Die epistemische Rolle formalisierbarer mathematischer Beweise

Formalisierbarkeitsorientierte Konzeptionen mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung innerhalb einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Bonn

vorgelegt von

Eva Müller-Hill

(geb. Wilhelmus)

aus

Köln

Bonn 2011

Gedruckt mit der Genehmigung der Philosophischen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Zusammensetzung der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Andreas Bartels
(Vorsitzender)

Prof. Dr. Rainer Stuhlmann-Laeisz
(Betreuer und Gutachter)

Prof. Dr. Benedikt Löwe
(Gutachter)

PD Dr. Thomas Müller
(weiteres prüfungsberechtigtes Mitglied)

Tag der mündlichen Prüfung: 31. 03. 2011

Für meine Eltern

und für Johannes

Danksagung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage nach der Bedeutung formalisierbarer Beweise für mathematisches Wissen und mathematische Rechtfertigung sowohl mittels philosophisch-analytischer Methoden als auch mittels Methoden der empirischen Sozialforschung. Meine hier vorgestellten Untersuchungen haben daher in besonderem Maße von dem Interesse und den Ratschlägen vieler Sachkundiger aus unterschiedlichen wissenschaftlichen Disziplinen und Forschungsbereichen profitiert.

An erster Stelle sind dabei Rainer Stuhlmann-Laeisz und Benedikt Löwe zu nennen, die mich über die gesamte Zeit meiner Promotion als Betreuer unterstützt haben.

Viele wertvolle Anregungen, methodische Hilfestellungen, Gelegenheiten zur Vorstellung und kritischen Diskussion meiner Ergebnisse und nicht zuletzt Reisemittel, die dieses Projekt praktisch erst möglich gemacht haben, wurden mir durch das DFG-Wissenschaftliche Netzwerk PhiMSAMP (*Philosophy of Mathematics – Sociological Aspects and Mathematical Practice*) und dessen Mitglieder sowie durch die externen Teilnehmer der diversen PhiMSAMP-Workshops zuteil. Vor allem den beiden Koordinatoren des Netzwerks – Benedikt Löwe und Thomas Müller – gilt hier großer Dank.

Im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes am ILLC (*Institute for Logic, Language and Computation*) an der Universiteit van Amsterdam konnte ich vor allem meine empirischen Studien in einem sehr offenen, diskussionsfreudigen und interessanten Umfeld vorantreiben. Besonders möchte ich mich hier bei Michiel van Lambalgen für fruchtbare Diskussionen und methodische Hilfestellungen bedanken. Mein Dank gilt auch dem Institut ILLC für die Organisation der notwendigen Infrastruktur für meinen Aufenthalt, sowie der Studienstiftung des Deutschen Volkes, die die nötigen finanziellen Mittel bereitgestellt hat.

Meine empirischen Untersuchungen waren außerdem auf interessierte Probanden angewiesen. Ein großer Dank gilt daher den anonymen Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Umfrage- und insbesondere der Interviewstudie. Bedanken möchte ich mich auch bei den Clusteranalyse-Experten des ZUMA (Zentrum für Umfragen, Methoden und Analysen in Mannheim), Michael Wiedenbeck und Cornelia Züll, an die ich mich mit Fragen zur Auswertung meiner quantitativen empirischen Studien wenden durfte.

Die Studienstiftung des Deutschen Volkes hat mir neben der Finanzierung meines Forschungsaufenthaltes in Amsterdam ein reguläres Promotionsstipendium mit den damit verbundenen finanziellen und ideellen Förderungen gewährt. Dafür, vor allem auch für die interessanten und sehr anregenden Doktorandenforen und -workshops, bedanke ich mich. Ebenso danke ich Thomas Grundmann und dem Philosophischen Seminar der Universität Köln, dass ich im Rahmen einer Lecturer-Stelle dort unterrichten konnte und mir dabei hinreichend Zeit und Raum für die Weiterverfolgung meines Promotionsvorhabens zur Verfügung gestellt wurden. Bedanken möchte ich mich weiterhin bei dem Seminar für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Köln, insbesondere bei Horst Struve, für die Möglichkeit, mich bereits in der Endphase meiner Dissertation in die Mathematikdidaktik einzuarbeiten und hier auch die Aufgaben einer wissenschaftlichen Mitarbeiterin wahrnehmen zu können.

Außerdem danke ich meinen Kommilitonen und Kollegen an den Universitäten Bonn, Köln und Siegen für die zahlreichen fachlichen und außerfachlichen Gespräche, die meine Promotionszeit begleitet haben, sowie für die hilfreichen Kommentare zu den unterschiedlichsten Teilen und Versionen dieser Arbeit: an erster Stelle Marius Thomann, außerdem Vera Hoffmann, Eva Nowak, Tanja Osswald, Oliver Schaudt, Steffi Schaudt, Susanne Spies, Ingo Witzke und vielen anderen.

Ganz besonders danke ich schließlich meinem Mann, Jakob Müller-Hill, für all seine Unterstützung; für unsere unzähligen Gespräche über alle Höhen und Untiefen des Doktorandenlebens, für seine (fast) unerschöpfliche Geduld bei sämtlichen meiner Mono- und unserer Dialoge zu besonders kniffligen Stellen dieser Arbeit, und auch für seine vielen konstruktiv-kritischen Anmerkungen in allen Stadien ihres Entstehensprozesses.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Formalisierbarkeit als erkenntnistheoretisches und wissenschaftsphilosophisches Problem

Es ist ein Wahn zu glauben, die Geschichte des Erkennens habe mit dem Inhalte der Wissenschaft ebensowenig zu tun wie die Geschichte etwa des Telephonapparates mit dem Inhalt der Telephongespräche: Wenigstens drei Viertel, und vielleicht die Gesamtheit alles Wissenschaftsinhaltes sind denkhistorisch, psychologisch und denksoziologisch bedingt und erklärbar. (Ludwik Fleck)[1]

Motivation der Problemstellung

Traditionell wird die Mathematik als Ausnahmedisziplin unter den Wissenschaften betrachtet. Fragt man nach den Gründen für diese Betrachtungsweise, so lautet die am stärksten etablierte Antwort: Weil die Sätze der Mathematik in der Regel streng bewiesen werden können.

Als modernes Ideal eines rigorosen mathematischen Beweises gilt eine formale Ableitung. Der entsprechende Ableitungsbegriff wird dabei üblicherweise wie folgt definiert: Gegeben sei ein formaler Kalkül, bestehend aus einer formalen mathematischen Sprache L,[2] einer endlichen Menge von korrekten logischen Schlussregeln und einer endlichen Menge von geeigneten logischen und mathematischen[3] Axiomen. Eine *Ableitung einer Aussage p aus einer Prämissenmenge* Λ von Aussagen der Sprache L ist eine endliche Folge von Zeilen, so dass jede Zeile entweder die Instanz eines Axioms, eine Aussage aus Λ oder eine mithilfe der Schlussregeln aus vorangegangenen Zeilen gewonnene Aussage der Sprache L enthält, und in deren letzter Zeile die Aussage p auftritt.[4]

[1] [39, S. 32].

[2] In der Mathematik ist die Sprache L in der Regel eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe, sie besteht also aus Termen, Ausdrücken für Relationen zwischen Termen (insbesondere für deren Gleichheit), Booleschen Operatoren und Quantoren.

[3] Dabei handelt es sich klassischerweise um Axiome der Mengenlehre.

[4] Vgl. etwa Benson Mates' *Elementare Logik* [91, S. 150 f.]. Die Einschränkung auf symbolische Logiken (also solche, die herkömmliche formale Sprachen haben) ist dabei nicht zwingend notwendig, da es z. B. auch formale diagrammatische Beweiskalküle wie Venn-Diagramme in der Mengenlehre, Peirce-

Der Mathematiker und Mathematikphilosoph Jody Azzouni formuliert den Zusammenhang zwischen dem epistemischen Status mathematischer Sätze und formalen Ableitungen[5] wie folgt:

> „The default position for establishment thinkers is that, in some sense, mathematical proofs [. . .] get their rationale from the mathematician's access to [mechanically recognizable] derivations [that can be constructed on the basis of (one or another) formal logic]. Those thinking of mathematical proof this way see the unique epistemic qualities of mathematical knowledge as pretty straightforwardly resulting from (implicit) reliance on such derivations."[6]

Die tatsächliche Entwicklung der formalisierten Mathematik hat nun früh gezeigt, dass sich ein Großteil der als gültig anerkannten mathematischen Sätze formallogisch zumindest nicht auf unmittelbar und intuitiv evidente Axiome gründen lässt. So stellt Kurt Gödel im Zusammenhang mit Russells und Whiteheads *Principia Mathematica* [128] Folgendes fest:

> „Es hat sich herausgestellt, daß (unter der Annahme, daß die moderne Mathematik konsistent ist) die Lösung gewisser arithmetischer Probleme den Gebrauch von Annahmen erfordert, die wesentlich über die Arithmetik hinausgehen, d.h. den Bereich jener Art von elementarer, unbestreitbarer Evidenz [. . .] Vielleicht sind auch die scheinbar unüberwindlichen Schwierigkeiten, die einige andere mathematische Probleme für einige Jahre dargestellt haben, der Tatsache geschuldet, dass die notwendigen Axiome noch nicht gefunden worden sind. Natürlich kann die Mathematik unter diesen Umständen ein gut Teil ihrer 'absoluten Gewissheit' verlieren; doch ist dies unter dem Einfluß der modernen Grundlagenkrise bereits im großen Ausmaß geschehen."[7]

Dennoch scheint die prinzipielle Möglichkeit, mathematische Theoreme in obigem Sinne aus Prämissen formal abzuleiten, mathematischem Wissen einen Grad an Sicherheit und Absolutheit zu verleihen, der für jede andere Wissenschaft, insbesondere für die Naturwissenschaften, unerreichbar ist. Insbesondere wird mathmematisches Wissen als

---

Diagramme in der Aussagenlogik oder Knotendiagramme in der Knotentheorie gibt, die aber nur in speziellen Bereichen der Mathematik Anwendung finden. Die Unterscheidung zwischen symbolischen und diagrammatischen Kalkülen spielt in der vorliegenden Arbeit in der Regel keine Rolle. Ich verwende im Folgenden den Ausdruck „formale Ableitung" standardmäßig im Sinne des gebräuchlicheren, engeren Begriffs der symbolischen formalen Ableitung, und kennzeichne Stellen, an denen „formale Ableitung" im Sinne einer diagrammatischen Logik verwenden wird, explizit.

[5]Hier und im Folgenden verwende ich „formaler Beweis" und „formale Ableitung" synonym.

[6][5, S. 118].

[7][44, S. VII f.].

Paradigma im Sinne einer klassischen philosophischen Wissensdefinition angesehen. So findet man in einführenden Texten zur analytischen Erkenntnistheorie häufig Aussagen der folgenden Art:

> „[...] mathematisches Wissen [gilt] geradezu als Musterbeispiel für Wissen schlechthin. Wenn es in diesem Bereich kein Wissen gibt, dann kann es überhaupt kein Wissen geben.“[8]

Naiv betrachtet ist es also naheliegend, eine Erkenntnistheorie der Mathematik auf das Konzept des formalen Beweises aufzubauen.

Dieser erste Enthusiasmus wird allerdings rasch geschmälert. Ein Blick in die tatsächliche mathematische Forschungspraxis führt zu der Beobachtung, dass praktizierende Mathematiker so gut wie nie mit formalen Beweisen arbeiten. Bereits bei Bourbaki, einer Gruppe von Mathematikern, die in den 60er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts arbeiteten, findet man:

> „But formalized mathematics cannot in practice be written down in full, and therefore we must have confidence in what might be called the common sense of the mathematician [...] We shall therefore very quickly abandon formalized mathematics.“[9]

Die Behauptung, dass formale Beweise für mathematische Erkenntnis dennoch relevant sind, ließe sich unter der Annahme plausibel machen, dass ein akzeptabler informeller mathematischer Beweis stets im Prinzip formalisierbar sein sollte. In erster Näherung mag man dabei „formalisierbar“ im Sinne von „in eine formale Ableitung überführbar“ verstehen, z. B. durch explizite Ausarbeitung impliziter Beweisschritte. Unter geeigneten Bedingungen, so würde man annehmen, sind Mathematiker dazu in der Lage, aus einem derart formalisierbaren Beweis tatsächlich einen konkreten formalen Beweis zu gewinnen. Wie etwa P. H. Nidditch schreibt, scheint aber auch der Rückgriff auf formalisierbare Beweise im obigen Sinne nicht zum gewünschten Ziel zu führen, denn:

> „In the whole literatur of mathematics there is not a single valid proof in the logical sense [...] Since no mathematician has ever constructed a complete proof, his reputed capacity for doing so has no better status than an occult quality.“[10]

[8] Dieses Zitat ist etwa dem jüngst erschienenen Buch *Einführung in die analytische Erkenntnistheorie* von Thomas Grundmann entnommen, [50, S. 125 f.].

[9] [15, S. 11].

[10] [106, S. 6–7]. Dieses und das vorangegangene Zitat habe ich MacKenzie [82] entnommen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Relevanz formaler und formalisierbarer Beweise für Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens oder beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung genauer untersucht. Bei genauerer Betrachtung lässt der naive Begriff der Formalisierbarkeit, wonach ein mathematischer Beweis als formalisierbar bezeichnet wird, wenn er in eine formale Ableitung überführt werden kann, Raum für verschiedene Spezifikationen. Zu spezifizieren ist dabei, wie gerade bereits angedeutet, was genau unter „überführt werden können“ zu verstehen ist; die Bedeutung von „formale Ableitung“ im obigen Sinne bleibt dabei im Wesentlichen konstant. Die Bedeutung des Ausdrucks „formalisierbarer Beweis“ liegt in einem Spektrum zwischen extremen Lesarten. Eine schwache Lesart in diesem Spektrum definiert einen formalisierbaren Beweis als ein Argument, dessen Konklusion aus seinen Prämissen (unter geeigneter Übersetzung in eine formale Sprache) auch formal abgeleitet werden kann. Eine starke Lesart verlangt, dass ein formalisierbarer Beweis allein durch Übersetzung der einzelnen, explizit ausgeführten Beweisschritte in eine formale Ableitung überführt werden kann. Wie bereits Bourbakis und Nidditchs Bemerkungen nahe legen, ist eine zu starke Lesart von „formalisierbarer Beweis“ als Grundlage eines Kriteriums für epistemische Zuschreibungen[11] in der Mathematik nicht geeignet. Die zentrale Fragestellung, der ich in meiner Arbeit nachgehe, lautet entsprechend:

> *Ist eine Konzeption des formalisierbaren Beweises wesentlich für das philosophische Verständnis mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung?*

Diese Frage ist deutlich von der Frage, ob die gegebenen informellen Beweise der Mathematik tatsächlich formalisierbar sind, zu unterscheiden. Eine uneingeschränkt positive Antwort auf Letztere wird etwa von Yehuda Rav in [113] als *Hilberts These* bezeichnet. Hilberts These besteht demnach in der Behauptung, dass *jeder* informelle mathematische Beweis in eine formale Ableitung überführt werden kann, und steht in Zusammenhang mit dem sogenannten Hilbert-Programm.[12] David Hilbert hat dieses Programm zur formallogischen Grundlegung der Mathematik in der endgültigen Version im Jahre 1921 formuliert. Es hat sowohl eine Formalisierung der gesamten Mathematik als auch einen Beweis für die Konsistenz der Axiome des verwendeten formalen Systems zum Ziel. Das

[11] Damit sind Zuschreibungen von Wissen oder Rechtfertigung gemeint.

