
3.4	Beweis des Hilfssatzes nach Weierstraß	6
3.5	Rückrichtung	9
4	Bemerkung	9
5	Anhang	9
5.1	Zur Thetareihe	9
5.2	Zum Beweis des Hilfssatzes nach Weierstraß	10

1 Einleitung

Dieser Vortrag behandelt das Abel'sche Theorem. Der Vortrag folgt dem Kapitel 5 § 6 aus dem Buch Funktionentheorie 1 von Freitag, Busam, S. 298 - 306.

Das Ziel ist es, Voraussetzungen zu bestimmen unter denen zu einem vorgegebenen Gitter L und zu vorgegebenen Nullstellen a_1, \dots, a_n sowie Polstellen b_1, \dots, b_m eine elliptische Funktion f zum Gitter L existiert, die genau in den Punkten $a_1, \dots, a_n \pmod L$ Nullstellen und genau in den Punkten $b_1, \dots, b_m \pmod L$ Polstellen hat.

Hierbei wollen wir voraussetzen, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \cap \{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$ gilt. Allerdings wollen wir zulassen, dass Punkte a_i (bzw. b_i) mehrfach vorkommen. Dies interpretieren wir dann als entsprechende mehrfache Nullstelle (bzw. Polstelle).

2 Satz: Das Abel'sche Theorem

Eine elliptische Funktion zu vorgegebenen Nullstellen a_1, \dots, a_n und Polstellen b_1, \dots, b_m existiert genau dann, wenn $m=n$ und die Abel'sche Relation

$$\boxed{a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_m \pmod L}$$

gilt.

3 Beweis des Abel'schen Theorems

3.1 Hinrichtung

Laut dem dritten Liouville'schen Satz gilt $m=n$.

Wir beweisen diese Richtung indirekt.

Sei L ein Gitter und f eine elliptische Funktion zum Gitter L mit Nullstellen a_1, \dots, a_n und Polstellen b_1, \dots, b_n .

Da es nur endlich viele Polstellen und Nullstellen in jeder Masche des Gitters gibt, finden wir ein α , sodass

$$F_\alpha := \{z = \alpha + t_1 * \omega_1 + t_2 * \omega_2; 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$$

denn Nullpunkt nicht enthält und der Rand von F_α keine Null- oder Polstellen enthält (Die Wahl folgt analog zur Wahl des Gitters im Beweis des zweiten Liouville'schen Satzes). Da wir in der Abel'schen Relation die Punkte a_j und $b_j \pmod L$ verändern können, ohne etwas an der Bedingung zu ändern, können wir o. B. d. A. die Punkte a_j und b_j so wählen, dass Folgendes gilt:

$$a_j, b_j \in \text{Int}(F_\alpha)$$

$$\text{Sei } g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} z$$

Nun betrachten wir das folgende Integral:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F_\alpha} g(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F_\alpha} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \zeta d\zeta$$

Da der Nullpunkt in F_α nicht enthalten ist, folgt, dass die Nullstellen und die Polstellen von f genau die Polstellen von g sind und für das Integral I Folgendes gilt, laut Residuensatz und 3. Rechenregel für Residuen:

Sei N_f die Nullstellenmenge von f ohne Vielfachheiten.

Sei P_f die Polstellenmenge von f ohne Vielfachheiten.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F_\alpha} g(\zeta) d\zeta = \sum_{a \in N} \text{Res}(g, a) + \sum_{b \in P} \text{Res}(g, b) = a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - b_n$$

Es gilt Folgendes:

$$\int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} g(\zeta) d\zeta = - \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} g(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} -g(\zeta + \omega_2) d\zeta$$

Außerdem gilt:

$$g(z) - g(z + \omega_2) = \frac{f'(z)}{f(z)} z - \frac{f'(z + \omega_2)}{f(z + \omega_2)} (z + \omega_2) = \frac{f'(z)}{f(z)} z - \frac{f'(z)}{f(z)} (z + \omega_2) = -\omega_2 * \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Zusammen ergibt sich:

$$\int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} g(\zeta) d\zeta + \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} g(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} g(\zeta) - g(\zeta + \omega_2) d\zeta = -\omega_2 * \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

