

Seminar über Knotentheorie (Bachelor und Master)

Wintersemester 2023/24, Janko Latschev

Inhaltlich geht es um eine Einführung in die Knotentheorie, mit möglichst minimalen Voraussetzungen an topologische Vorkenntnisse. Gleichberechtigte Lernziele sind einerseits das Erlernen der mathematischen Inhalte und andererseits die zielpublikumsgerechte Präsentation des im Selbststudium angeeigneten Wissens. Wichtig für das Erreichen beider Ziele ist die **kritische Auseinandersetzung mit den mathematischen Quellen**.

Besondere Bedeutung hat natürlich auch die Vortragsplanung: was führe ich im Detail aus? was lasse ich weg? Diese Fragen können Sie erst beantworten, wenn Sie den Stoff vollständig verstanden haben. **Fangen Sie darum frühzeitig mit der Vorbereitung an!** Für Fragen stehe ich selbstverständlich zur Verfügung. Die Themen sind nicht notwendig in 90 Minuten abzuhandeln, und bei Bedarf können Vorträge über mehrere Sitzungen (oder Teile davon) verteilt werden.

Eine aktive Beteiligung an der Diskussion ist Teil der Seminarleistung. Fragen Sie, wenn Ihnen etwas unklar ist – die Chancen sind groß dass es Anderen ähnlich geht.

Vorträge

- (1) **Grundbegriffe zu Knoten** ([3, §1], [6, §2], [7, §1], [5, §1]) Definieren Sie Knoten und ihre Äquivalenz, sowie reguläre Knotendiagramme. Verallgemeinern Sie die Begriffe für Verschlingungen, und veranschaulichen Sie sie mit möglichst vielen Beispielen. Diskutieren Sie Orientierungen von Knoten und Verschlingungen.
- (2) **Erste kombinatorische Techniken** ([6, §3], [1, §1.3], [7, §1]) Erklären Sie die Reidemeister-Bewegungen, und diskutieren Sie die Aussage, dass Diagramme äquivalenter Knoten durch solche ineinander überführt werden können. Geben Sie Beispiele. Definieren Sie Färbbarkeit, diskutieren Sie Beispiele und beweisen Sie die Existenz nichttrivialer Knoten.
- (3) **Seifert-Flächen und Primzerlegung von Knoten** ([3, §2B], [6, §4.5], [5, §2]) Definieren Sie Seifert-Flächen und beweisen Sie deren Existenz. Definieren Sie das Geschlecht eines Knotens. Beschreiben Sie die zusammenhängende Summe von Knoten, formulieren Sie den Primzerlegungssatz, und geben Sie die Beweisidee. Beweisen Sie die Additivität des Geschlechts.
- (4) **Verschlingungszahlen** ([8, §5D], [6, §3.2])
Stellen Sie verschiedene Definitionen der Verschlingungszahl zweier disjunkter orientierter Knoten in S^3 (oder \mathbb{R}^3) vor und zeigen Sie deren Äquivalenz. Diskutieren Sie elementare Eigenschaften und Berechnungen in Beispielen.
- (5) **Das Jones-Polynom** ([7, §3], [5, §3]) Erläutern Sie die Konstruktion des Jones-Polynoms aus Kauffmans Klammerpolynom. Geben Sie Beispiele für die Berechnung an, und diskutieren Sie das Verhalten bei zusammenhängender Summe und disjunkter Vereinigung von Knoten.

- (6) **Alternierende Knoten** ([1, §2.2 und §6.2]) Führen Sie den Begriff des alternierenden Knotens ein und beschreiben Sie Dowkers Notation für diese. Diskutieren Sie die minimale Kreuzungszahl für alternierende Knoten.
- (7) **Das Alexander-Polynom** ([6, §3 und §6], [5, §6]) Diskutieren Sie Etikettierungen und die Determinante eines Knotens, und geben Sie Beispiele. Führen Sie das Alexander-Polynom wie in [6, §3.5] ein und berechnen Sie es für verschiedene Beispiele. Erläutern Sie die alternative Formulierung in [1, §6.3].
- (8) **Die Knotengruppe** ([6, §5], [3, §3], [8, §3B-D], [5, §11]) Erläutern Sie den Begriff der Präsentation einer Gruppe an einfachen Beispielen. Diskutieren Sie die Knotengruppe und Methoden für ihre Berechnung, insbesondere die Wirtinger-Präsentation, und illustrieren Sie diese an Beispielen.
- (9) **Zöpfe und Knoten** ([7, §5 und §6], [2, §2]) Führen Sie die Zopfgruppe(n) ein und erklären Sie, wie man aus einem Zopf eine Verschlingung erhält. Diskutieren Sie die Sätze von Alexander und Markov, und geben Sie Beispiele.
- (10) **Numerische Knoteninvarianten** ([6, §7], [1, §3]) Diskutieren Sie einige der in den Büchern vorgestellten numerischen Invarianten, und berechnen Sie diese in Beispielen. Diskutieren Sie Beziehungen zwischen den gewählten Invarianten.
- (11) **Symmetrien von Knoten** Definieren Sie Umkehrbarkeit und Chiralität von Knoten und diskutieren Sie Beispiele. Führen Sie periodische Knoten ein und diskutieren Sie notwendige Bedingungen für Periodizität. [6, §8]

References

- [1] C. C. Adams, *The Knot Book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, AMS, 1994
- [2] J. Birman, *Braids, Links and mapping class groups*, Princeton University Press, Annals of mathematics studies 82, 1975
- [3] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2. Auflage, de Gruyter, 2003
- [4] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, 1996
- [5] W. B. R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer, 1997
- [6] C. Livingston, *Knotentheorie für Einsteiger*, Vieweg, 1995
- [7] V. V. Prasolov und A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, AMS, 1997
- [8] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976, Reprint: AMS, 2003