[12] Vgl. [113, S. 11]. Hilbert selbst hat eine solche These nie explizit vertreten. In der Literatur finden sich unter der Bezeichnung „Hilberts These“ vielmehr unterschiedliche Varianten der von Rav formulierten These, vgl. etwa Berk [10]. Die Ravs Formulierung entsprechende Variante bezeichnet Berk als „Leibnizsche These“ ([10, S. 17]). Hilberts These entspricht bei Berk die stärkere Behauptung, dass sich jeder informelle mathematische Beweis im Rahmen einer Prädikatenlogik erster Stufe formalisieren lässt ([10, S. 19]). Ich verwende den Ausdruck „Hilberts These“ hier im Sinne von Rav.

Programm scheiterte letztlich an den 1931 bewiesenen Gödelschen Sätzen zur Unvollständigkeit formaler Systeme. Die Wahrheit von Hilberts These ist jedoch nur eine notwendige Bedingung für eine erfolgreiche Durchführung des Hilbert-Programmes und durch dessen Scheitern noch nicht ausgeschlossen. Sie hängt vielmehr wieder davon ab, was unter „überführt werden können" zu verstehen ist. Eine positive Antwort auf meine oben formulierte Forschungsfrage setzt die Wahrheit von Hilberts These – unter einer geeigneten Spezifikation von „überführt werden können" – voraus, muss aber darüber hinausgehen, da sie auch die erkenntnistheoretische Relevanz der These zu bewerten hat.

Die Antwort, die ich vorschlagen werde, ist positiv. Sie besagt, dass die Eigenschaft der Formalisierbarkeit, unter einer geeigneten und insbesondere kontextsensitiven Lesart von „formalisierbar", tatsächlich ein Schlüssel zum Verständnis der epistemischen Funktion informeller mathematischer Beweise ist. Unter dieser speziellen Lesart werden es nicht mehr Beweise als konkrete sprachliche Argumente, sondern Beweishandlungen sein, die als formalisierbar bezeichnet werden. Ob eine Beweishandlung formalisierbar ist, wird wesentlich von den mathematischen Fähigkeiten des beweisenden epistemischen Subjektes abhängen. Die genauere philosophische Analyse dieser Lesart soll unter anderem Nidditchs Vorwurf zurückweisen, dass die Formalisierbarkeit eines informellen Beweises zwangsläufig an den Besitz „okkulter Eigenschaften" durch das beweisführende Subjekt gebunden sei.

In der traditionellen Philosophie der Mathematik findet die Beschäftigung mit dem Konzept der Formalisierbarkeit häufig in direktem Zusammenhang mit ontologischen Fragen bezüglich der Natur mathematischer Objekte und der adäquaten Konzeption mathematischer Wahrheit statt. Man kann sogar stärker sagen, dass die traditionellen Philosophie der Mathematik gar keine Theorie der mathematischen Erkenntnis, sondern eine Theorie der mathematischen Wahrheit und eine Ontologie der mathematischen Gegenstände ist. Insbesondere spielt darin das epistemische Subjekt keine Rolle. Ich konzentriere mich in der vorliegenden Arbeit auf die erkenntnistheoretische Rolle von Formalisierbarkeit und verlasse damit den traditionellen Ansatz in zweierlei Hinsicht: Die Frage danach, unter welchen Bedingungen X weiß, dass p, bezieht zum einen das epistemische Subjekt explizit ein. Diese Frage wird zunächst im klassisch-platonischen Sinne von Wissen als wahrer, durch Gründe gerechtfertigter Überzeugung beantwortet. Die Forderung, Gründe für p zu haben, wird dabei im Sinne des Verfügens über einen formalisierbaren Beweis expliziert. Zum anderen wird dieses Explikat anschließend unter Berücksichtigung empirischer, nämlich soziologischer Phänomene der mathematischen

Praxis interpretiert.[13] Ich verzichte im Rahmen dieser Arbeit jedoch, soweit möglich, auf die Behandlung ontologischer Fragen. Die im letzten Kapitel vorgeschlagenen Kriterien für mathematisches Wissen und mathematische Rechtfertigung lassen jedoch Rückschlüsse auf die Natur mathematischer Beweise zu.

Zur Methode

Die bereits in den 30er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entstandenen Arbeiten des eingangs zitierten Ludwik Fleck zur historischen und soziologischen Betrachtungsweise in der Wissenschaftstheorie haben seinerzeit maßgeblich Thomas S. Kuhns 1962 erschienenes Werk *The Structure of Scientific Revolutions* [65] geprägt.[14] Dieses Werk hat in der Geschichte der Wissenschaftstheorie nicht nur eine endgültige Abwendung von dem streng normativen, statischen Ansatz des Wiener Kreises befördert. Mit der Aufnahme und Weiterentwicklung der wissenssoziologischen Überlegungen Flecks wendet sich Kuhn darin in erster Linie explizit gegen Karl Poppers für die Wissenschaftstheorie der 30er Jahre noch revolutionäre *Logik der Forschung* [107]: Während Popper zwar die Dynamik von Forschungsprozessen berücksichtigt, wohnt seiner Theorie immer noch das bis dahin verbreitete, stark normative Bild von Wissenschaftstheorie, und damit ein kaum soziologisch oder historisch reflektierter wissenschaftstheoretischer Geltungsanspruch inne, dessen Selbstverständlichkeit Fleck und später Kuhn gerade in Frage stellen. Poppers, Flecks und Kuhns wissenschaftstheoretische Überlegungen wurden in erster Linie in Bezug auf die Naturwissenschaften formuliert und werden auch heute häufig nur für diesen eingeschränkten Bereich rezipiert. Spätestens Lakatos' *Proofs and Refutations* [66] weitete den historischen und soziologischen wissenschaftstheoretischen Blick Flecks und Kuhns jedoch fruchtbar auf die Mathematik aus.

Auch die Frage nach der epistemischen Rolle formalisierbarer Beweise sollte nicht ausschließlich mit zu stark normativen, rein analytischen philosophischen Methoden behandelt werden, sondern im Rahmen einer wissenschaftsphilosophisch motivierten und soziologisch reflektierten Philosophie der Mathematik. Die vorliegende Arbeit versteht sich im Sinne einer solchen Herangehensweise. Sie beruht wesentlich auf der methodologischen Kernüberzeugung, dass die mathematische Praxis stärker als bei vielen traditionellen Ansätzen in der Philosophie der Mathematik in den Fokus der philosophischen Überlegungen zu stellen ist. Diese Kernüberzeugung werde ich im Rahmen einer detaillierten metho-

[13] Dabei geht es nicht um die Behauptung, die Wahrheit oder Falschheit von p selbst stünde im Zusammenhang mit einem epistemischem Subjekt oder sei soziologisch zugänglich.

[14] Vgl. Kuhns Äußerungen zu Flecks *Enstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache* im Vorwort zu [65].

dologischen Diskussion argumentativ stützen. Ich argumentiere insbesondere dafür, dass wissenschaftsphilosophisch orientierte Philosophen der Mathematik die Möglichkeiten, welche die Hinzunahme empirischer Quellen für ein tiefes philosophisches Verständnis für Zuschreibungen mathematischen Wissens und gerechtfertigter mathematischer Überzeugung bietet, stärker ausschöpfen sollten.

Als methodologischen Rahmen schlage ich einen sozio-empirisch informierten Ansatz vor, der eine philosophische Theoriebildung der mathematischen Erkenntnis auf der Grundlage zweier unterschiedlicher Quellen vornimmt. Die eine Quelle ist die klassische philosophische Begriffsanalyse, welche Wahrheitsbedingungen von Aussagen der Form „X weiß, dass p" und „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p" für den Fall mathematischer Aussagen p liefert. Die andere Quelle ist die empirische Soziologie. Empirische soziologische Methoden kommen zum Einsatz, um die Bedingungen zu untersuchen, unter denen in der tatsächlichen mathematischen Praxis epistemische Zuschreibungen getätigt werden, also die Umstände, unter denen ein praktizierender Mathematiker Y für wahr hält, dass X weiß oder gerechtfertigterweise glaubt, dass p.

Aussagen darüber, wann ein Mathematiker glaubt, dass ein anderer weiß, dass p, sind offenbar empirische Thesen über die epistemischen Zustände praktizierender Mathematiker, und sollten dementsprechend empirisch überprüft werden. Sie sind für philosophische Überlegungen allerdings erst unter weiteren Vorannahmen relevant. Eine solche Annahme ist etwa die, dass aus stabilen empirischen Zuschreibungsphänomenen in der mathematischen Praxis gewonnene Zuschreibungskriterien, gegebenenfalls nach geeigneter Modifikation, auch gute Kandidaten für eine philosophische Analyse der Wahrheitsbedingungen von Wissenszuschreibungen liefern. Dieser Annahme verschreibe ich mich hier ebenfalls explizit. Sie kann sowohl unter Verweis auf eine wissenschaftsphilosophisch motivierten Erkenntnistheorie der Mathematik als auch sprachphilosophisch motiviert werden. Ich konzentriere mich in dieser Arbeit auf die wissenschaftsphilosophische Motivation und werde sprachphilosophische Überlegungen zum Verhältnis von Semantik und Pragmatik der empirisch untersuchten Wissenzuschreibungen nur kurz explizit aufgreifen.

Ziel der Arbeit

Ich verstehe meine Arbeit zum einen als einen Vorschlag für die methodologische Einordnung und Begründung einer an der Mathematik als Praxis orientierten Philosophie, wobei ich mich auf den Bereich erkenntnistheoretischer Fragestellungen und auf Mathematik als wissenschaftliche Praxis beschränke. Zum anderen stellt die Arbeit einen Versuch dar, das entworfene methodische Programm in einem Spezialfall umzusetzen, nämlich bei der Untersuchung der speziellen erkenntnistheoretischen Frage nach der epistemischen Relevanz von Formalisierbarkeit unter Hinzunahme empirischer soziologischer Untersuchungen. Es ist mir außerdem wichtig, zu betonen, dass zumindest aus der Sicht eines praktizierenden Mathematikers das wesentliche philosophische Ergebnis dieser Arbeit nicht darin bestehen kann, bisher unbekannte epistemische Charakteristika der mathematischen Praxis aufgedeckt zu haben – ein praktizierender Mathematiker sollte im Idealfall sämtliche der hier diskutierten Charakteristika gerade als Merkmale seines täglichen Tuns wiedererkennen. Der philosophische Mehrwert soll dadurch erreicht werden, diese Charakteristika mit einem einheitlichen, philosophisch tragbaren Kriterium für epistemische Zuschreibungen erfassen und erklären zu können.

Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit umfasst fünf Kapitel. In Kapitel 1 geht es um die grundlegende methodologische Diskussion des von mir verfolgten sozio-empirisch informierten Ansatzes. Ich stelle diesen Ansatz im methodologischen Spannungsfeld zwischen der klassischen philosophischen Begriffsanalyse und der empirischen Soziologie vor und formuliere ein konkretes dreischrittiges, iteratives Forschungsprogramm (im Folgenden kurz: DSP) für eine sozio-empirisch informierte Untersuchung der epistemischen Rolle formalisierbarer mathematischer Beweise, d.h. ihrer Relevanz für die Zuschreibung beweisbasierten mathematischen Wissens und beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung. Anschließend diskutiere ich Gründe für die Wahl dieser speziellen Herangehensweise im Hinblick auf meine oben formulierte Forschungsfrage und verteidige diese Wahl gegen prominente Einwände. Zum Abschluss des Kapitels ordne ich meinen Ansatz exemplarisch in die bestehende Landschaft praxisbasierter Positionen in der Philosophie der Mathematik ein.

Kapitel 2 behandelt den ersten Schritt des Forschungsprogrammes DSP. In meinem Fall handelt es sich dabei um die philosophische Analyse unterschiedlicher *formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen* (im Folgenden kurz: FKE), d.h. am Konzept des formalisierbaren Beweises orientierter Kriterien für Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens und beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung. Um die verschiedenen Lesarten erkenntnistheoretisch klassifizieren zu können, führe ich zu Beginn des Kapitels eine entsprechende begriffliche Systematik ein. Anschließend diskutiere ich unterschiedliche Vorschläge für FKE, die mehrheitlich der bestehenden Literatur zum Thema entnommen sind. Ich beginne dabei mit einer sehr starken Lesart des Formalisierbarkeitsbegriffs, deren Adäquatheit zur Modellierung der Begriffe „mathematisches Wissen“ und „mathematische Rechtfertigung“ sich leicht zurückweisen lässt. Daher wende ich mich im restlichen Kapitel schrittweise abgeschwächten Lesarten zu, und schlage auf der Grundlage meiner Diskussion einen ersten aussichtsreichen Kandidaten für ein sozio-empirisch informiertes FKE vor.

Das dritte und vierte Kapitel sind dem zweiten Schritt von DSP, nämlich der Darstellung, Auswertung und Interpretation zweier empirischer Studien gewidmet, die ich im Rahmen meines Disserationsprojektes durchgeführt habe. In Kapitel 3 stelle ich Ergebnisse einer Umfragestudie zur Verwendung epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis vor. Ich interpretiere diese Ergebnisse (vgl. Abschnitt 3.4) als Hinweise auf kontextabhängige Standards für Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens und beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung sowie auf die Fallibilität der als rechtfertigende Gründe akzeptierten Beweise. Darüber hinaus legt die von mir vorgeschlagene Interpretation eine Reformulierung des Ziels mathematischer Forschung nahe. Dieses besteht demnach nicht allein darin, ein Wissen-dass über einen mathematischen Sachverhalt p zu erlangen. Das Erkenntnisziel mathematischer Forschung scheint vielmehr in einer Art Wissen-warum-p zu bestehen,[15] welches zunächst nicht durch formale oder in einem starken Sinne formalisierbare Beweise erreicht werden kann.

Diese Interpretation bildet den Ausgangspunkt für die in Kapitel 4 vorgestellte vertiefende Interviewstudie. Die Ergebnisse dieser Studie bestätigen unter der von mir vorgeschlagenen Interpretation größtenteils die Ergebnisse der Umfragestudie. Da im Vergleich zu den eher quantitativen Umfrageergebnissen aber eine wesentlich detailliertere qualitive Analyse der Interviews möglich ist, gewinne ich hier vor allem auch Verfeinerungen und Präzisierungen der bisherigen Interpretation. Insbesondere lassen sich das Konzept des Wissen-warum genauer bestimmen und die Formalisierbarkeitseigenschaft informeller Beweise an die mathematischen Fähigkeiten des beweisenden Sujektes anbinden. Auf der Grundlage von Kapitel 3 und 4 schlage ich in Abschnitt 4.3 eine erste philosophische Analyse der empirischen Ergebnisse vor, indem ich acht philosophisch relevante Aspekte zur Charakterisierung epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis formuliere.