Vertauschen wir ω_1 und ω_2 und gehen analog vor, so erhalten wir:

$$\int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_1} g(\zeta) d\zeta + \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} g(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} g(\zeta) - g(\zeta + \omega_1) d\zeta = -\omega_1 * \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

Insgesamt gilt somit:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F_\alpha} g(\zeta) d\zeta = \frac{\omega_1}{2\pi i} * \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \frac{\omega_2}{2\pi i} * \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

Sei $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$

Entsprechend unserer Wahl von F_α hat f auf der Verbindungsstrecke zwischen α und $\alpha + \omega$ keine Pol- oder Nullstelle. Da die Nullstellen und die Polstellen Mengen von f laut Annahme diskret sind, existiert ein Elementargebiet M , so dass die Verbindungsstrecke zwischen α und $\alpha + \omega$ in M enthalten ist und f auf M keine Pol- oder Nullstellen hat. Somit finden wir eine analytische Funktion h auf M mit folgender Eigenschaft:

$$f(z) = e^{h(z)}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z) * e^{h(z)}}{e^{h(z)}} = h'(z)$$

Also ist h auf M Stammfunktion von $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Für unser Integral erhalten wir somit:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{f'(z)}{f(z)} d\zeta = h(\alpha + \omega) - h(\alpha)$$

Außerdem folgt aus $f(z) = e^{h(z)}$:

$$e^{h(\alpha+\omega)} = f(\alpha + \omega) = f(\alpha) = e^{h(\alpha)}$$

Somit kann der Unterschied zwischen $h(\alpha + \omega)$ und $h(\alpha)$ nur ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein. Daraus folgt, dass I in L liegen muss. Also ist die Abel'sche Relation erfüllt. \square

3.2 Hilfssatz

Behauptung: Es existiert zu gegebenem Gitter $L \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion

$$\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1.) $\sigma(z + \omega) = e^{az+b}\sigma(z)$, $\omega \in L$. Dabei sind a , b gewisse komplexe Zahlen, welche von ω abhängen dürfen ($a = a_\omega$, $b = b_\omega$), nicht aber von z .
- 2.) σ hat eine Nullstelle z_0 erster Ordnung, und jede andere Nullstelle von σ ist modulo L mit z_0 äquivalent.

3.3 Beweis des Hilfssatzes

Damit der Beweis nachher einfacher wird, verändern wir zuerst unser Gitter.

Sei $\tau = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (Das Vorzeichen wählen wir so, dass $Im(\tau)$ positiv ist.)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine elliptische Funktion zum Gitter L . Dann ist $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(\omega_2 z)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $L_1 := \{m + n\tau; m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Also können wir o. B. d. A. folgendes annehmen:

$$\boxed{\omega_1 = 1 \text{ und } \omega_2 = \tau, \text{ Im}\tau > 0}$$

Nun betrachten wir die Thetareihe als Funktion von z zu einem festem τ :

$$\boxed{\vartheta(\tau, z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2 \tau + 2nz)}$$

Zuerst wollen wir zeigen, dass die Thetareihe für unser τ und $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Sei $n \in \mathbb{Z}$

$$\exists u, v \in \mathbb{R} : \tau = u + v * i$$

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + y * i$$

Wobei $0 < v$ gilt, da τ nach Konstruktion in der oberen Halbebene liegt.

