Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 4

1. Zeigen Sie, dass zwei disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes stets disjunkte offene Umgebungen besitzen!

2. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei

$$\operatorname{diam} S \colon = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}$$

der Durchmesser der Teilmenge S.
Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\operatorname{diam} S < \lambda$ vollständig in einer der Mengen U_i enthalten ist!
Eine solche Zahl λ heisst *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung $\mathcal{U}$.

3. Sei X ein topologischer Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum.

a) Beweisen Sie: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums $X \times Y$ ist.
Eine möglicherweise nützliche Bemerkung: $f^{-1}(V) \subset X$ *ist offen, falls jedes* $x \in f^{-1}(V)$ *eine Umgebung* $W \subset X$ *besitzt, so dass* $(W \times (Y \setminus V)) \cap G_f = \varnothing$.

b) Geben Sie Gegenbeispiele für den Fall an, dass man eine der Voraussetzungen an Y weglässt!

4. Sei X ein (nichtleerer) kompakter Hausdorff-Raum. Zeigen Sie: Ist jeder Punkt von X Häufungspunkt[1] von X, so ist X überabzählbar! Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Ist $x \in X$ und ist $U \subset X$ eine nichtleere offene Menge, so existiert eine nichtleere offene Teilmenge $V \subset U$ mit $x \notin \overline{V}$.

b) Für jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt es einen Punkt $x \in X$, der nicht im Bild liegt. (Beschreiben Sie diesen Punkt als Element eines geeigneten Durchschnitts kompakter Teilmengen von X.)

c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt der Cantor–Menge $C \subset [0,1]$ Häufungspunkt von C ist! Daraus folgt also insbesondere, dass C überabzählbar ist.

d) Beschreiben Sie eine abzählbare dichte Teilmenge von C!

Man kann zeigen, dass jeder kompakte metrische Raum X*, der jeden seiner Punkte als Häufungspunkt besitzt und dessen Zusammenhangskomponenten jeweils nur aus einem Punkt bestehen homöomorph zu* C *ist.*

[1] In einem topologischen Raum X heißt ein Punkt $x \in X$ Häufungspunkt einer Teilmenge $A \subset X$, falls jede Umgebung U von x Punkte von $A \setminus \{x\}$ enthält.