Der Vergleich der empirischen Ergebnisse mit der Analyse verschiedener Lesarten von FKE in Kapitel 2 erfolgt auf Grundlage dieser acht Aspekte; er ist Teil des dritten Programmschrittes von DSP und Gegenstand von Kapitel 5, dem inhaltlich abschließenden Kapitel der Arbeit. Darin schlage ich auch eine durch den vorangegangenen Vergleich motivierte, sozio-empirisch informierte Lesart von FKE vor, welche die Verwendung epistemischer Begrifflichkeiten in der mathematischen Praxis adäquat modellieren soll, und

[15] Im Sinne von Wissen, warum p an sich selbst wahr ist, nicht, warum X glaubt oder weiß, dass p wahr ist.

gleichzeitig eine philosophisch befriedigende Konzeption mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung liefert.

Im Schlusswort fasse ich die wichtigsten Ergebnisse meiner Arbeit noch einmal kurz zusammen und stelle einen wertenden Rückbezug zur Ausgangsfrage der Arbeit her. Abschließend spreche ich offen gebliebene Fragen und Anschlusspunkte für weitere Untersuchungen an.

1 Methodologische Grundlagendiskussion – Ein sozio-empirisch informierter erkenntnistheoretischer Standpunkt

Im ersten Teil dieses Kapitels (Abschnitt 1.1 – 1.3) präzisiere ich die Methodologie und Zielsetzung meiner Arbeit: Was heißt es, verschiedene formalisierbarkeitsorientierte Konzeptionen mathematischen Wissens, d.h. am Konzept des formalisierbaren Beweises[16] orientierte Kriterien für Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens und beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung, vom Standpunkt einer sozio-empirisch informierten analytischen Erkenntnistheorie zu untersuchen? Im zweiten Teil diskutiere ich Argumente für und gegen die Wahl dieses speziellen Ansatzes (Abschnitt 1.4) und stelle die Methodologie verwandter philosophischer Ansätze vor (Abschnitt 1.5).

Eine sozio-empirisch informierte analytische Erkenntnistheorie der Mathematik verwendet einerseits Methoden der traditionellen analytischen Philosophie, indem sie sowohl verschiedene mögliche formalisierbarkeitsorientierte Konzeptionen mathematischen Wissens, als auch die Bedingungen für die Verwendung epistemisch relevanter Konzepte in der mathematischen Praxis mit Hilfe des begrifflichen und methodischen Apparates der analytischen Erkenntnistheorie untersucht. Andererseits bezieht sie dabei Ergebnisse der Soziologie mathematischen Wissens, genauer: Ergebnisse empirischer soziologischer Untersuchungen zum Wissens- und Beweisbegriff praktizierender Mathematiker, mit ein, die sie in ein Überlegungsgleichgewicht[17] mit philosophischen Intuitionen zu bringen versucht.

Eine Präzisierung meiner Methodologie und Zielsetzung werde ich daher in Form einer Einordnung und Abgrenzung im Hinblick auf die beiden genannten Disziplinen, die traditionelle analytische Erkenntnistheorie (Abschnitt 1.1) und die Soziologie mathematischen Wissens (Abschnitt 1.2), vornehmen. Dabei wird mein Augenmerk unter anderem

[16]Im Folgenden verwende ich, sofern nichts anderes gesagt wird, den Ausdruck „formalisierbar“ zunächst im in der Einleitung genannten naiven Sinne von „in eine formale Ableitung überführbar“, also unspezifiziert in Bezug auf das mögliche Bedeutungsspektrum für „überführbar“ (vgl. S. x).

[17]Vgl. Abschnitt 1.3.3, S. 21.

auf der Frage nach dem normativen und dem deskriptiven Anspruch der vorgestellten Ansätze liegen.[18] Dies soll dazu dienen, den von mir vertretenen sozio-empirisch informierten Ansatz (Abschnitt 1.3) als einen aus wissenschaftsphilosophischer Sicht vertretbaren Mittelweg zwischen einer klassischen analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik und einer reinen Soziologie mathematischen Wissens auszuzeichnen:[19] Er lässt sich als moderat normativ in dem Sinne charakterisieren, dass er die Einbeziehung empirischer Informationen über die Wissenschaftspraxis voraussetzt, um eine fruchtbare wissenschaftsphilosophische Interaktion mit dieser zu ermöglichen. Das als Basis einer solchen Interaktion angestrebte Überlegungsgleichgewicht zwischen philosophischen Intuitionen und tatsächlicher Phänomenologie der Praxis muss dabei nicht vollends erreicht werden; der Prozess der sozio-empirisch informierten philosophischen Theoriebildung sollte jedoch nicht früher terminieren, als philosophische Normen in Bezug auf die tatsächliche Wissenschaftspraxis sowohl anwendbar als auch prinzipiell erfüllbar sind.

1.1 Analytische Erkenntnistheorie der Mathematik

In diesem Abschnitt werde ich möglichst allgemein darstellen, mit welchen Fragestellungen sich eine Erkenntnistheorie der Mathematik im Sinne der analytischen Philosophie beschäftigt, und mit welchen Methoden sie diesen nachgeht. Dabei gehe ich von der Methodologie der traditionellen analytischen Erkenntnistheorie aus.

1.1.1 Allgemeine analytische Erkenntnistheorie

Die allgemeine Erkenntnistheorie beschäftigt sich mit der Natur der Erkenntnis. In der Erkenntnistheorie der jüngsten Zeit ist dabei die Frage: „Was ist Wissen?“ zentral. Ana-

[18] Das Begriffspaar „normativ-deskriptiv“ ist mannigfaltig konnotiert. Ich werde es im Folgenden in einem spezifisch wissenschaftsphilosophischen Sinne gebrauchen: Ich verstehe die Unterscheidung zwischen einer normativen und einer deskriptiven (bzw. empirischen) Wissenschaftsphilosophie im dem Sinne, wie sie z. B. Stephan Hartmann in [51] und Michael Esfeld in [37] verwenden (einen Überblick über die aktuelle Diskussion um eine normative *versus* einer deskriptiven Wissenschaftsphilosophie gibt beispielsweise Gesang [41]). Hartmann unterscheidet „Vertreter der empirischen Wissenschaftstheorie“, die versuchen, „Forschungsmethoden und Forschungskonstellationen zu beschreiben und – wenn möglich – zu erklären“, denen es dabei allerdings in erster Linie um „die bloße Abbildung der wissenschaftlichen Praxis“ geht. Dagegen versuchen normative Wissenschaftstheoretiker, „zur Etablierung von [...] Methodologien beizutragen“; ihre Theorien stellen „ausgefeilte und begründetete wissenschaftliche Methodologien“ selbst bereit und interagieren in diesem Sinne mit ihrem Gegenstandsbereich (vgl. [51, Abschn. 4.1]). Auch Esfeld betont den Unterschied zwischen einer deskriptiven Wissenschaftsphilosophie, welche die wissenschaftlichen Begriffs- und Theoriebildung nur von einem „theoretisch-distanzierten“ Standpunkt aus beschreibt, und einer normativen im Sinne einer interaktiven Wissenschaftsphilosophie, „die sich selbst als integrale[n] Bestandteil der betreffenden wissenschaftlichen Praktiken versteht“ (vgl. [37, S. 220–221]).

[19] Vgl. Abschnitt 1.3.5.

lytische Philosophen nähern sich dieser Fragestellung über eine Untersuchung der Bedeutung der relevanten epistemischen Begriffe „Wissen“ und „Rechtfertigung“. Dabei werden unterschiedliche Methoden angewandt – traditionell lassen sich vor allem zwei unterscheiden: Die logische Analyse der Wahrheitsbedingungen von Sätzen, in denen die genannten Begriffe vorkommen, und die klassische Begriffsanalyse.

In der klassischen Begriffsanalyse geht es darum, „einen Begriff durch einen anderen Begriff informativ zu erläutern“[20], möglichst in Form einer „*(Real-)Definition*“, die „notwendige und zusammen hinreichende Bedingungen für das Analysandum aufstellt“[21]. Die Begriffsanalyse kann als zentrale Methode der traditionellen analytischen Erkenntnistheorie bezeichnet werden, welche versucht, notwendige und zusammen hinreichende Bedingungen für Wissen und Rechtfertigung anzugeben.[22] Dies geschieht auch hier in der Regel in Form von geeigneten Wahrheitsbedingungen für Sätze der Form „X weiß, dass p“ bzw. „X glaubt gerechtfertigt, dass p“.[23] Dabei wird eine Intensionsgleichheit des Analysandum-Ausdrucks und des Analysans-Ausdrucks angestrebt, und zwar allein mit Hilfe einer „intuitiven Bewertung möglicher Fälle“[24] der Verwendung dieser Ausdrücke. Man stützt sich dabei also auf apriorische Methoden wie die Introspektion oder die Auswertung philosophischer Intuitionen insbesondere in kontrafaktischen Situationen mittels Gedankenexperimenten.[25] Durch die Konzentration auf die Definition als Form der Begriffsanalyse erhebt die analytische Erkenntnistheorie den Anspruch, Begriffe informativ zu analysieren und „korrekte“ von „nicht korrekten“ Verwendungsweisen zu unterscheiden:

> „Ein solches Vorgehen scheint allerdings mit einer *Sprachreglementierung* verbunden zu sein: Verwendungsweisen von Ausdrücken, die sozusagen ‘aus der Definition herausfallen’, müssen dann als *unkorrekt* angesehen werden.“[26]

Während eine in diesem Sinne eher konstruktive Sichtweise ihrer Reglementierungsrolle in der analytischen Erkenntnistheorie verbreitet ist, hat sich die extremere und weniger konstruktive Methodologie des späten Wittgenstein:

> „Die Philosophie ist ein Kampf gegen die Verhexung unsres Verstandes durch die Mittel unserer Sprache“[27],

[20]Newen & van Savigny [104, S. 12].
[21]Brendel [17, S. 9], Hervorhebung im Original.
[22]Vgl. [17, S. 12–14].
[23]Werden die Wahrheitsbedingungen nicht explizit formuliert, so sind sie dennoch durch die jeweilige Definition von „Wissen“ und „Rechtfertigung“ festgelegt. Im Unterschied zur Philosophie der idealen Sprache geht es nicht um die Angabe einer formalen Semantik für die genannten Satztypen.
[24]Grundmann [49, S. 22].
[25]Vgl. [49, S. 17].
[26][17, S. 12], Hervorhebungen im Original.
[27]PU § 109.

der die Aufgabe der Philosophie in einer „Therapie“ ihres eigenen metaphysisch belasteten Gebrauchs von Alltagsbegriffen sah, nicht durchgesetzt.[28]

Eine verbreitete schematische Vorgehensweise bei der Begriffsanalyse stellt in Anlehnung an Löwe und Müller in [76] der folgende, iterative Dreischritt dar:[29]

> Im *ersten Schritt* werden strukturelle Arbeitsdefinitionen der zu untersuchenden Begriffe entwickelt. Diese Arbeitsdefinitionen stützen sich entweder auf ein prätheoretisches begriffliches Verständnis, oder auf die Ergebnisse vorhergegangener Schritte der Iteration.
>
> Im *zweiten Schritt* werden Daten gesammelt, die eine Phänomenologie der Begriffsverwendung liefern sollen, auf deren Grundlage die Adäquatheit der in Schritt 1 entwickelten Arbeitsdefinition bestätigt oder in Frage gestellt werden kann.
>
> In einem *dritten Schritt* der Reflexion wird die Adäquatheit der Arbeitsdefinition aus Schritt 1 mithilfe der Phänomenologie aus Schritt 2 bewertet, und die bisherige Definition wird je nach Ausgang der Bewertung im nächsten Iterationsdurchgang unter Schritt 1 angepasst oder sogar ganz verworfen.

Dieses Drei-Schritte-Schema ist im Hinblick auf die bestehende philosophische Methodenlandschaft nicht unbedingt als jeweils explizit zugrunde gelegte universelle Methode aufzufassen, sondern vor allem als methodologisches Rekonstruktions- und Analysemittel. Es liefert eine Möglichkeit zur Beschreibung und zum Vergleich unterschiedlicher philosophischer Methoden; insbesondere lassen sich damit klassisch analytische, oft als Lehnstuhlphilosophie bezeichnete Vorgehensweisen gut im systematischen Kontrast zu stärker empirisch orientierten philosophischen Programmen wie dem in dieser Arbeit durchgeführten rekonstruieren.[30]

In Bezug auf Schritt 1 ist zu betonen, dass das hier zum Tragen kommende philosophisch-begriffliche Vorverständnis stets von thematisch verwandten, umfassenden oder angrenzenden philosophischen Theorien geprägt ist. Damit ist es zwar hinsichtlich der zu entwickelnden Begriffsanalyse prätheoretisch, aber weder in der ersten noch in darauf folgenden Iterationsdurchgängen theoriefrei. In Bezug auf Schritt 2 ist zudem die generelle Unterscheidung zwischen Daten und Phänomenen wesentlich:

[28] Vgl. auch Newen & Savigny [104, S. 14–15].

[29] Löwe und Müller entwickeln einen analogen Dreischritt der begrifflichen Modellierung (*conceptual modelling*) nach dem Modell der mathematischen Modellierung und diskutieren dessen Anwendungsbereich in der Philosophie ([76, Abschn. 2 und 5]); vgl. auch Löwe, Müller & Müller-Hill [79, Abschn. 2].

[30] Für einen kurzen ersten Ausblick auf eine mögliche Spezifikation des Dreischritts der begrifflichen Modellierung in Bezug auf eine stärker empirisch orientierte Philosophie der Mathematik vgl. wieder Löwe, Müller & Müller-Hill [79, S. 193].

> „We call this step *phenomenology* because it is generally broader than mere data collection.“[31]

In Schritt 3 fließen nicht die in Schritt 2 erhobenen reinen Daten ein, sondern daraus gewonnene, möglichst stabile und reproduzierbare Phänomene. Phänomene entstehen aus Daten vor dem Hintergrund des (prä-)theoretischen begrifflichen Apparates, der durch Schritt 1 oder vorangegangene Iterationsdurchgänge zur Verfügung gestellt wird.[32]

Zu den spezifischen Untersuchungsmethoden der klassischen analytischen Erkenntnistheorie unter Schritt 2 zählen nun die bereits genannte Introspektion sowie die Analyse der Alltagssprache, letztere jedoch zumeist und an erster Stelle aus der Sicht des Philosophen. Der analytische Ansatz ist im Rahmen von Schritt 2 grundsätzlich offen für die Einbindung empirischer Phänomene außerhalb der philosophisch geschulten Intuition, da er sich der Analyse der Alltagssprache verschrieben hat.[33] In diesem Rahmen wird in neuerer Zeit verstärkt auf die Ergebnisse kognitionswissenschaftlicher und psychologischer Forschung, und damit auf empirische Grundlagenforschung hinsichtlich der kognitiven Voraussetzungen von Sprache und Wissen zurückgegriffen. Empirische Daten über die alltagssprachliche Verwendung der in Frage stehenden Begriffe durch gewöhnliche, nicht philosophisch geschultem Sprecher werden dagegen kaum herangezogen. Die in Schritt 3 einfließenden Phänomene der Begriffsverwendung basieren damit unter Umständen in sehr hohem Maße auf dem prätheoretischen, philosophisch-begrifflichen Vorverständnis der untersuchten Begriffe sowie thematisch angrenzenden philosophischen Theorien. Dies stellt für die begriffsanalytische Methode selbst nicht unbedingt eine Einschränkung dar, weshalb ich diesen Gedankengang hier nicht vertiefe.[34] Anlass zur Kritik gibt dieser Aspekt vor dem Hintergrund einer umfassenden Wissenschaftsphilosophie der Mathematik jedoch hinsichtlich der normativen[35] Rolle einer klassischen analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik.[36] Letzere kann als Unterdisziplin der analytischen

[31] [76, Abschn. 2].