$$|e^{\pi i(n^2 \tau + 2nz)}| = e^{-\pi(n^2 v + 2ny)}$$

Sei K eine kompakte Menge und $z \in K$

Dann gibt es ein $r > 0$ mit $K \subset B(0, r)$. Damit folgt für $z = x + y * i$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geq \frac{4r}{v}$:

$$|n| \geq \frac{4r}{v} \geq \frac{4|y|}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 v = \frac{1}{2}|n|^2 v \geq \frac{1}{2}|n|v * \frac{4|y|}{v} \geq 2|ny|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 v = n^2 v - \frac{1}{2}n^2 v \leq n^2 v - 2|ny| \leq n^2 v + 2ny$$

Somit gilt die folgende Ungleichung für $z \in K$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{Z}$ nicht.

$$\frac{1}{2}n^2 v \leq n^2 v + 2ny$$

$$\text{Sei } q := e^{-\frac{\pi}{2}v}$$

Wegen $0 < v$, gilt $q = e^{-\frac{\pi}{2}v} < 1$.

Also konvergieren die beiden folgenden geometrischen Reihen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{(-n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$$

Also konvergiert auch die folgende Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(-n)^2}$$

Somit konvergiert auch die Thetareihe $\vartheta(\tau, z)$ lokal gleichmäßig. Also ist $\vartheta(\tau, z)$, laut Satz von Weierstraß eine analytische Funktion.

Nun wollen wir die Transformationseigenschaft beweisen.

1) Wegen $e^{2\pi i * n} = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\vartheta(\tau, z + 1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2n(z+1))} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)} * e^{2\pi i * n} = \vartheta(\tau, z)$$

2) Aus 1) folgt offenbar:

$$\vartheta(\tau, z) = \vartheta(\tau, (z - 1) + 1) = \vartheta(\tau, (z - 1))$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\pi i(n^2\tau + 2n(z + \tau)) = \pi i(n^2\tau + 2n\tau + 1^2\tau - 1^2\tau + 2nz) = \pi i((n + 1)^2\tau + 2nz) - \pi i\tau$$

Somit erhalten wir:

$$\vartheta(\tau, z + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2n(z+\tau))} = e^{-\pi i\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i((n+1)^2\tau + 2nz)}$$

Genauso wie n durchläuft auch $n+1$ alle ganzen Zahlen, also gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i((n+1)^2\tau + 2nz)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2(n-1)z)} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\vartheta(\tau, z + \tau) = e^{-\pi i\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i((n+1)^2\tau + 2nz)} = e^{-2\pi iz - \pi i\tau} \vartheta(\tau, z) = e^{-\pi i(\tau + 2z)} \vartheta(\tau, z)$$

Aus 1) und 2) erhalten wir iterativ, dass folgendes gilt:

Ist $\omega = n + m * \tau \in L$ und $z \in \mathbb{C}$, so gilt mit $\alpha_\omega := -2\pi im$ und $\beta_\omega := -2\pi i\tau m$, dass

$$\vartheta(\tau, z + \omega) = e^{-\pi i * m * (\tau + 2z)} \vartheta(\tau, z) = e^{\alpha_\omega z + \beta_\omega} \vartheta(\tau, z)$$

Somit erfüllt $\vartheta(\tau, \cdot)$ die erste Bedingung an σ .

Jetzt wollen wir zeigen, dass $\vartheta(\tau, z)$ genau eine Nullstelle $z_0 \pmod L$ hat.

Wir wissen, dass $\vartheta(\tau, z)$ nicht die Nullfunktion ist (siehe Anhang), also ist die Nullstellenmenge von $\vartheta(\tau, z)$ diskret. Somit ist die Menge der Nullstellen von $\vartheta(\tau, z)$ auf einer einzelnen kompakten Grundmasche endlich. Somit finden wir eine verschobene Grundmasche $M_\beta := \{z = \beta + t_1 + t_2 * \tau; 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$, deren Rand keine Nullstelle von $\vartheta(\tau, z)$ enthält.

