# Übungsblatt 4

**Berechenbarkeitstheorie**
*Wintersemester 2012/13*
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 22. November 2012.

1. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$(i,j) \mapsto \frac{i^2+j^2+2ij+i+3j}{2}$$

eine Bijektion von $\mathbb{N}^2$ nach $\mathbb{N}$ ist.

2. (Für Studierende, die eine Topologievorlesung gehört haben / hören.)

Mit $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir wie bisher die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Die Funktion $d : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$d(f,g) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f = g \text{ und} \\ 2^{-n} & \text{falls } n \text{ die kleinste Zahl mit } f(n) \neq g(n) \text{ ist} \end{cases}$$

ist eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wir betrachten $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ als topologischen Raum mit der von der Metrik $d$ generierten Topologie. Sei $X_i := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ der mit der Produkttopologie versehene Raum. Zeigen Sie, daß $X$ und $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ homöomorph sind.

*Hinweis 1.* Verwenden Sie die Funktion aus der Vorlesung, die eine Funktion in unendlich viele Funktionen aufspaltet.

*Hinweis 2.* Überlegen Sie sich, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Funktion $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist stetig.

(b) Für jedes $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, so daß für jedes $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ gilt: $s \subseteq x$ impliziert $t \subseteq F(x)$.

3. Beweisen Sie, daß für jedes $i$ das modifizierte Halteproblem

$$H_i' := \{e\,;\, \varphi_e(e,i)\downarrow\}$$

nicht berechenbar ist.