[32] Ich werde hier nicht weiter auf Feinheiten dieser Unterscheidung eingehen; sie wird prominent in Woodward [131] und Woodward & Bogen [132] diskutiert. Löwe und Müller übertragen sie in [76] auf die allgemeine Diskussion einer adäquaten Methodologie für eine mit der Methode der begrifflichen Modellierung arbeitenden „Philosophie von X“. Dort geht es in erster Linie um die Rolle dieser Unterscheidung für die Debatte um methodologische Konsequenzen, die aus dem etwa in der allgemeinen Erkenntnistheorie verstärkt auftretenden Faktum instabiler oder sogar widersprüchlicher philosophischer Intuitionen zu ziehen sind (vgl. Abschnitt 1.4.1 und 1.5.2). Für meine Zwecke genügt es hier, auf den Unterschied zwischen Daten und Phänomenen nur kurz hinzuweisen.

[33] Vgl. [104, S. 15].

[34] Vgl. auch hier Abschnitte 1.5.2 und 1.4.1; in modernen analytischen Ansätzen werden zusätzlich etwa Intuitionen im Hinblick auf bestimmte, für den untersuchten Gegenstandsbereich relevante philosophische Grundlagenfragen herangezogen.

[35] Vgl. Fußnote 18.

[36] Vgl. hierzu Abschnitt 1.3.5 und 1.3.6.

Erkenntnistheorie aufgefasst werden; ihre spezifischen Charakteristika umreiße ich nun kurz.

1.1.2 Spezifika einer analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik

Das Interesse der Erkenntnistheorie der Mathematik wird durch die Frage nach der Natur mathematischen Wissens und besonderen Aspekten mathematischer Rechtfertigung beschrieben. Mathematisches Wissen wird einem epistemischen Subjekt X in der Regel in Bezug auf ein mathematisches Theorem p zugesprochen. Geschieht dies in der Form „X weiß, dass p“, so ist damit zunächst einmal propositionales mathematisches Wissen gemeint, eben ein „Wissen-dass“. Diese Wissensform bildet auch den Hauptuntersuchungsgegenstand der klassischen Erkenntnistheorie.[37] Ich werde im Folgenden mathematisches Wissen in diesem Sinne als propositionales Wissen verstehen. Methodologie, Zielsetzung und Ergebnisse der allgemeinen Erkenntnistheorie bezüglich einer Analyse des propositionalen Wissensbegriffs oder des damit verbundenen Rechtfertigungsbegriffes lassen sich dadurch auf den Begriff mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung übertragen.

Worin unterscheidet sich aber eine Analyse von allgemeinen epistemischen Begriffen von einer Analyse der epistemischen Begriffe in einer Erkenntnistheorie der Mathematik? Eine spezielle Analyse der Begriffe „mathematisches Wissen“ bzw. „mathematische Rechtfertigung“ birgt mindestens zwei Möglichkeiten, die allgemeine Analyse von „Wissen“ und „Rechtfertigung“ informativ zu ergänzen: Zum einen können Explikate, die sich für den allgemeinen Wissens- bzw. Rechtfertigungsbegriff nicht weiter oder auf verschiedene Arten spezifizieren lassen, für den spezielleren Begriff mathematischen Wissens bzw. mathematischer Rechtfertigung weiter spezifizierbar sein. Darüber hinaus können konkurrierende Wissens- oder Rechtfertigungstheorien, zwischen denen im allgemeinen Fall nicht entschieden werden kann, für den Fall Mathematik mehr oder weniger geeignet sein. Letzteres würde die Frage aufwerfen, ob man mathematisches Wissen bzw. mathematische Rechtfertigung in der Folge weiterhin als einen Spezialfall von Wissen bzw. Rechtfertigung, der sich durch eine zusätzliche *differentia specifica* auszeichnet, oder als einen Sonderfall *sui generis* behandeln will. In der Tat werden mathematisches Wissen und mathematische Rechtfertigung dem klassischen Verständnis nach eher als epistemische Sonderfälle *sui generis* angesehen, was insbesondere auf einer vermeintlichen Sonderstel-

[37] Insbesondere in interdisziplinären Forschungsprojekten mit Kognitionswissenschaftlern und Psychologen beschäftigt sich die jüngere Erkenntnistheorie aber auch mit nicht-propositionalen Formen von Wissen, vgl. z.B. Newen & Bartels [103].

lung mathematischer Rechtfertigung als eines Teils des Explanans des Wissensbegriffes beruht;[38] ich komme darauf in Kapitel 2 ausführlicher zu sprechen.

1.1.3 Zusammenfassende Charakterisierung

Zusammengefasst ergeben sich bezüglich der Zielsetzung und Methoden einer traditionellen analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik also folgende Charakteristika:

(1) Untersuchungsgegenstand sind die epistemischen Begriffe „mathematisches Wissen" und „mathematische Rechtfertigung".

(2) Untersuchungsziel ist die Angabe von intensional adäquaten, d.h. notwendigen und zusammen hinreichenden Bedingungen für die korrekte Verwendung der unter (1) genannten Begriffe im Sinne der klassischen Begriffsanalyse. Dies geschieht impizit oder explizit in Form von Wahrheitsbedingungen für die Satztypen „X weiß, dass p" und „X glaubt gerechtfertigt, dass p".

(3) Zu den Untersuchungsmethoden zählen in erster Linie die Analyse der introspektiv zugänglichen tatsächlichen Bedingungen für die Verwendung der involvierten Begriffe (Philosophie der normalen Sprache), aber charakteristischerweise auch der Rückgriff auf philosophische Intuitionen bezüglich kontrafaktischer Verwendungssituationen, welcher in Form von philosophischen Gedankenexperimenten erfolgt. Durch die Einbeziehung der tatsächlichen Verwendungsweise ist diese Methode grundsätzlich offen für z. B. psychologische, kognitive und soziologische Aspekte des jeweiligen Analysandums. Die Einbeziehung empirischer Ergebnisse vor allem zu kognitiven Aspekten erfolgt jedoch erst seit jüngster Zeit. In der traditionellen analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik wird insbesondere wenig Material der empirischen Sozialforschung zur mathematischen Praxis, etwa zur Verwendung epistemischer Begriffe, als Erweiterung der Datenbasis verwendet.

(4) Es wird der Anspruch erhoben, durch eine informative Analyse der Begriffe unter (1), d.h. durch Aufdecken scheinbarer Synonymien, korrekte von nicht-korrekten Verwendungsweisen zu unterscheiden. Begründet wird dieser Anspruch durch die verwendeten Analysemethoden, den Rückgriff auf philosophisch geschulte Intuitionen mittels Introspektion und Gedankenexperimenten.

[38] Meine Analyse wird diesbezüglich dagegen zunächst ergebnisoffen sein.

1.2 Soziologie des mathematischen Wissens

In diesem Abschnitt werde ich zunächst (1.2.1) eine kleine Auswahl an Positionen vorstellen, die sich mit dem Unternehmen einer Soziologie mathematischen Wissens beschäftigen, um in 1.2.2 anschließend, analog zu 1.1.3, eine grobe, aber für meine Zwecke hinreichend universelle Charakterisierung dieses Unternehmens in Bezug auf Methodologie, Voraussetzungen, Ziele und Erklärungsanspruch zu versuchen. Dieser Abschnitt hat demgemäß hauptsächlich darstellenden Charakter; erst am Ende von 1.2.2 erfolgt ein kurzer Vergleich dort der herausgearbeiteten Charakteristika mit denen aus 1.1.3.

Davon ausgehend werde ich in Abschnitt 1.3 meinen eigenen Ansatz von einem genuin soziologischen abgrenzen. Neben der Soziologie untersuchen natürlich auch andere Forschungsgebiete die mathematischen Praxis mit empirischen Methoden, etwa die Psychologie, die Didaktik der Mathematik oder die Kognitionswissenschaften. Sämtliche dieser Forschungsgebiete weisen somit potentielle Bezüge zu einem empirisch informierten Vorgehen in der Philosophie der Mathematik und auch spezieller zu einer empirisch informierten Erkenntnistheorie auf, da sie sich ebenfalls direkt oder indirekt mit mathematischem Wissen beschäftigen. Mir geht es in dieser Arbeit jedoch um einen speziellen, sozio-empirisch informierten philosophischen Ansatz, weshalb ich mich auf eine systematische Abgrenzung von der Soziologie der Mathematik beschränke.[39]

Die Auswahl der im Folgenden aufgeführten Autoren kann auf der einen Seite nur exemplarisch verstanden werden; auf der anderen Seite macht die relativ spät erfolgte Öffnung der Wissens- und Wissenschaftssoziologie zur Mathematik als Untersuchungsgegenstand hin die Wahl nicht sehr schwer. Zumindest die Zahl programmatisch verschiedener Ansätze ist bisher recht begrenzt, die Anzahl empirischer soziologischer Studien zu diesem Thema ebenfalls noch gering. Ich werde in 1.2.1 auch auf die Gründe für diesen geringen Bestand eingehen. Sowohl bei der Auswahl als auch bei der Rezeption der verschiedenen Positionen orientiere ich mich an einer Arbeit von Bettina Heintz ([53]), sowie in Teilen ergänzend an Christian Greiffenhagens Darstellung in [46].

1.2.1 Übersicht über unterschiedliche Ansätze in der Soziologie des mathematischen Wissens

Drei wichtige Vertreter der frühen, erst in den späten siebziger und achtziger Jahren aufkeimenden Soziologie des mathematischen Wissens sind David Bloor ([11, 12]), Sal

[39]Vgl. auch Abschnitt 1.3.3, außerdem Fußnote 94 mit einigen Anmerkungen zur kognitionswissenschaftlichen Debatte sowie Abschnitt 4.2 für einzelne Querbezüge der Ergebnisse dieser Arbeit zur didaktischen Diskussion.

Restivo ([114]) und Eric Livingston ([74]). Bei den Schriften aller drei Autoren handelt es sich um programmatische Arbeiten, die eine Soziologie des mathematischen Wissens zwar einfordern, aber nicht – zumindest nicht im engeren Sinne einer empirisch gestützten Soziologie – umsetzen.[40]

Sowohl Bloor und Restivo als auch Livingston gehen von der gemeinsamen These aus, dass Mathematik prinzipiell soziologisch zugänglich ist. Diese These war lange Zeit innerhalb und außerhalb der Soziologie nicht akzeptiert, und ist auch heute noch umstritten, was für die weiterhin bestehende Zurückhaltung der Wissens- und Wissenschaftssoziologen gegenüber dem potentiellen Untersuchungsgegenstand Mathematik mitverantwortlich ist. Sie wird durch eine in der Soziologie verbreitete, dort jedoch weitgehend unreflektierte, in erster Linie mathematik*philosophische* Grundhaltung in Frage gestellt: eine sogenannte aprioristische Auffassung mathematischen Wissens[41] und die Annahme einer durch formale Methoden von epistemisch relevanten und soziologisch signifikanten Konflikten bereinigten mathematischen Forschungspraxis, die eine prinzipielle Unmöglichkeit eines fruchtbaren wissenschaftssoziologischen Zugriffs zur Folge haben. Donald MacKenzie formuliert das Problem in [83] folgendermaßen:

> „At the core of mathematics and formal logic is deductive proof. That propositions in these fields can be proved, not simply justified empirically, is at the heart of their claim to provide "harder", more secure, knowledge than the natural sciences. Yet deductive proof, for all its consequent centrality, has attracted remarkably little detailed attention from the sociology of science, the work of David Bloor and Eric Livingston aside. In the social studies of science more widely, the single best treatment of proof remains one that is now forty years old, by the philosopher Imre Lakatos in the 1961 Ph.D. thesis that became the book *Proofs and Refutations.* Indeed, it has often been assumed that there is nothing sociological that can be said about proof, which is ordinarily taken to be an absolute matter.“[42]

Bei Heintz heißt es:

> „Die aprioristische Auffassung schreibt der Mathematik einen epistemischen Sonderstatus zu. Im Gegensatz zum empirischen Wissen der Naturwissen-

[40]Erste empirische Studien erschienen etwa zehn Jahre später, z.B. Maaß [80], Markowitsch [89] oder MacKenzie [83]. Nur ein Teil dieser soziologisch relevanten empirischen Studien wurde aber tatsächlich von Soziologen durchgeführt. Heintz bemängelt zudem, dass diese Studien meist nur (historische) Einzelaspekte der mathematischen Praxis empirisch untersuchen, den Anspruch einer breiteren empirischen soziologischen Auseinandersetzung mit der Mathematik aber nicht einlösen.

[41]Vgl. das folgende Zitat von Heintz.

[42][83, S. 2].

> schaften (und erst recht der Sozialwissenschaften) gilt das mathematische Wissen als unfehlbar. In der Mathematik gibt es keine Falsifikationen und keine Revolutionen. Was einmal bewiesen ist, ist wahr für *immer* und wahr für *alle*. [...] Als apriorisches Wissen ist die Mathematik ein Wissen, das einer soziologischen Erklärung prinzipiell unzugänglich ist.“[43]

Darüber hinaus spricht etwa Greiffenhagen methodische Schwierigkeiten einer *empirischen* soziologischen Untersuchung der mathematischen Praxis an:

> „There is almost a complete absence of anthropological or sociological studies of professional mathematics. In other words, there have been no ‘laboratory studies’ of mathematical practice. One possible reason for this is that in contrast to the experimental sciences, where scientists work together in a designated place using a variety of instruments, mathematicians typically work alone (very often in their office or home–but also on buses and trains), using only pen and paper to do their work. A solitary (silent) mathematician scribbling on a piece of paper might make a less immediate sociological object than a buzzing scientific laboratory where scientists talk to each other and use a number of instruments. The most visible aspects of mathematical work are the symbols that appear on boards or pieces of paper, but it would be difficult to see the sense of these symbols without a few years of training. Observational studies of mathematical practice therefore are inherently difficult.“[44]

Auch Bloor, Restivo und Livingston stellen ihre jeweilige Ausgangsthese von der soziologischen Zugänglichkeit der Mathematik nicht ohne weitere Begründung in den Raum. Hinsichtlich der unterschiedlichen Plausibilisierungsversuche streben die Positionen allerdings stark auseinander: Während Bloor und Restivo den Grund für die soziologische Zugänglichkeit der Mathematik in dem Vorhandensein von Alternativmathematiken sehen und versuchen, einen Sonderstatus der Mathematik durch Beispiele aus der Mathematikgeschichte zu relativieren, versucht der ethnomethologische Ansatz Livingstons gerade, epistemisch exzeptionelle Phänomene der mathematischen Praxis – wie den zwingend anmutenden Charakter mathematischer Beweise oder den vermittelten Grad an Objektivität[45] – als durch alltagspraktische Handlungen innerhalb der erfahrbaren Wirklichkeit

[43] Heintz [53, S. 17 f.]. Die Ausdrucksweise „wahr für immer“ und „wahr für alle“ ist an dieser Stelle allerdings ungenau. So ist z.B. nach Gottlob Frege ein wahrheitswertfähiger Satz stets „für immer“ wahr oder falsch, unabhängig davon, ob er einen mathematischen Sachverhalt ausdrückt oder nicht. Gemeint ist bei Heintz wohl vielmehr die Behauptung, dass mathematische Sätze, die bewiesen sind, von niemandem mehr sinnvoll angezweifelt werden können.