$$\text{Sei } g(z) = \frac{\vartheta'(\tau, z)}{\vartheta(\tau, z)}$$

Somit gilt, laut Transformationsregel 2) der $\vartheta(\tau, z)$ Funktion und der Produktregel:

$$g(z + \tau) = \frac{\vartheta'(\tau, z + \tau)}{\vartheta(\tau, z + \tau)} = \frac{e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta'(\tau, z) - 2\pi i * e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta(\tau, z)}{e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta(\tau, z)} = -2\pi i + \frac{\vartheta'(\tau, z)}{\vartheta(\tau, z)}$$

Daraus folgt:

$$g(z) - g(z + \tau) = \frac{\vartheta'(\tau, z)}{\vartheta(\tau, z)} - \frac{\vartheta'(\tau, z)}{\vartheta(\tau, z)} - (-2\pi i) = 2\pi i$$

Wie schon im ersten Teil des Beweises des Abel'schen Theorems betrachten wir nun wieder Integrale.

$$\int_{\beta+1+\tau}^{\beta+\tau} g(\zeta) d\zeta = - \int_{\beta+\tau}^{\beta+1+\tau} g(\zeta) d\zeta = \int_{\beta}^{\beta+1} -g(\zeta + \tau) d\zeta$$

Somit erhalten wir:

$$\int_{\beta+1+\tau}^{\beta+\tau} g(\zeta) d\zeta + \int_{\beta}^{\beta+1} g(\zeta) d\zeta = \int_{\beta}^{\beta+1} g(\zeta) - g(\zeta + \tau) d\zeta = 2\pi i$$

Laut Transformationsregel 1) für $\vartheta(\tau, z)$ gilt:

$$\int_{\beta+1}^{\beta+1+\tau} g(\zeta) d\zeta + \int_{\beta+\tau}^{\beta} g(\zeta) d\zeta = \int_{\beta}^{\beta+\tau} g(\zeta + 1) d\zeta - \int_{\beta}^{\beta+\tau} g(\zeta) d\zeta = 0$$

Insgesamt folgt:

$$\int_{\partial M_{\beta}} g(\zeta) d\zeta = \int_{\beta}^{\beta+1} g(\zeta) d\zeta + \int_{\beta+1}^{\beta+1+\tau} g(\zeta) d\zeta + \int_{\beta+1+\tau}^{\beta+\tau} g(\zeta) d\zeta + \int_{\beta+\tau}^{\beta} g(\zeta) d\zeta = 0 + 2\pi i$$

$$\iff \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M_{\beta}} g(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} * 2\pi i = 1$$

Da $\vartheta(\tau, z)$, wie wir bereits gezeigt haben, auf ganz \mathbb{C} analytisch ist, kann $\vartheta(\tau, z)$ keine Polstellen haben. Somit folgt aus dem Prinzip vom Argument, dass $\vartheta(\tau, z)$ auf M_{β} genau ein Nullstelle besitzt, denn ∂M_{β} enthält keine Nullstellen von $\vartheta(\tau, z)$:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M_{\beta}} g(\zeta) d\zeta = \sum_{a \in \text{Int}(M)_{\beta}: f(a)=0} w(\partial M_{\beta}, a) * m_a = \sum_{a \in \text{Int}(M)_{\beta}: f(a)=0} m_a$$

(Wobei m_a die Ordnung der Nullstelle a ist und $w(\partial M_{\beta}, a)$ die Windungszahl ist.)

Also muss $\vartheta(\tau, z)$ auf M_{β} genau eine Nullstelle und diese Nullstelle muss die Ordnung 1 haben. Demnach ist auch die zweite Bedingung des Hilfssatzes und somit der Hilfssatz bewiesen. \square

3.4 Beweis des Hilfssatzes nach Weierstraß

Wir wollen nun noch einen alternativen Beweis des Hilfssatzes besprechen. Dieser folgt dem Kapitel 5 § 6 aus dem Buch Funktionentheorie 1 von Freitag, Busam, S. 302 - 304.

$$\text{Sei } \sigma(z) = z * \prod_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right)$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass $\sigma(z)$ auf ganz \mathbb{C} definiert und holomorph ist.

$$\text{Sei } f(z) = 1 - \left(\left(1 - z\right) * \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) \right)$$

$$f'(z) = z^2 * \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$$

$$f''(z) = z^2 * (1 + z) * \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) + 2 * z * \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) = (z^3 + z^2 + 2 * z) * \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(0) = f'(0) = f(0) = 0$$

Somit ergibt sich Folgendes für die Taylorentwicklung von f im Punkt 0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * (z - 0)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * (z)^n$$

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt.

