Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

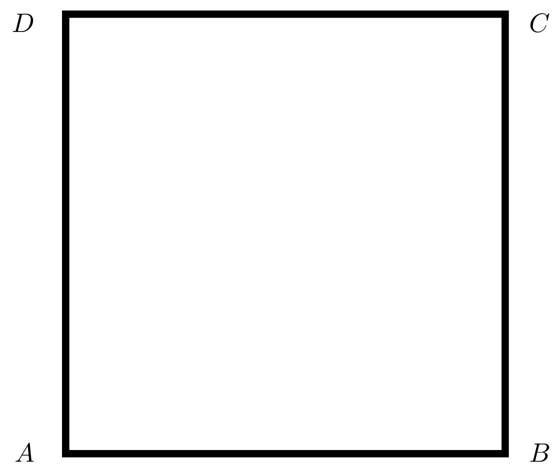
Winter 2016/17
Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 9

Präsenzaufgaben

(P16) Symmetrien des Quadrats



Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Quadrat und seine Symmetrien.

a) Beschreiben Sie alle 8 Symmetrien des Quadrats, d.h. alle Abbildungen, welche das Quadrat wieder auf sich selbst abbilden.

b) Stellen Sie eine Tabelle auf, die für jedes Paar dieser Symmetrien deren Verknüpfung (in der entsprechenden Reihenfolge) beschreibt.

c) Man kann nachprüfen, dass diese Symmetrien eine Halbgruppe bilden. Bilden sie auch eine Gruppe?

d) Ist diese Halbgruppe/Gruppe kommutativ?

(P17) Äquivalenzrelationen im Alltag

Geben Sie zwei eigene Beispiele, wie und wo Äquivalenzrelationen im Alltag vorkommen. Was ist jeweils die zugrundeliegende Menge? Wie ist die Relation definiert? Was sind die Äquivalenzklassen?

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 17.12.16, zu Beginn der Vorlesung

(A23) Bruchrechnung **(4 Punkte)**

Stimmt die folgende Aussage? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *gilt*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Hinweis: *Schreiben Sie als erstes die Bedingung* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *zu einer äquivalenten Ungleichung zwischen natürlichen Zahlen um.*

(A24) Verknüpfung von Abbildungen ist nicht kommutativ **(3 Punkte)**

Zeigen Sie an einem selbstgewählten Beispiel, dass die Halbgruppe $(\mathrm{Abb}(X, X), \circ)$ der Abbildungen $X \to X$ mit der Verknüpfung als Operation für eine Menge X mit mindestens 2 Elementen nicht kommutativ ist.

(A25) Noch eine Äquivalenzrelation **(3+2 Punkte)**

Auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ betrachten wir folgende Relation:

$$(a, b) \sim (a', b') \quad :\Longleftrightarrow \qquad a + b' = a' + b.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Relation auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von $(0, 0)$ und von $(1, 0)$.

(A26) Heiteres Zahlenraten **(2+3+3 Punkte)**

In der allerersten Vorlesung hatten wir ein Spiel wie das folgende gespielt:

- Man denke sich eine beliebige Zahl, und multipliziere diese mit 6.
- Zum Ergebnis addiere man 4.
- Dieses Ergebnis multipliziere man mit 2.
- Zu diesem Ergebnis addiere man 100.
- Das Resultat multipliziere man mit 3.
- Nun bilde man so oft die Quersumme, bis das Ergebnis einstellig ist.
- Die so erhaltene Zahl multipliziere man mit 5.
- Wenn man nun vom Ergebnis 3 subtrahiert, so erhält man 42.

a) Stellen Sie eine Formel für das Ergebnis der ersten 5 beschriebenen Schritte auf.

b) Begründen Sie, warum das Ergebnis der Rechnung immer 42 lautet, egal mit welcher Zahl man startet.

c) Beweisen Sie, dass man vor dem sechsten Schritt an beliebiger Stelle die Operation "Quersumme bilden" einfügen darf, ohne dass sich am Resultat etwas ändert.