[44] Greiffenhagen [46, Abs. 11].

[45] Vgl. Heintz [53, S. 30].

mathematischer Praxis zu beschreiben. Dabei unterscheiden insbesondere Bloor und Restivo in Bezug auf ihren Untersuchungsgegenstand nicht scharf zwischen „Ethnomathematik“ – d.h. „alltäglichen mathematischen Aktivitäten in verschiedenen Kulturen und Zeiten“ ([53, S. 27]) – und wissenschaftlicher Mathematik.

Heintz und auch Greiffenhagen als moderne Vertreter einer Soziologie mathematischen Wissens sehen sich selbst dagegen eher in der Tradition der konstruktivistischen Wissenschaftssoziologie, wie sie für die Naturwissenschaften bereits wesentlich weiter voran getrieben wurde als für die Mathematik. Begonnen bei Ludwik Fleck ([39]) oder Otto Neurath ([102]) in den dreißiger Jahren über Thomas Kuhn ([65]) in den sechziger Jahren, wird die konstruktivistische Wissenschaftssoziologie der Naturwissenschaften seit den frühen achtziger Jahren besonders prominent von Bruno Latour und Steve Woolgar ([69]) oder Karin Knorr Cetina ([60]) vertreten. Die Leitthese konstruktivistischer Positionen besteht darin, dass die Produktion (natur-)wissenschaftlichen Wissens „sozial konditioniert“ ist.[46] Wissenschaft wird dabei in erster Linie als Handeln aufgefasst. Die Objekte und Fakten wissenschaftlicher Theorien werden durch soziale Prozesse konstruiert, sie existieren bzw. gelten nicht objektiv oder unabhängig von sozialen wissenschaftlichen Praktiken. Das Ziel wissenschaftlichen Handelns in obigem Sinne ist die Herstellung eines größtmöglichen Maßes an Kohärenz, welches wissenschaftlichen Theorien letztlich den Charakter von Objektivität verleiht.[47]

Heintz fasst den von ihr gewählten Ansatz, in Abgrenzung von Bloor, Restivo oder Livingston, als moderatere und substantiellere Reaktion der Soziologie auf Entwicklungen in der Philosophie der Mathematik auf, welche ihrerseits die Unvereinbarkeit mit wissenschaftssoziologischen Methoden langsam aufweichen. Wie auch MacKenzie in obigem Zitat erwähnt, wurde diese Entwicklung insbesondere von Imre Lakatos mit seiner Arbeit *Proofs and Refutations* angestoßen. Die Arbeit erschien 1963/64 zunächst als mehrteiliger Aufsatz und 1976 in leicht überarbeiteter Fassung als Buch,[48] in dem Lakatos erstmals eine systematisch historisierte mathematikphilosophische Theorie mathematischen Wissens formulierte.[49] Ausgehend von der im Anschluss erfolgten Öffnung der Mathematikphilosophie in Bezug auf eine Historisierung ihres Untersuchungsgegenstandes, die wiederum wesentlich später erfolgte als in der Philosophie der Naturwissenschaften, sieht

[46] Heintz [53, S. 102].

[47] Vgl. [53, Abschn. 3.3], insbesondere S. 111 ff. sowie S. 117. Ich gebrauche das Wort „konstruktivistisch“, sofern nichts anderes gesagt wird, im gerade erläuterten Sinne der Wissens- und Wissenschaftssoziologie, nicht im Sinne der Erlanger mathematikphilosophischen Schule nach Paul Lorenzen, die auch als konstruktivistisch bezeichnet wird.

[48] Lakatos [66].

[49] Auf Lakatos’ Theorie gehe ich hier jedoch nicht weiter ein, da es sich dabei nicht um eine explizit soziologische Position handelt.

Heintz einen Ansatzpunkt für die Wissenschaftssoziologie, ohne explizit von der These auszugehen, dass eine substantielle Soziologie der Mathematik tatsächlich möglich ist. Auch bei Heintz spielt der Aspekt des vermeintlichen epistemischen Sonderstatus der Mathematik eine zentrale Rolle für das Forschungsinteresse der Soziologie an der Mathematik. Ähnlich wie Livingston und im Unterschied zu Bloor und Restivo versucht sie nicht, einen epistemischen Sonderstatus der Mathematik zu leugnen, sondern formuliert ihn explizit. Sie beschreibt epistemisch exzeptionelle, intuitiv charakteristische Phänomene der mathematischen Praxis zu Beginn ihrer Untersuchung in einer prätheoretischen soziologischen Terminologie:

> „Eine wissensoziologische Analyse hat [. . .], um nur zwei Beispiele aus der Forschungsagenda der konstruktivistischen Wissenschaftssoziologie zu erwähnen, nicht nur die Bedeutung unterschiedlicher Repräsentationsformen zu untersuchen, sondern zusätzlich der epistemischen Besonderheit der Mathematik Rechnung zu tragen. Dazu gehören insbesondere der konsensuale Charakter der Mathematik und ihre begriffliche Kohärenz. Mit begrifflicher Kohärenz ist die kognitive Einheit der Mathematik gemeint. [. . .]“[50]

Anders als Livingston begreift sie diesen prätheoretischen Phänomenbestand aber nicht als Ergebnis, sondern als Herausforderung für eine substantielle Soziologie der Mathematik. Ziel einer erfolgreichen soziologischen Studie soll sein zu erklären, warum und durch welche (sozialen) Mechanismen diese Phänomene zustande kommen:[51]

> „Was ist der Grund für den (weitgehend) universellen Charakter des mathematischen Wissens? Weshalb werden sich Mathematiker über das Vorhandensein von Fehlern und Beweislücken in der Regel sofort einig? Lässt sich die hohe Universalität der Mathematik restlos auf soziale Faktoren zurückführen oder bleibt ein soziologisch unerklärbarer Rest und wie sähe dieser aus?“.[52]

Die genannten Einzelpositionen weisen ohne Zweifel methodische und methodologische Unterschiede auf. Während Bloors auch als „Edinburgher Schule“ bekanntes *strong pro-*

[50] [53, S. 18].

[51] Dagegen stellt etwa Susanne Prediger, die sich in ihrer Habilitationsschrift ([109]) erklärterweise der Aufgabe angenommen hat, ein reflektierteres Verhältnis zwischen Mathematik*didaktik* und Mathematikphilosophie zu schaffen, die von Heintz weiterhin behauptete epistemische Besonderheit der Mathematik generell in Frage (vgl. [109, Abschn. 1.1.3]). Die zunächst als epistemische Besonderheiten anmutenden Phänomene beschreibt sie in erster Linie als kulturelle Besonderheiten der mathematischen Praxis. Die grundsätzliche Auffassung von Mathematik als (inter-)kulturellem Phänomen, die in der Mathematikdidaktik gemäß Prediger implizit oder explizit recht verbereitet ist (vgl. [108, S. 23]), bietet einen alternativen Erklärungsrahmen für epistemisch bemerkenswerte Charakteristika der Mathematik an, auf den ich in meiner Arbeit aber nicht eingehen werde.

[52] [53, S. 31].

gramme besonders zur Begründung des wissenssoziologischen Blicks auf die Wissenschaft beitrug,[53] steht Livingston für eine Anwendung einer ethnomethodologischen Sicht auf Mathematik als ein sogenanntes Lebenswelt-Paar aus Beweisen und Beweis (vgl. Heintz [53, S. 28–29]). Heintz und auch Greiffenhagen schließen sich in Bezug auf den empirischen Teil ihrer Arbeit methodisch der Ethnographie an: Heintz hat im Jahr 2000 eine der ersten allgemeiner angelegten empirischen soziologischen Studien zur Kultur und Praxis der wissenschaftlichen Mathematik vorgelegt; ihre Arbeit stützt sich auf eine von ihr 1994 durchgeführte ethnographische Feldstudie und qualitative Interviews mit Forschern am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Greiffenhagen hat empirische soziologische Studien zur wissenschaftlichen mathematischen Praxis etwa mittels Videoanalysen durchgeführt; seinen Ansatz bezeichnet er selbst als „Video-Ethnographie“.[54] In der Ethnographie wird die wissenschaftliche Mathematik vor allem als Kultur begriffen, auf die Soziologen einerseits durch verbale Äußerungen der Wissenschaftler Rückschlüsse ziehen können, aber auch durch Beobachtung deren praktischen Handelns. Die Ethnographie ist eine verstärkt auch in der Soziologie der Naturwissenschaften angewandte Methode (vgl. etwa Knorr Cetina [61]).

1.2.2 Zusammenfassende Charakterisierung

Trotz der dargestellten Differenzen kann man sagen, dass sich die Soziologie mathematischen Wissens insgesamt in Richtung einer konstruktivistischen Wissensschaftssoziologie[55] der Mathematik entwickelt hat, deren Zielsetzung, Methoden und Erklärungsanspruch wie folgt charakterisiert werden kann:

(1) Untersuchungsgegenstand sind soziale Prozesse der Wissensproduktion, -beurteilung und -kommunikation in der mathematischen Praxis – darunter fällt in erster Linie die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin.

(2) Untersuchungsziel ist eine wissenschaftssoziologisch-konstruktivistische[56] Phänomenologie der mathematischen Praxis, d.h. eine Analyse insbesondere epistemischer Ausnahmephänomene als Prozesse sozialer Konstruktion.

(3) Zu den Untersuchungsmethoden zählen (historische) Fallstudien, Feldstudien, qualitative Interviews, quantitative empirische Studien.

[53]Vgl. Greiffenhagen [46, Abs. 5] und Heintz [53, S. 23]. Bloors Programm wurde vereinzelt auch explizit wissenschaftstheoretisch adaptiert. Für eine wissenschaftstheoretische Diskussion wissenssoziologischer Positionen vgl. Abschnitt 1.4.2.

[54]Vgl. [46, Abs. 12].

[55]Vgl. Fußnote 47.

[56]Vgl. wieder Fußnote 47.

(4) Es wird der Anspruch erhoben, zu erklären, in welchem Sinne und warum die Mathematik einen epistemischen Sonderstatus besitzt.

Anhand dieser vier Aspekte bietet sich ein kurzer systematischer Vergleich mit den in Abschnitt 1.1.3 dargestellten Charakteristika der analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik an: Der Untersuchungsgegenstand der Soziologie der Mathematik deckt sich nur zum Teil und nur in gewisser Hinsicht mit dem der analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik. Die Soziologie interessiert sich ebenfalls für die Begriffe „mathematisches Wissen" und „mathematische Rechtfertigung" – diesbezüglich fungiert die Philosophie hier auch als Hilfswissenschaft, indem sie die entsprechenden begriffsanalytischen Ergebnisse bereitstellt. Soweit es der Soziologie um die Verwendung dieser Begriffe geht, ist damit deren tatsächliche Verwendung gemeint, z. B. in Form von Wissenszuschreibungen. Dabei geht es sowohl um den Gebrauch durch Mathematiker innerhalb der wissenschaftlichen mathematischen Praxis,[57] als auch den natürlichsprachlichen Gebrauch in Bezug auf die Alltagsmathematik. In der Hauptsache beschäftigt sich die Soziologie der Mathematik jedoch mit den Prozessen, die zur Produktion, Sicherung und Weitergabe dessen, was als „mathematisches Wissen" bzw. „mathematische Rechtfertigung" aufgefasst wird, gehören. Diese Prozesse stellen selbst kein Wissen bzw. keine gerechtfertigten Meinungen dar, sondern führen letztlich erst zu propositionalen Einstellungen, die dann als gerechtfertigt bzw. gewusst bezeichnet werden können.

Entsprechend unterscheiden sich die Untersuchungsmethoden der beiden Disziplinen; während klassische Erkenntnistheoriker der Mathematik sich auf rein analytische Methoden und damit hauptsächlich auf ihre eigenen philosophischen Intuitionen stützen, steht in der modernen Wissenschaftssoziologie die empirische Untersuchung der tatsächliche Forschungs- und Lehrpraxis einer wissenschaftlichen Disziplin im Vordergrund. Das Ziel der Soziologie der Mathematik ist dabei aber nicht die Angabe von adäquaten Wahrheitsbedingungen für Sätze der Form „X weiß, dass p", die letztlich zur Definition der Begriffe „mathematisches Wissen" und „mathematische Rechtfertigung" erhoben werden. Ihre Methodologie erlaubt höchstens die Analyse empirisch adäquater (statt intensional äquivalenter) Bedingungen für tatsächliche Zuschreibungen von Wissen oder Rechtfertigung in der mathematischen Praxis. Daran ist die Soziologie der Mathematik aber nur sekundär interessiert. In erster Linie geht es um die Erstellung einer Phänomenologie der mathematischen Praxis im begrifflichen Rahmen einer umfassenderen wissenschaftssoziologischen Theorie, um den von ihr angestrebten Erklärungsanspruch einzulösen.

[57] Dies gilt speziell für die Wissenschaftssoziologie, entsprechend auch für die Arbeiten von Heintz.

1.3 Sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik

Heintz' Diagnose einer zu schwach ausgefallenen Reaktion der Soziologie auf jüngste Verschiebungen im philosophischen Bild der Mathematik gilt noch immer auch für die umgekehrte Richtung: Die Reaktion der Mathematikphilosophen auf die Soziologie der Mathematik. Erst in jüngster Zeit befassen sich mathematikphilosophische Arbeiten nicht nur vereinzelt, sondern auch im Rahmen von weitreichenderen internationalen Forschungsprojekten mit Ergebnissen der empirischen Sozialforschung zur wissenschaftlichen und alltäglichen mathematischen Praxis.[58]

In diesem Abschnitt werde ich den meiner Arbeit zugrundeliegenden methodischen Ansatz vorstellen, dessen Programm explizit die Einbeziehung soziologischer Forschungsergebnisse zur mathematischen Praxis einfordert, und den ich als „sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik“ bezeichne. Wie ich in 1.3.1 genauer ausführe, verstehe ich diesen Ansatz als Vorschlag für eine wissenschaftsphilosophisch motivierte Erkenntnistheorie der Mathematik. In 1.3.2 bis 1.3.5 gehe ich genauer auf die Methode, Zielsetzung und den Untersuchungsgegenstand einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik im Allgemeinen und meiner Arbeit im Besonderen ein. Wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten arbeite ich dabei entsprechende Charakteristika heraus, die ich in 1.3.6 zusammenfassend darstelle und denen aus 1.1.3 und 1.2.2 gegenüberstelle.