Aus der Definition von unserem Gitter L folgt, dass dieses keine Häufungspunkte hat.

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall \omega \in L \setminus \{0\} : |\omega| > \delta$$

Also finden wir eine Konstante $C_K > 0$, sodass für alle $z \in K$ und für alle $\omega \in L \setminus \{0\}$ folgendes gilt.

$$|\omega^3| * \left| f\left(\frac{z}{\omega}\right) \right| = |\omega^3| * \left| f\left(\frac{z}{\omega}\right) \right| = |\omega^3| * \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * \left(\frac{z}{\omega}\right)^n = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+3)}(0)}{(n+3)!} * \left(\frac{z^{(n+3)}}{\omega^n}\right) \right| < C_K$$

Somit erhalten wir:

$$\left| f\left(\frac{z}{\omega}\right) \right| < \frac{C_K}{|\omega^{-3}|}$$

Man kann zeigen, dass die folgende Reihe konvergiert (siehe Anhang oder Lemma 2 Kapitel 1 aus dem Vortrag über die Weierstraßsche \wp Funktion).

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|^{-3}$$

Somit konvergiert auch die folgende Reihe für alle $z \in K$ und für alle $\omega \in L \setminus \{0\}$.

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left| f\left(\frac{z}{\omega}\right) \right| = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left| 1 - \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right|$$

Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass das bedeutet, dass das folgende Produkt absolut konvergiert.

$$\prod_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right)$$

Daraus, dass dies für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{C}$ gilt, folgt, dass unser Produkt $\sigma(z)$ auf \mathbb{C} lokal gleichmäßig konvergiert. Also ist $\sigma(z)$ auf ganz \mathbb{C} definiert und holomorph.

Da die Exponentialfunktion nicht null wird, hat $\sigma(z)$ genau in den Elementen von L Nullstellen, die von erster Ordnung sind. Also erfüllt $\sigma(z)$ den zweiten Teil der Behauptung des Hilfssatzes. Kommen wir nun zum ersten Teil der Behauptung des Hilfssatzes.

$\sigma(z)$ und $\sigma(z + \omega)$ haben die gleichen Nullstellen. Also ist $\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}$ auf ganz \mathbb{C} holomorph und ohne Nullstellen. Somit existiert eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion $h(z)$ mit

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(z + \omega)}{\sigma(z)} &= e^{h(z)} \\ \Rightarrow \sigma(z + \omega) &= e^{h(z)} * \sigma(z)\end{aligned}$$

Wir haben den zweiten Teil der Behauptung bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass $h(z)$ ein Polynom ersten Grades ist. Dies wollen wir beweisen, indem wir $h''(z) = 0$ zeigen.

Zuerst überlegen wir uns, dass Folgendes für alle $z \in \mathbb{C} \setminus L$ und für alle $\omega \in L$ gilt.

$$\begin{aligned}h'(z) * e^{h(z)} &= (e^{h(z)})' = \left(\frac{\sigma(z + \omega)}{\sigma(z)}\right)' = \frac{\sigma'(z + \omega) * \sigma(z) - \sigma(z + \omega) * \sigma'(z)}{\sigma(z)^2} \\ &= \left(\frac{\sigma'(z + \omega)}{\sigma(z + \omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right) * e^{h(z)} \\ \Rightarrow h'(z) &= \left(\frac{\sigma'(z + \omega)}{\sigma(z + \omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right) \\ \Rightarrow h''(z) &= \left(\frac{\sigma'(z + \omega)}{\sigma(z + \omega)}\right)' - \left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right)'\end{aligned}$$

