Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 5

1. Zeigen Sie, dass für einen Hausdorff-Raum X mit abzählbarer Basis folgende Aussagen äquivalent sind:

a) X ist kompakt.

b) Jede abzählbare Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

c) X ist folgenkompakt, d.h. jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

d) Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.

2. Sei $C(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y. Zu einer kompakten Menge $K \subset X$ und einer offenen Menge $O \subset Y$ definieren wir

$$U(K,O) := \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset O\}.$$

Die *kompakt–offene Topologie (KO-Topologie)* auf $C(X,Y)$ ist die von der Subbasis

$$\sigma := \{U(K,O) \mid K \subset X \text{ kompakt}, O \subset Y \text{ offen}\}$$

erzeugte Topologie. Zeigen Sie:

a) Ist Y Hausdorffsch, so ist $C(X,Y)$ in der KO-Topologie Hausdorffsch.

b) Ist X lokal kompakt und Hausdorffsch, so ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X,Y) \times X \to Y$, $\varepsilon(f,x) = f(x)$ stetig.

c) Es gilt folgendes Exponentialgesetz: Sind X und Y Hausdorffsch und ist Y lokal kompakt, so ist die kanonische Abbildung zwischen den Räumen $C(X \times Y, Z)$ und $C(X, C(Y,Z))$ ein Homöomorphismus.

3. Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $\mathcal{B}(X)$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X, d.h.

$$\mathcal{B}(X) := \{A \subset X \mid A \neq \varnothing, A = \overline{A}, \operatorname{diam} A < \infty\}.$$

a) Zeigen Sie, dass durch $\rho(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\}$ eine Metrik auf $\mathcal{B}(X)$ definiert wird!

Diese Metrik heißt *Hausdorff-Metrik* auf $\mathcal{B}(X)$. Wir betrachten nun als Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.

b) Finden Sie eine abzählbare dichte Teilmenge in $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \rho)$!

c) Erfüllt $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \rho)$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom?

d) Ist $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \rho)$ lokal–kompakt?