1.3.1 Erkenntnistheorie der Mathematik als wissenschaftsphilophisch motiviertes Projekt

Eine sozio-empirisch informierte Philosophie der Mathematik ist wissenschaftsphilosophisch motiviert. Sie versteht sich als Teil einer umfassenden Wissenschaftsphilosophie der Mathematik, also in diesem Sinne als eine Erkenntnistheorie der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin. Nach Paul Moser lassen sich generell drei Projekte einer wissenschaftsphilosophisch motivierten Erkenntnistheorie unterscheiden. Diese Unterscheidung hilft auch dabei, das Programm des sozio-empirischen Ansatzes zu verdeutlichen. In Bezug auf eine Theorie mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung lautet sie wie folgt:[59]

[58] Vgl. hierzu Abschnitt 1.5.
[59] Vgl. Moser [95].

(a) Das **semantische** Projekt mit der Frage: Was bedeutet es, dass X die mathematische Aussage p gerechtfertigterweise glaubt bzw. weiß?

(b) Das **explanatorische** Projekt mit der Frage: Unter welchen Bedingungen liegt mathematisches Wissen bzw. Rechtfertigung vor?
Und schließlich

(c) Das **evaluative** Projekt mit der Frage: Nach welchen Kriterien können wir entscheiden, ob mathematisches Wissen bzw. Rechtfertigung vorliegt?

Der sozio-empirisch informierte Ansatz stellt nun neben der allgemeinen Forderung, dass die Kriterien unter (c) möglichst korrekte Evaluationen gemäß (a) und (b) liefern sollen, insbesondere die Forderung auf, dass eine adäquate Erkenntnistheorie der Mathematik sowohl konsistent mit philosophischen Intuitionen als auch empirisch reflektiert bezüglich der tatsächlichen mathematischen Praxis sein soll. Diese zweite Forderung hat zur Folge, dass sowohl die tatsächlichen, in der mathematischen Praxis verwendeten epistemischen Zuschreibungskriterien durch (c) angemessen abgebildet als auch spezielle Gegebenheiten der Forschungspraxis bei der Formulierung von (b) berücksichtigt werden müssen. Zudem werden (b) und vor allem (c) in Hinblick auf (a) aufgewertet; die klassische analytische Erkenntnistheorie konzentriert sich hingegen stark auf (a) und lässt insbesondere (c) meist außen vor. In Bezug auf die erstgenannte Forderung ist dem sozio-empirisch informierten Ansatzes darüber hinaus daran gelegen, die Beziehungen zwischen (a), (b) und (c) genauer zu untersuchen. Dass Evaluationen gemäß (c) möglichst korrekt gemäß (a) und (b) sein sollen, erlaubt nur indirekte logische Rückschlüsse von (c) auf (a) und (b). Als philosophisch befriedigend wird hier aber erst eine Analyse angesehen, welche die Verbindungen zwischen den gegebenenfalls unterschiedlichen Antworten auf die unter (a), (b) und (c) genannten Fragen auch inhaltlich genauer abbildet.

Eine sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik erweitert daher die Datenbasis für Schritt 2 des in Abschnitt 1.1.1 beschriebenen iterativen Dreischritts der begrifflichen Modellierung explizit um empirische Resultate aus soziologischen Untersuchungen zur mathematischen Praxis. Die philosophischen Intuitionen werden in Schritt 3 einer Phänomenologie der tatsächlichen mathematischen Praxis gegenübergestellt. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, dass die mittels einer philosophischen Analyse gewonnenen Wahrheitsbedingungen von Sätzen der Form „X weiß, dass p“ oder „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p“ für mathematische Aussagen p mit der Bedeutung von entsprechenden Zuschreibungen in der mathematischen Praxis verglichen und gegebenenfalls geeignet modifiziert werden können. Mit der Modifikation wird angestrebt, dass die Verwendung der Begriffe „Wissen“ und „Rechtfertigung“ in der mathematischen Praxis die analytisch gewonnenen Wahrheitsbedingungen für „X weiß, dasss p" und „X glaubt gerechtfertigt, dass p" in der Regel erfüllt.

Eine entsprechende Spezifikation des allgemeinen Dreischritt-Schemas der begrifflichen Modellierung nach Löwe und Müller entwickle ich in den folgenden Abschnitten. Die erste Spezifikation betrifft eine Einschränkung des Untersuchungsgegenstandes im Vergleich zur allgemeinen Erkenntnistheorie der Mathematik.

1.3.2 Formalisierbarkeitsorientierte Wissens- und Rechtfertigungskonzeptionen im Fokus

Im Rahmen meiner Arbeit spezialisiere ich mich auf die Untersuchung der epistemischen Rolle formaler und formalisierbarer mathematischer Beweise,[60] d.h. ihrer Relevanz für das Vorliegen von mathematischem Wissen und mathematischer Rechtfertigung. Ich werde also keine allgemeine Analyse der Begriffe „mathematisches Wissen" und „mathematische Rechtfertigung" vornehmen, sondern mich von vornherein auf beweisbasierte Rechtfertigung – d.h. der Grund, der X' Überzeugung, dass p, rechtfertigt, ist ein mathematischer Beweis für p – und auf beweisbasiertes Wissen, also einen Wissensbegriff, der eine entsprechende Rechtfertigungsbedingung notwendig beinhaltet, beschränken. Mir geht es insbesondere weder um mathematisches Wissen noch um mathematische Rechtfertigung aufgrund spontaner Eingebungen des epistemischen Subjektes, oder aufgrund der Berufung auf Tradierung oder eine Autorität. Die Einschränkung auf einen bestimmten Typ von Rechtfertigungskonzeptionen trifft insbesondere auf Schritt 1 des Dreischrittes zu. Die Einschränkung auf Konzeptionen beweisbasierten Wissens wird besonders in Schritt 2 deutlich: Um meinen Interessenschwerpunkt in den empirischen Untersuchungen zu realisieren, habe ich ausschließlich Wissenszuschreibungen praktizierender Mathematiker untersucht, die aufgrund von Beweisen getätigt werden, welche das epistemische Subjekt anführt.[61]

Auch unabhängig von der speziellen Fokussierung auf die epistemische Rolle formaler und formalisierbarer Beweise ist die damit verbundene Betonung der Rolle epistemischer Rechtfertigung für eine Erkenntnistheorie der Mathematik sinnvoll. Ganz allgemein kann nämlich plausibel gemacht werden, dass für eine Erkenntnistheorie der Wissenschaften der Rechtfertigungsbegriff eine wesentlich wichtigere Rolle als der Wissensbegriff spielt.

[60] Sofern nichts anderes gesagt wird, verwende ich die Ausdrücke „formale Ableitung" und „formaler Beweis" im Sinne des Begriffes einer deduktiven formallogischen Ableitung aus einer Prämissenmenge, vgl. S. vii.

[61] Vgl. auch Abschnitt 1.3.4.

Diese Sichtweise vertritt etwa Laurence BonJour sogar für die allgemeine Erkenntnistheorie:

> „In fact, for all its prominence, both philosophically and commonsensically, the concept of knowledge is, in my judgement, a seriously problematic concept in more than one way. So much so that it is, I believe, best avoided as far as possible in sober epistemological discussion – as paradoxical as that may sound. [...] I will largely concern myself here with justification rather than knowledge. My conviction [...] is that such an approach is adequate to [...] all of the central issues of traditional epistemology.“[62]

Er begründet dies unter anderem mit den folgenden beiden Argumenten:

> 1.) „It is generally though not universally agreed that one necessary condition for knowledge is the possession by the belief in question of an adequate *degree* of epistemic justification or warrant in at least roughly the sense adumbrated above, that of there being a reason or basis for thinking that the belief is true (or likely to be true). But *what* degree of justification? How strong does such reason have to be to satisfy this requirement? To require with many historical philosophers that the reason be strong enough to *guarantee* the truth of the belief seems to restrict knowledge to a few simple propositions of mathematics and logic, together *perhaps* with simple claims about one's own private sensory and introspective experience. Faced with the obvious incompatibility between this result and the vastly more extensive knowledge ascriptions of enlightened common sense, epistemologists have generally adopted the view (sometimes referred to as the 'weak conception' of knowledge) that there is some lesser degree or level of justification, lower than a guarantee of truth but presumably higher than mere 51 percent probability, that is required for a belief to count as 'knowledge'. The obvious question, however, is just what this crucial level of justification actually is or how it might be determined or specified. [...] Indeed, the sole reason for thinking that there actually is a specific level of this sort is that its existence is apparently the only way in which there can be a reasonably precise concept of knowledge that does not lead at once to the skepticism generated by the more traditional view (the 'strong conception' of knowledge).“[63]

[62] [14, S. 21–23]
[63] [14, S. 21–22]

2.) „An important further source of such reasons is the notorious 'Gettier Problem', which is, I believe, largely if not entirely an artifact of the idea of a weaker level of justification that is still adequate for 'knowledge'. It is also worth asking what the significance of a 'magic' level of justification short of a guarantee of truth could possibly be. Even if we had reached such a level in a particular case, there would still be no reason not to seek still higher levels of justification for any claim whose truth was a matter of serious interest, nor would increases in justification become in any clear way less valuable once the 'magic' level had been obtained. This again seems to call into question whether the concept of knowledge as understood by the weak conception could possibly have any real importance."[64]

BonJours Argumente können zumindest für die Rechtfertigungsbedingung in einer Definition naturwissenschaftlichen Wissens leicht verstärkt werden: Im Falle von Argument 1 fallen die „gewussten" Sätze der Naturwissenschaften aufgrund ihrer Theorieabhängigkeit, ihrer Allgemeingültigkeit, ihrer inhaltlich-begrifflichen Komplexität und der Vielfalt möglicher empirischer Fehlerquellen offenbar unter jene Sätze, die sich nicht im Allgemeinen mit hundertprozentiger Sicherheit rechtfertigen lassen. Auch im Falle von Argument 2 lassen sich gerade die Wissenschaften ganz allgemein durch ein Streben nach größtmöglicher Sicherheit und Rechtfertigung ihrer Aussagen charakterisieren, was mit der Idee eines ausgezeichneten epistemischen Schwellenwertes unterhalb des theoretischen Maximums erst recht nicht vereinbar ist. Während eine epistemologische Reflektion wissenschaftlicher Methoden also eine Bereicherung des epistemischen Rechtfertigungsbegriffes in Aussicht stellt, scheint der Wissensbegriff zumindest für die Naturwissenschaften uninteressant. Eine epistemologische Reflektion naturwissenschaftlicher Methoden stellt damit keine Bereicherung des Wissensbegriffes in Aussicht. Anzunehmen, dass sich solche Überlegungen auf die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin *per se* nicht übertragen lassen, ist *prima facie* theoretisch unfundiert, will man nicht von vornherein behaupten, mathematische Rechtfertigung sei ein epistemischer Ausnahmefall. Genau diese Behauptung werde ich im Folgenden hinterfragen;[65] insbesondere möchte ich zeigen, dass sie auch empirisch nicht plausibel ist.

[64] [14, S. 23]

[65] Auch BonJour betont ja in dem obigen Zitat, dass wenn überhaupt nur einige sehr einfache Aussagen der Mathematik mit hundertprozentiger Sicherheit gerechtfertigt werden können.

1.3.3 Das Drei-Schritte-Programm (DSP)

Nach dieser Eingeschränkung meines Untersuchungsgegenstandes möchte ich nun die Spezifikation des in 1.1.1 skizzierten dreischrittigen, iterativen Schemas der begrifflichen Modellierung zu einem Drei-Schritte-Programm (kurz: DSP) für eine sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik vorstellen, welches die Vorgehensweise meiner Arbeit beschreibt.

Schritt 1 – vortheoretische Analyse Im ersten Schritt geht es um eine philosophische Analyse möglicher Lesarten eines sogenannten formalisierbarkeitsorientierten Kriteriums für epistemische Zuschreibungen (im Folgenden kurz: FKE, vgl. genauer Abschnitt 2.1), d.h. eines Kriteriums für das Vorliegen von mathematischem Wissen oder epistemischer Rechtfertigung, welches Rekurs auf den Begriff des formalen bzw. formalisierbaren mathematischen Beweises nimmt. Diese Lesarten werden insbesondere vor dem Hintergrund allgemeiner erkenntnistheoretischer Wissens- und Rechtfertigungskonzeptionen untersucht. Schritt 1 ist also, insbesondere im ersten Iterationsdurchgang, vortheoretisch in Bezug auf die konkrete Fragestellung dieser Arbeit, dabei aber nicht völlig theoriefrei, sondern durch die betrachteten erkenntnistheoretische Ansätze geprägt.[66]

Schritt 2 – sozio-empirische Phänomenologie Im zweiten Schritt werden zwei empirische soziologische Studien zu den in der mathematischen Praxis verwendeten epistemisch relevanten Begrifflichkeiten durchgeführt und deren Ergebnisse vor dem Hintergrund der in Schritt 1 erarbeiteten philosophischen Begriffsschemata analysiert. Die Ergebnisse, die ich in meiner Arbeit behandle, habe ich unter Berücksichtigung der folgenden Leitfrage ausgewählt:

> Nach welchen systematischen Kriterien werden Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis vorgenommen, und welche allgemeinen Konzeptionen mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung werden dabei gegebenenfalls verwendet?

Mein besonderes Interesse galt dabei wiederum der Rolle von Formalisierbarkeit. Um diesen Schwerpunkt bereits in den empirischen Untersuchungen zu realisieren, habe ich auch hier ausschließlich Wissenszuschreibungen untersucht, die aufgrund von Beweisen getätigt werden, welche das epistemische Subjekt anführt. In einer ersten quantitativen Umfrage-Studie habe ich in der Lehre oder Forschung tätige Mathematiker mittels eines anonymen Online-Fragebogens zu ihrem abstrakten Wissens- und Beweisbegriff sowie

[66] Vgl. auch Abschnitt 1.1.1.

zu ihrer Beurteilung von Wissenszuschreibungen in konkreten Szenarien befragt. Nachfolgend und aufbauend auf die Ergebnisse der ersten Studie habe ich eine qualitative Interviewstudie mit internationalen, führenden Forschungsmathematikern durchgeführt.

In meiner Arbeit beschränke ich mich damit, wie bereits betont, ausdrücklich auf soziologische Studien, weshalb ich hier von einer sozio-empirischen Erkenntnistheorie der Mathematik spreche. Diese Einschränkung ist natürlich, wie bereits betont, für den allgemeinen methodischen Ansatz einer empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik nicht notwendig; es ist durchaus wünschenswert, im Rahmen von Schritt 2 auch Ergebnisse aus anderen empirischen Wissenschaften wie der Psychologie und den Kognitionswissenschaften hinzuzuziehen.