Nun wollen wir beweisen, dass $\left(\frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)}\right)'$ eine elliptische Funktion zum Gitter L ist.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus L : \forall \omega \in L \setminus \{0\} : \frac{\left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right)'}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)} = \frac{-\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{z}{\omega}} + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

Sei $E \subset L \setminus \{0\}$ eine endliche Teilmenge. Dann erhalten wir mit Hilfe der Produktregel, dass Folgendes gilt:

$$\frac{\left(z * \prod_{\omega \in E} \left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right)\right)'}{z * \prod_{\omega \in E} \left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) * \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in E} \left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{z}{\omega}} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \{E \cup \{0\}\}$$

Laut dem Satz von Weierstraß konvergieren, wenn eine Folge von holomorphen Funktionen f_n lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert, auch die Ableitung von den f_n lokal gleichmäßig gegen die Ableitung von f . Somit ergibt sich in unserem Fall mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{z}{\omega}} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus L \text{ sonst } \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \infty$$

Nun wenden wir den Satz von Weierstraß auf die Reihe an und erhalten:

$$\left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right)' = -\frac{1}{z^2} - \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus L \text{ sonst } \left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right)' = \infty$$

Also folgt $\left(\frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)}\right)' = -\wp(z)$ wobei mit $\wp(z)$ die Weierstraß'sche \wp Funktion gemeint ist.

Wir wissen, dass $\wp(z)$ eine elliptische Funktion ist. Also gilt Folgendes:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus L : \forall \omega \in L : \left(\frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)} \right)' = -\wp(z) = -\wp(z + \omega) = \left(\frac{\sigma(z + \omega)'}{\sigma(z + \omega)} \right)' \text{ d. h.}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus L : \forall \omega \in L : h''(z) = \left(\frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)} \right)' - \left(\frac{\sigma(z + \omega)'}{\sigma(z + \omega)} \right)' = 0$$

Daraus folgt aber, wie oben beschrieben, dass σ die Transformationseigenschaft besitzt. Also ist auch der zweite Teil der Behauptung des Hilfssatzes bewiesen. \square

3.5 Rückrichtung

Wir wählen σ entsprechend des Hilfssatzes.

Da wir die Punkte aus der Abel'schen Relation durch mod L äquivalente Punkte ersetzen können, können wir o. B. d. A. annehmen, dass $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ gilt.

$$\text{Sei } f(z) := \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z_0 + z - a_k)}{\prod_{i=1}^n \sigma(z_0 + z - b_i)}$$

Aufgrund der zweiten Bedingung aus dem Hilfssatz hat f das gewünschte Null- und Polstellenverhalten. Nun wollen wir zeigen, dass f elliptisch ist.

Sei $\omega \in L$

Aufgrund der ersten Bedingung aus dem Hilfssatz gilt folgendes:

$$f(z + \omega) = \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z_0 + z + \omega - a_k)}{\prod_{i=1}^n \sigma(z_0 + z + \omega - b_i)} = \frac{\prod_{k=1}^n e^{a(z_0 + z - a_k) + b} \sigma(z_0 + z - a_k)}{\prod_{i=1}^n e^{a(z_0 + z - b_i) + b} \sigma(z_0 + z - b_i)}$$

Nun verwenden wir, dass $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ gilt:

$$\frac{\prod_{k=1}^n e^{a(z_0 + z - a_k) + b}}{\prod_{i=1}^n e^{a(z_0 + z - b_i) + b}} = \frac{\prod_{k=1}^n e^{a(z_0 + z) + b}}{\prod_{i=1}^n e^{a(z_0 + z) + b}} \frac{\prod_{j=1}^n e^{-a * a_j}}{\prod_{l=1}^n e^{-a * b_l}} = \exp(a * (\sum_{j=1}^n -a_j + \sum_{l=1}^n b_l)) = e^0 = 1$$

