Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17

Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben

(P2) Wir betrachten drei Teilmengen der natürlichen Zahlen:

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade } \}$,
- $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar } \}$,
- $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist kleiner als 20 } \}$.

a) Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:

- $A \cap C$
- $B \cap C$
- $(A \cap C) \setminus B$

Geben Sie jeweils auch eine Beschreibung in Worten an.

b) Sei nun $D := (A \cap C) \times (B \cap C) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wieviele Elemente enthält D?

c) Beschreiben Sie die Teilmenge

$$E := \{(a, b) \in D \mid a \text{ teilt } b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

zunächst in Worten („E enthält alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, so dass ... “), und geben Sie diese Menge dann in aufzählender Form an.

(P3) Eine *Tautologie* ist eine Aussageform über Aussagen, welche für alle Belegungen ihrer Variablen stets wahr ist. Zeigen Sie, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien sind, und geben Sie jeweils ein Beispiel für Aussagen dieser Form, entweder aus der Mathematik oder aus dem Leben.

a) $A \vee (\neg A)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)

b) $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 31.10.16, zu Beginn der Vorlesung

(A4) Lösungsmengen **(2+2+4 Punkte)**

Die *Lösungsmenge* einer Gleichung $f(x) = 0$ ist die Menge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ aller reellen Zahlen x, für die die Gleichung zu einer wahren Aussage wird. So ist zum Beispiel die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 1 = 7$ die Menge $L = \{2\}$, welche nur aus der Zahl 2 besteht.

a) Finden Sie eine möglichst einfache Gleichung in einer Variablen, deren Lösungsmenge gerade die Menge $\{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}$ ist.

b) Angenommen, wir haben allgemeiner zwei Teilmengen $M_1 \subseteq \mathbb{R}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{R}$ als Lösungsmengen der Gleichungen $f_1(x) = 0$ bzw. $f_2(x) = 0$ beschrieben. Wie kann man dann die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ als Lösungsmenge einer Gleichung beschreiben?

c) Können Sie für zwei Mengen M_1 und M_2 wie in b) auch den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ als Lösungsmenge einer Gleichung beschreiben? Erläutern Sie auch Ihren Lösungsweg.

(A5) Aussagenlogik I **(3+3 Punkte)**

a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen jeweils formal mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Symbole, und entscheiden Sie, welche dieser Aussagen wahr und welche falsch sind:

- Für jede natürliche Zahl x und jede natürliche Zahl z gibt es eine natürliche Zahl y mit $x = y + z$.
- Für jede natürliche Zahl $x > 1$ gibt es eine natürliche Zahl y und eine natürliche Zahl z, so dass $x = y + z$.
- Für jede natürliche Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y, so dass $x > y$.

b) Formulieren Sie auch die Negationen dieser Aussagen formal und in natürlicher Sprache.

(A6) Aussagenlogik II **(3+3 Punkte)**

Die folgenden Aussagen sind wichtige Tautologien, da sie jeweils Grundprinzipien für Beweismethoden liefern.

- $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$
- $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$
- $(\neg(A \implies B)) \iff (A \wedge (\neg B))$

Siehe nächstes Blatt!

Die erste Tautologie liegt dem direkten Beweis zugrunde, die zweite Tautologie begründet den Beweis durch Kontraposition, und die dritte Tautologie führt mit dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten zum Beweis durch Widerspruch.[1]

a) Formulieren Sie für jede der aussagenlogischen Formeln zunächst ein Beispiel, entweder aus der Mathematik oder aus dem täglichen Leben.

b) Zeigen Sie, dass die angegebenen Formeln tatsächlich Tautologien sind, d.h. für alle möglichen Wahrheitswerte von A, B und C wahre Aussagen liefern.

[1] Genaueres zu diesen Beweismethoden folgt demnächst in der Vorlesung, hier ist dies nur der Kontext der Aufgabe.