Schritt 3 – Theoriebildung durch Überlegungsgleichgewicht Im dritten Schritt strebe ich ein Überlegungsgleichgewicht zwischen der philosophischen Analyse formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen, wie sie in Schritt 1 durchgeführt wurde, und den empirischen Ergebnissen aus Schritt 2 zur Verwendung von Wissenszuschreibungen auf der Grundlage von Beweisen in der mathematischen Praxis an. Dazu vergleiche ich zunächst die Ergebnisse aus Schritte 1 und 2, und entwickle auf der Grundlage dieses Vergleichs zwei alternative, sozio-empirisch informierte Lesarten eines FKE. Eine sozio-empirisch informierte Lesart eines FKE sollte dabei möglichst empirisch-deskriptiv adäquat in dem Sinne sein, dass sie von angemessenen Zuschreibungen beweisbasierten Wissens (oder je nachdem beweisbasierter Rechtfertigung) in der mathematischen Praxis in der Regel erfüllt wird.[67]

Den Terminus „Überlegungsgleichgewicht“ verwende ich dabei in Anlehnung an seine Bedeutung als Methode der Erkenntnistheorie bzw. Ethik, allerdings nicht ganz analog. In der Erkenntnistheorie[68] bzw. in der Ethik nach Rawls ist mit „Überlegungsgleichgewicht“ die Abstimmung von intuitiv anerkannten Einzelfällen von gerechtfertigten Meinungen (in der Erkenntnistheorie) bzw. guten Handlungen (in der Ethik) und als gültig angesehenen Rechtfertigungs- bzw. ethischen Prinzipien gemeint. Das Streben nach einem solchen Gleichgewicht zwischen intuitiven Bewertungen von singulären Aussagen und allgemeinen Prinzipien leitet die Analyse der Wahrheitsbedingungen von Aussagen über den Rechtfertigungsstatus bzw. über das Gute. Ich verstehe „Überlegungsgleichgewicht“ hier in zweierlei Hinsicht in einem weiteren Sinne. Erstens meine ich damit insbesondere ein interdisziplinäres Überlegungsgleichgewicht, das vor allem auch zwischen der Verwendung erkenntnistheoretisch relevanter Begriffe durch praktizierende Mathematiker in

[67] Vgl. S. 17.
[68] Vgl. etwa Grundmann [49, S. 35 f.], ebenso die Ausführungen in Abschnitt 1.4.1.

konkreten Situationen der mathematischen Praxis und philosophischen Intuitionen über epistemische Prinzipien für die Mathematik vermitteln soll. Damit fordere ich zweitens ein Überlegungsgleichgewicht nicht nur zwischen den Wahrheitsbedingungen singulärer Wissens- und Rechtfertigungszuschreibungen und den semantischen Konsequenzen allgemeiner epistemischer Prinzipien für den Wahrheits- und Rechtfertigungsbegriff, sondern auch zwischen Wahrheits- und Zuschreibungsbedingungen. Diese Gegenüberstellung von Wahrheits- und Zuschreibungsbedingungen kann aus sprachphilosophischer und sprachwissenschaftlicher Sicht als Aufweichung der Grenze zwischen Semantik und Pragmatik angesehen werden. Eine solche prinzipielle Aufweichung entspricht der heute üblichen Sichtweise in der Debatte um die Existenz und den möglichen Verlauf einer solchen Grenze, auch wenn die Ansichten zum zulässigen Grade dieser Aufweichung auseinandergehen (vgl. Abschnitt 1.3.4). Im Falle einer wissenschaftsphilosophisch motivierten Erkenntnistheorie der Mathematik würde die Annahme einer zu scharfen Grenze das Spektrum einer Analyse des Wissens- und Rechtfertigungsbegriffs, welches neben rein semantischen auch explanatorische und evaluative Aspekte umfasst (vgl. S. 15), offenbar unzulässig einschränken.

Wie zu Beginn von Abschnitt 1.1 dargestellt, ist der iterative Charakter des Theoriebildungsprozesses gemäß eines solchen Drei-Schritte-Programmes wesentlich, d.h. die drei Schritte müssen in mehrfacher Abfolge durchlaufen werden, bis mit einem zufriedenstellenden Ergebnis zu rechnen ist. Zwischen der in Kapitel 2 dargestellten Analyse verschiedener formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen im Rahmen von Schritt 1 lagen entsprechend mehrere Iterationsdurchgänge, wobei Schritt 2 dabei unter anderem aus dem Rückgriff auf eigene Erfahrungen aus der mathematischen Praxis bestand. Auch zwischen der Durchführung der beiden empirischen Untersuchungen lag ein weiterer Iterationsdurchgang, der das Design der zweiten empirischen Studie maßgeblich geprägt hat.[69] Die Darstellung in den Kapiteln 2, 3, 4 und 5 verzichtet allerdings auf eine explizite Beschreibung mancher Durchgänge dieser Iterationen zugunsten der Lesbarkeit und argumentativen Übersichtlichkeit.

1.3.4 Bemerkungen zu Schritt 2 und 3

Untersuchungsgegenstand von Schritt 2 des DSP sind konkrete Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis, also sprachliche Handlungen, die mehr oder weniger angemessen sein können relativ zu den Spielregeln der mathematischen Gemeinschaft: Ein Zuschreiber Y handelt in einer bestimmten Weise, indem er sagt „X weiß, dass die mathe-

[69] Vgl. etwa den Anfang von Abschnitt 3.4.

matische Aussage p wahr ist“.[70] Über den angemessenen Umgang mit Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis wird die Bedeutung der verwendeten epistemischen Begriffe erst intersubjektiv festgelegt. Ob eine Handlung in einer bestimmten Gemeinschaft nun als angemessen oder gerechtfertigt gilt, ist stärker durch soziale Mechanismen als durch explizite verbale Regeln festgelegt. Hieraus ergibt sich eine natürliche Motivation dafür, zur genaueren Bestimmung der Bedeutung epistemischer Begrifflichkeiten innerhalb der mathematischen Praxis quantitative und qualitative Untersuchungstechniken der empirische Soziologie einzusetzen.

In Schritt 2 von DSP geht es also nicht darum, ausgehend von einem theoretischen Wissens- oder Rechtfertigungsbegriff empirisch zu untersuchen, ob einzelne Wissenszuschreibungen der Form „Y bejaht, dass X weiß, dass p“ oder „X weiß, dass p“ tatsächlich wahr oder falsch sind. Gerade umgekehrt dient die empirische Untersuchung der tatsächlichen Zuschreibungsbedingungen für Wissenszuschreibungen praktizierender Mathematiker einer Bedeutungsanalyse von Wissens- und Rechtfertigungsbegriffen der mathematischen Praxis: Die empirisch gefundenen Zuschreibungskriterien sollen in Schritt 3 als Kandidaten für Wahrheitsbedingungen für Sätze der Form „X weiß, dass p“ und „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p“ für mathematische Aussagen p diskutiert werden.

Ich werde im Folgenden einige philosophische Grundannahmen explizit formulieren, die dieses Vorgehen möglich und plausibel machen. Anschließend diskutiere ich kurz prinzipielle Fragen in Bezug auf die Auswahl und Abfolge quantitativer *versus* qualitativer empirischer Erhebungs- und Auswertungsmethoden für die konkrete Umsetzung von Schritt 2.

Methodologische Voraussetzungen und philosophische Grundannahmen

Der Rückgriff auf Zuschreibungskriterien für Wissen auch im Rahmen einer Diskussion von Wahrheitsbedingungen für „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p“ ist unter der Annahme sinnvoll, dass der Wissensbegriff der mathematischen Praxis eine Rechtfertigungsbedingung beinhaltet. Wie bereits in Abschnitt 1.3.2 diskutiert, mache ich gerade diese Annahme ganz explizit. Wie sich noch zeigen wird, legen die empirischen Ergebnisse sogar nahe, dass bei Wissenszuschreibungen unter Mathematikern der Rechtfertigungsbegriff eine dominantere Rolle als der Wissensbegriff selbst spielt.

Eine fruchtbare Analyse der Zuschreibungsbedingungen für Wissen und Rechtfertigung in der mathematischen Praxis setzt zudem methodologisch voraus, dass Mathematiker

[70] Vgl. Kompa [63, S. 16–17].

epistemische Zuschreibungen systematisch tätigen. Darüber hinaus mache ich explizit die folgenden (sprachphilosophischen) Annahmen:

1. Ein wesentlicher Teil der Bedeutung, inklusive der Wahrheitsbedingungen, von epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis ist durch deren tatsächlichen Gebrauch unter praktizierenden Mathematikern bestimmt.
2. Praktizierende Mathematiker bejahen eine epistemische Zuschreibung genau dann, wenn sie den Inhalt dieser Zuschreibung für wahr halten.

Die erste Annahme ist im Hinblick auf die Unterscheidung zwischen Semantik und Pragmatik zulässig: Eine Aufmerksamkeitsverschiebung hin zum tatsächlichen Gebrauch von Wissenszuschreibungen impliziert keine zwangsläufige Beschränkung auf eine „reine Pragmatik“, welche die Semantik als autonome Komponente außen vorlässt. Auch im Allgemeinen werden Wahrheitsbedingungen nicht als autonom im Hinblick auf Sprachpragmatik betrachtet.[71] Der „nur-dann“-Teil der zweiten Annahme kann als eine Version einer der Griceschen konversationalen Maximen aufgefasst werden: Sag nichts von dem Du glaubst dass es falsch ist, die unter die Kategorie der Qualität des „cooperative principle of conversation“[72] fällt. Der „wenn-dann“-Teil mag dagegen im Allgemeinen nicht gelten, reduziert sich aber im Falle meiner empirischen Forschungsprojekte, einer Umfrage- und einer Interviewstudie, zu einer plausiblen methodologischen Prämisse.

Quantitative vs. qualitative empirische Methoden

Terminologisch verwende ich die Unterscheidung zwischen quantitativen und qualitativen empirischen Methoden hier in Bezug auf die Art der erhobenen Daten bzw. das *Erhebungsverfahren* im Sinne der empirischen Soziologie – sie allgemeiner in Bezug auf empirische Forschungsprozesse zu verwenden (also ohne Unterscheidung zwischen Datenerhebungs-, Datenaufbereitungs- und Datenauswertungsverfahren) macht wenig Sinn, da die Begriffe dann sehr unscharf werden; im Prinzip sind an jedem empirischen

[71] Vgl. z. B. Carston [20, S. 47–48]. Die sprachphilosophische Debatte über die Beziehung zwischen Wahrheitsbedingungen (*truth conditions*) und Zuschreibungsbedingungen (*conditions of assertibility*) wurde in den 30er Jahren u.a. durch Arbeiten Freges, Russells, des späten Wittgenstein und John Deweys aufgeworfen und später prominent etwa von David Lewis, Wilfried Sellars, Robert Brandom und Michael Dummett weitergeführt (vgl. z.B. [73], [116], [16] und [34, 35], und für einen Bezug der allgemeinen Diskussion auf spezielle mathematikphilosophische Fragestellungen etwa die kurze zusammenfassende Darstellung in Benacerraf & Putnam [9, S. 24 f.]). Grice hat in diesem Zusammenhang die Rolle der Pragmatik gegenüber der reinen Semantik betont (vgl. [47] und auch [48]). Vgl. für die zeitgenössische Weiterentwicklung der Debatte speziell für den Fall der Analyse des Wissenbegriffes beispielhaft DeRose [30] und Pritchard [111].

[72] Siehe Grice [47].

Forschungsprozess sowohl quantitative als auch qualitative Schritte beteiligt.[73] Ein Erhebungsverfahren bezeichne ich nun als *quantitativ*, wenn es als *Mess*instrument für die Ausprägung (Werte) verschiedener Merkmale (Variablen) der Studienteilnehmer dient.[74] Dabei spielt es zunächst keine Rolle, ob diese Ausprägungen auf einer nominal-, ordinal- oder intervallskalierten Skala gemessen werden. Quantitative Erhebungsverfahren sind allgemein auf numerische, d.h. in der Regel auf statistische Auswertungsverfahren hin ausgerichtet.[75] Die klassische standardisierte Umfragestudie mit vorgegebenen Antwortkategorien ist ein solches quantitatives Verfahren. Ein *qualitatives* Erhebungsverfahren zeichnet sich dagegen besonders durch seine Einzelfallbezogenheit aus – zudem ist es stark auf textinterpretatorische Auswertungsverfahren hin ausgerichtet, so dass gerade keine vorgegebenen Antwortkategorien verwendet und damit auch keine numerischen Daten erhoben werden. Die Einzelfallanalyse anhand von Dokumentmaterialen oder eine Interviewstudie mit offenen Fragen, z.B. die in Abschnitt 4 vorgestellten Leitfadeninterviews, sind Beispiele für qualitative Studien.[76]

Die Verwendung größtenteils quantitativer Methoden in der ersten durchgeführten Studie hat zwei Gründe. Zum Einen ist sie der Vermutung geschuldet, dass die Art und Weise, wie einzelne praktizierende Mathematiker etwa über mathematisches Wissen denken, stark von individuellen Faktoren beeinflusst und vielleicht sogar eine persönliche Stilfrage ist. Im Gegensatz dazu erscheint die mathematische Praxis, zumindest eingeschränkt auf bestimmte Teilbereiche (Schulmathematik, universitäre Mathematik, Forschungsmathematik, einzelne Forschungsgruppen, einzelne Fachgebiete), recht homogen und einheitlich. Nun ist es ein in der Soziologie wohlbekanntes Faktum, dass die Art und Weise, wie Menschen über bestimmte Dinge denken, nicht notwendigerweise mit der Art und Weise übereinstimmen muss, wie sie in Bezug auf diese Dinge als Mitglied einer sozialen Gemeinschaft handeln. Einzelne Äußerungen über die innere Einstellung mögen bezüglich konkreter Situationen nur eine Handlungstendenz andeuten.[77] Die Ergebnisse einer quantitativen Umfrage sollten somit klarere Erkenntnisse bezüglich der Homogenität der Verwendung von Wissenszuschreibungen, vor allem innerhalb von bestimmten Untergruppen von praktizierenden Mathematikern, liefern, als eine rein qualitative Studie.

[73] Vgl. Mayring [93, S. 19].

[74] Vgl. Klammer [59, S. 77 ff.] oder Mayring [93, S. 17].

[75] Es ist jedoch durchaus üblich, einem quantitativen Erhebungverfahren auch ein qualitatives Auswertungsverfahren folgen zu lassen. Man spricht etwa bei der *Analyse* einer nominalskalierten Messung von einer qualitativen im Sinne einer *klassifikatorischen* Analyse (vgl. [93, S. 17]). Auch im Falle der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Clusteranalyse handelt es sich um eine klassifikatorische Analyse quantitativ erhobener Daten.

[76] Vgl. Mayring [92, S. 25 ff. und S. 66 ff.] oder [93].

[77] Vgl. [59, S. 220].

Trotzdem wurden bereits in der ersten Umfragestudie in Form von Freitextkommentaren auch qualitative Daten erhoben, die die quantitativen Daten als Kontrolldaten ergänzen und als Interpretationshilfen fungieren sollten.