Insgesamt erhalten wir somit Folgendes:

$$f(z + \omega) = \frac{\prod_{k=1}^n e^{a(z_0 + z - a_k) + b} \sigma(z_0 + z - a_k)}{\prod_{i=1}^n e^{a(z_0 + z - b_i) + b} \sigma(z_0 + z - b_i)} = 1 * f(z) = f(z)$$

Also ist f auch eine elliptische Funktion. Somit ist die Behauptung bewiesen. \square

4 Bemerkung

Der Quotient zweier elliptischer Funktionen mit den gleichen Null- und Polstellen ist holomorph auf \mathbb{C} und eine elliptische Funktion. Also hat der Quotient keine Polstellen. Als elliptische Funktion ist der Quotient somit, laut dem erstem Liouville'schen Satz konstant. Also unterscheiden sich die elliptischen Funktionen, die wir aus dem Theorem erhalten, höchstens um einen konstanten Faktor.

5 Anhang

5.1 Zur Thetareihe

Wir wollen nun zeigen, dass die Thetareihe nicht die Nullfunktion ist.

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \vartheta(\tau, z)$

Sei $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) = e^{2\pi iz}$

Also ist h holomorph.

Sei $U := \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

Offenbar bildet h die Menge U biholomorph auf $h(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab.

Da f , wie wir bereits gezeigt haben, 1 periodisch ist, ist die folgende Funktion holomorph:

$g : h(U) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(h^{-1}(z))$

Nun wollen wir die Laurentreihe von g auf dem Kreisring $K(0, \frac{1}{2}, 2)$ betrachten:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n * z^n \text{ mit } a_n := \frac{1}{2\pi i} * \int_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{2\pi i} * \int_0^1 \frac{g(e^{2\pi it})}{(e^{2\pi it})^{n+1}} * e^{2\pi it} dt = \int_0^1 \frac{g(e^{2\pi it})}{e^{2n\pi it}} dt$$

Somit erhalten wir, wenn wir h mit h verketten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} * e^{2n\pi iz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n^2 \tau + 2nz)} = f(z) = g(h(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n * h(z)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n * e^{2n\pi iz}$$

Da die Laurentkoeffizienten, wie wir aus Funktionentheorie wissen, eindeutig sind, ergibt sich:

$$0 \neq e^{\pi i n^2 \tau} = a_n = \int_0^1 \frac{g(e^{2\pi it})}{e^{2n\pi it}} dt = \int_0^1 \frac{g(h(t))}{e^{2n\pi it}} dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{e^{2n\pi it}} dt = \int_0^1 \frac{\vartheta(\tau, t)}{e^{2n\pi it}} dt$$

Somit kann $\vartheta(\tau, z)$ nicht konstant null sein.

5.2 Zum Beweis des Hilfssatzes nach Weierstraß

Wir haben im Beweis des Hilfssatzes verwendet, dass die folgende Reihe für ein Gitter L absolut konvergiert.

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|^{-3}$$

Einen genauen Beweis, dass diese Reihe konvergiert, ist im Buch Funktionentheorie 1 von Freitag, Busam auf Seite 217 bis Seite 220 angegeben. Wir wollen nur kurz die wichtigsten Punkte festhalten.

Sei $L_k := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2; t_1, t_2 \in \mathbb{Z}, \max\{|t_1|, |t_2|\} = k\}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Diese Menge hat $8k$ Elemente.

Mit $d = \frac{1}{2} \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\}$ gilt, für alle $\omega \in L_k$: $k * d \leq |\omega|$

Somit gilt Folgendes:

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in L_k} |\omega|^{-3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in L_k} (k * d)^{-3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (8 * k * (k * d)^{-3}) = \frac{8}{d^3} * \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-2}) < \infty$$

Also konvergiert die Reihe absolut.