Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 3

1. Seien X und Y zwei Volltori $S^1 \times \overline{B^2}$, und sei $A = S^1 \times S^1 \subset X$ der Rand von X.

a) Sei $f\colon A \to Y$ die Identität auf $S^1 \times S^1$, aufgefasst als Einbettung von A nach Y. Zu welchem Raum ist die Verklebung $X \cup_f Y$ homöomorph?

b) Welchen bekannten Raum erhält man, wenn man stattdessen die Verklebung $X \cup_g Y$ entlang der Abbildung $g : A \to Y$, $g(e^{\mathbf{i}\vartheta}, e^{\mathbf{i}\varphi}) = (e^{\mathbf{i}\varphi}, e^{\mathbf{i}\vartheta})$ betrachtet?

2. a) Beschreiben Sie das Möbiusband als Quotienten einer Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$!

b) Beschreiben Sie die Kleinsche Flasche K als Quotienten bezüglich einer Wirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf dem Torus $T = S^1 \times S^1$!

3. a) Zeigen Sie: ein topologischer Raum Z ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von Z in S^0 (den diskreten Raum mit 2 Punkten) konstant ist.

b) Es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie (weg)zusammenhängender topologischer Räume. Ist das Produkt $\prod_i X_i$ (weg)zusammenhängend? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

4. Beschreiben Sie für folgende Teilräume im Raum $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ der $n \times n$-Matrizen mit reellen Koeffizienten die Zusammenhangskomponenten! Sind diese jeweils wegzusammenhängend?

a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) \neq 0\}$

b) $O(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \cdot A^T = \mathbb{1}_n\}$

c) $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A = A^T\}$

d) $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$