Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

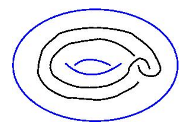
Topologie

Übungsaufgaben 9

1. Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen die Teilmenge $A \subset X$ jeweils kein Retrakt ist:

a) $X = \mathbb{R}^3$ und A ist das Bild einer beliebigen Einbettung von S^1.

b) $X = S^1 \times D^2$ und A ist der rechts schwarz gezeichnete Kreis.



c) $X = (D^2, 1) \vee (D^2, 1)$ und A ist der Rand $S^1 \vee S^1$ von X.

2. Für beliebige punktierte topologische Räume $(X_i, x_i)_{i\in I}$ ist die Einpunktvereinigung $\bigvee_{i\in I} X_i$ definiert als die Verklebung von $\sqcup_{i\in I} X_i$ mit einem Einpunktraum $Y = \{*\}$ entlang der offensichtlichen Abbildung $f : A \to Y$, wobei $A \subset \sqcup_{i\in I} X_i$ gerade die Teilmenge aller Basispunkte ist.

a) Beschreiben Sie eine Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ (Einpunktvereinigung von n Kopien von S^1) in $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: Sind $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$, so ist das Bild einer geeigneten Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ ein strenger Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

c) Gilt eine analoge Aussage im $\mathbb{R}^3$?

3. Seien U_1, U_2 und U_3 beschränkte offene Mengen in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es eine (affine) Ebene gibt, welche alle drei gleichzeitig in jeweils zwei Hälften gleichen Volumens zerlegt!
Hinweis: Man kann eine orientierte affine Ebene in $\mathbb{R}^3$ eindeutig als

$$E = E(\lambda, x) = \{\lambda x + z \mid z \in \mathbb{R}^3, z \perp x\}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in S^2$ beschreiben (x ist der orientierte Normalenvektor und λ der signierte Abstand zum Nullpunkt). Für jede unserer offenen Mengen U_i ist das Volumen desjenigen Anteils, der im bezüglich der Ebene $E(\lambda, x)$ positiven Halbraum liegt, eine stetige Funktion von λ und x.

4. **a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht endlich ist!

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht abelsch ist!

c) Gelten diese beiden Aussagen für das freie Produkt beliebiger nichttrivialer Gruppen G_1 und G_2?

5)* Finden Sie einen injektiven Homomorphismus $F_3 \to F_2$!
(Diese Aufgabe wird später einfacher werden...)