Zum Anderen ging der empirischen Studie ein theoretischer Schritt voraus, der in der Entwicklung der Fragestellung und der Auswahl und Kategorisierung der zu testenden Variablen (Fragen) und Ausprägungen (Antwortvorgaben), also dem Design des Fragebogens, bestand. Dieser Schritt war ein introspektiv auf philosophischen Intuitionen (wie sie in Schritt 1 von DSP analysiert wurden) und eigenen Erfahrungen mit der mathematischen Forschungspraxis basierter qualitativer Analyse-Schritt im Gesamtprozess. Die qualitativ-analytisch gefundene Vorkategorisierung des Untersuchungsgegenstandes sollte mit Hilfe von Daten, die durch ein quantitatives Erhebungsverfahren gewonnen wurden, empirisch gefestigt werden, bevor ein weiterer empirischer, qualitativer Erhebungs- oder Analyseschritt erfolgt.[78] Im Anschluss an die Umfragestudie habe ich auf Grundlage der dort gewonnenen Ergebnisse einen Interviewleitfaden für eine qualititative Interviewstudie entwickelt.[79] Die Ergebnisse der Interviewstudie konnten so die Ergebnisse der Umfragestudie klären und vertiefen.

1.3.5 Normative und deskriptive Aspekte von DSP

Um den gerade vorgestellten Ansatz zusammenfassend zu charakterisieren, bedarf es noch einer kurzen Diskussion der Frage nach dem mit DSP einhergehenden normativen[80] Anspruch.

DSP ist wissenschaftsphilosophisch motiviert, was sich insbesondere in dem damit verbundenen normativen Anspruch niederschlägt. Weder eine zu stark normative, eine falsch verstandene normative, noch eine rein deskriptive Wissenschaftsphilosophie sind

[78] Dies entspricht dem bei Mayring beschriebenen Drei-Phasen-Schema im empirischen Forschungsprozess, nach dem auf eine qualitative Analyse in Bezug auf „Fragestellung, Begriffs- und Kategorienfindung sowie Analyseinstrumentarium“ unter Zuhilfenahme quantitativer Erhebungsverfahren ein erneuter qualitativer Analyseschritt folgt (vgl. Mayring [93, S. 20]).

[79] Qualitative Interviews mit praktizierenden Mathematikern wurden unter anderem auch von den Wissenschaftssoziologen Bettina Heintz und Donald MacKenzie sowie dem Philosophen Jörg Markowitsch zu unterschiedlichen Zwecken und mit unterschiedlichen Methoden durchgeführt. Heintz führte 19 Leitfadeninterviews am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn, die sie in [53] ausgewertet hat. MacKenzie interviewte führende Wissenschaftler aus den Bereichen Informatik und Künstlicher Intelligenz zu Fragen der Beziehungen zwischen Computern und mathematischen Beweisen und der Rolle sogenannter Computerbeweise; die Ergebnisse diskutiert er in [83]. Markowitsch führte insgesamt 11 Interviews mit acht Mathematikern zur Frage nach implizitem Wissen in der Mathematik, deren Ergebnisse in seine Dissertationsschrift [89] einflossen. Seine Interviews orientierten sich methodisch jedoch nicht an streng soziologischen Maßstäben; ihnen lag auch kein standardisierter Leitfaden, sondern jeweils ein rein personenspezifischer Fragenstock zugrunde (vgl. [89, S. 4–5]).

[80] Vgl. S. 2, insbesondere Fußnote 18.

wünschenswert. Einer richtig verstandenen normativen Wissenschaftsphilosophie geht es etwa nach Esfeld nicht darum, „von außen Normen an die wissenschaftliche Praxis heranzutragen“, sondern zur Klärung bestimmter wissenschaftsimmanenter Fragestellungen mittels der „begrifflichen Werkzeuge der Wissenschaftsphilosophie“ beitragen zu können.[81] Eine zu stark deskriptive Wissenschaftsphilosophie vernachlässigt die notwendige interaktiv-philosophische Komponente:

> „Dennoch ist es fraglich, ob es sinnvoll ist, für eine rein deskriptive Wissenschaftstheorie einzutreten. Eine rein deskriptive Wissenschaftstheorie nutzt die Teilnahme an der wissenschaftlichen Gemeinschaft, die erforderlich ist, um wissenschaftliche Theorien zu verstehen, nicht, um an der Fortentwicklung der betreffenden Praktiken selbst mitzuwirken.“[82]

Eine zu stark normative Wissenschaftsphilosophie läuft dagegen Gefahr, sich gänzlich von ihrem Gegenstandsbereich loszulösen. Löwe und Müller formulieren dies in [76] ganz allgemein als Dilemma einer „Philosophie von X“:

> „One of the hardest methodological challenges in philosophy is to give an account of what one is doing in establishing a “philosophy of” something that is already there. Philosophical theory building often starts out with a normative agenda, which threatens to loose touch with what the theory is to be about. On the other hand, a purely descriptive approach can be criticised for failing to be distinctively philosophical. Is there a safe passage for “philosophy of X”, generally, between the Scylla of normative subject-blindness and the Charybdis of merely descriptive non-philosophy?“[83]

Die sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik beschreitet als Teilaspekt einer umfassenderen Wissenschaftsphilosophie der Mathematik mit DSP gerade einen vertretbaren Mittelweg zwischen einer stark normativen und einer rein deskriptiven Wissenschaftsphilosophie: Einerseits trägt sie zwar deskriptive Züge, da es in Schritt 2 von DSP um eine Abbildung der tatsächlichen Verwendung epistemischer Begrifflichkeiten in der mathematischen Praxis und um eine Analyse dieser Verwendungsweise durch Angabe systematischer Zuschreibungskriterien für mathematisches Wissen und mathematische Rechtfertigung geht. Diese spezielle deskriptive Komponente, also das Verständnis der tatsächlichen epistemischen Praktiken in der mathematischen Praxis, ist aber andererseits eine notwendige Bedingung für eine Erkenntnistheorie der Mathematik

[81] Vgl. [37, S. 220–221].
[82] [37, S. 220].
[83] [76, Abschn. 3].

im Rahmen einer richtig verstandenen normativen, interaktiven Wissenschaftsphilosophie.[84] In Schritt 3 fließen dabei nicht die in Schritt 2 erhobenen reinen empirischen Daten ein, sondern die philosophisch geprägte Interpretation und Analyse der daraus relativ zum begrifflichen Hintergrund des prätheoretischen Apparates gewonnenen stabilen sozio-empirischen Phänomene. Dieser begriffliche Apparat ist auch hier, insbesondere im ersten Iterationsschritt, der der klassischen analytischen Erkenntnistheorie. In Schritt 3 werden schließlich aus den in Schritt 1 analytisch begründeten, formalisierbarkeitsorientierten philosophischen Konzeptionen beweisbasierten mathematischen Wissens und beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung diejenigen herausgearbeitet (und dabei ggf. geeignet modifiziert), die der Forderung nach empirisch-deskriptiver Adäquatheit[85] am nächsten kommen. In diesem Sinne handelt es sich bei DSP und entsprechend bei einer (sozio-)empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik nicht um ein rein deskriptives Unternehmen, sondern um einen zumindest moderat normativen Ansatz.

1.3.6 Zusammenfassende Charakterisierung

Im Sinne der vier allgemeinen Charakteristika in Bezug auf Untersuchungsgegenstand, -ziel , -methode und Anspruch, die ich für die analytische Erkenntnistheorie und die Soziologie der Mathematik in den vorangegangenen Abschnitten formuliert habe, und im Vergleich zu diesen, lässt sich für den Ansatz der sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik nun zusammenfassend Folgendes festhalten:

(1) Ähnlich wie in der analytischen Erkenntnistheorie und im Unterschied zur Soziologie der Mathematik sind die epistemischen Begriffe „mathematisches Wissen“ und „mathematische Rechtfertigung“ Untersuchungsgegenstand einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik, allerdings nicht nur als philosophisch reflektierte theoretische Begriffe, sondern auch als verwendete Begrifflichkeiten der wissenschaftlichen mathematischen Praxis. Diese Abgrenzung zur Soziologie der Mathematik wird besonders in Schritt 1 von DSP deutlich. Darüber hinaus werden auch soziale Prozesse der Wissensproduktion, -beurteilung und -kommunikation in der mathematischen Praxis, wenn auch nicht zum direkten, so aber zum indirekten Untersuchungsgegenstand, da anzunehmen ist, dass diese die

[84] Vgl. hierzu wieder Esfeld:

> „Das Hauptargument für eine normative Wissenschaftstheorie [...] ist dementsprechend dieses: Es ist sinnvoll, die Teilnahme [an der wissenschaftlichen Gemeinschaft], die zum Verstehen von Wissenschaft erforderlich ist, zu nutzen, um zur Weiterentwicklung der betreffenden normativen Praktiken beizutragen.“ ([37, S. 220])

[85] Vgl. S. 17 und 21.

Verwendung epistemischer Begriffe beeinflussen. Die Abgrenzung von der klassischen analytischen Erkenntnistheorie vollzieht sich damit besonders in Schritt 2.

(2) Die Untersuchungsziele bestehen darin, notwendige und zusammen hinreichende Bedingungen für die tatsächliche Verwendung der unter (1) genannten Begriffe unter Fachexperten der wissenschaftlichen mathematischen Praxis anzugeben, um anschließend einen konstruktiven Vergleich dieser Bedingungen mit den Ergebnissen einer klassischen philosophischen Analyse des mathematischen Wissens- und Rechtfertigungsbegriffes – unter besonderer Beachtung formalisierbarkeitsorientierter Konzeptionen – durchzuführen. Idealerweise wird dabei ein Überlegungsgleichgewicht zwischen den rein analytischen philosophischen Überlegungen und denen zu den empirischen Ergebnissen angestrebt; konkret soll auf der Grundlage des Vergleiches schließlich eine erkenntnistheoretisch und wissenschaftsphilosophisch vertretbare und zugleich hinsichtlich der mathematischen Praxis reflektierte Konzeption mathematischer Rechtfertigung und mathematischen Wissens formuliert werden.

(3) Zu den Untersuchungsmethoden zählen neben dem Rückgriff auf Introspektion und philosophische Intuitionen zur Analyse der Bedingungen für die Verwendung der epistemischen Begriffe auch Methoden der empirischen Soziologie; in meinem Fall sind dies insbesondere Umfrage- und Interview-Studien unter praktizierenden Mathematikern. Die Auswertung dieser Studien erfolgt vor dem Hintergrund der Ergebnisse der philosophischen Analyse formalisierbarkeitsorientierter Wissens- und Rechtfertigungskonzeptionen für die Mathematik.

(4) Der grundsätzliche Anspruch einer analytischen Erkenntnistheorie der Mathematik, korrekte von nicht korrekten Verwendungsweisen epistemischer Begriffe zu unterscheiden, wird auch in der sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik in Teilen aufrecht erhalten. Allerdings wird die klassische Begründung dieses Anspruchs durch den Verweis auf Apriorität und den alleinigen Primat philosophischer Intuitionen, und damit die Absolutheit von „korrekt“, in Frage gestellt und durch den Bezug auf die tatsächliche mathematische Praxis relativiert. Damit wird insbesondere angestrebt, den wissenschaftsphilosophisch relevanten Informationsgehalt der begrifflichen Analyse durch den Rückbezug auf die tatsächliche Verwendung epistemischer Begrifflichkeiten in der mathematischen Praxis zu erhöhen. Damit soll auch ein Fundament für eine adäquate Diskussion über die Frage nach einem epistemischen Sonderstatus der Mathematik als wissenschaftlicher Praxis geschaffen werden. Gerade in diesem Sinne versteht sich eine sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik nicht als rein deskriptives Unternehmen,

sondern im gerade diskutierten Sinne als Teilaspekt einer moderat normativen Wissenschaftsphilosophie.

Mit Blick auf Aspekt (4) lässt sich der sozio-empirisch informierte Ansatz in Bezug auf die in 1.1 vorgestellte analytische Erkenntnistheorie der Mathematik und die in 1.2 vorgestellte Soziologie des mathematischen Wissens genauer wie folgt einordnen: Im Falle der klassischen analytischen Erkenntnistheorie basieren die unter Schritt 2 des allgemeinen Modells der begrifflichen Modellierung herangezogenen Phänomene naturgemäß bereits in starkem Maße auf dem jeweiligen philosophisch-begrifflichen Vorverständnis. Ein echter, konstruktiver Vergleich dieses Vorverständnisses mit der mathematischen Praxis ist dadurch schwer möglich. Damit fehlt aber eine geeignete Basis für eine wissenschaftsphilosophisch sinnvolle Interaktion mit dem Gegenstandbereich, der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin. Die klassische analytische Erkenntnistheorie ist aus wissenschaftsphilosophischer Sicht in diesem Sinne als zu stark normativ anzusehen. Eine reine Soziologie des mathematischen Wissens stellt dagegen aus wissenschaftsphilosophischer Sicht ein in erster Linie deskriptives Projekt dar. Die Erweiterung der Datenbasis im Rahmen von DSP liefert hier eine geeigenete Mischform eines deskriptiven und normativen philosophischen Ansatzes: DSP beinhaltet eine adäquate deskriptive Komponente und lässt so eine Interaktion mit dem Untersuchungsgegenstand, der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin, zu. Auswahl und Analyse der herangezogenen empirischen Phänomene aus der mathematischen Praxis sind dabei weiterhin vom prätheoretischen philosophischen Vorverständnis geleitet, jedoch nicht in zu hohem Maße oder gar ausschließlich durch dieses geprägt.

1.4 Argumente für und gegen die Wahl des speziellen Ansatzes

Nachdem das Programm der sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik vorgestellt ist, möchte ich noch einmal detaillierter auf die Frage eingehen, warum ich für die Problemstellung meiner Arbeit – auch entgegen einem prominenten Einwand gegen die Einbeziehung von Ergebnissen soziologischer empirischer Untersuchungen – gerade diesen speziellen Ansatz gewählt habe.

1.4.1 Ein metaepistemologisches Argument: Weites Überlegungsgleichgewicht

In [49] diagnostiziert Thomas Grundmann hinsichtlich der Phänomenologie der aktuellen Grundsatzdebatten in der allgemeinen Erkenntnistheorie folgendes Defizit der Methode der klassischen Begriffsanalyse: Die philosophischen Intuitionen bezüglich prätheoretischer epistemischer Begriffe sind widerstreitend. Dabei stehen sich nicht nur Intuitionen von Vertretern konkurrierender philosophischer Positionen – etwa eines erkenntnistheoretischen Internalismus und Externalismus – unvereinbar gegenüber.[86] Auch Intuitionen ein und desselben Autors erweisen sich immer wieder als nicht konsistent.[87] Grundmann schlägt daher vor, im Rahmen einer Metaepistemologie die Methode um einen Kontrollfaktor zu erweitern. Er fordert, dass ein „weites Überlegungsgleichgewicht"[88] auf der Grundlage einer breiteren Datenbasis als traditionell üblich angestrebt wird:

> „Ich glaube, daß sich das Problem daraus ergibt, daß die konservative Begriffsanalyse eine zu eingeschränkte Datenbasis verwendet. Es genügt nicht, wenn wir unsere wohlüberlegten Intuitionen über die Extension eines Begriffs in möglichen Situationen mit Aussagen über die Intension abgleichen. Wenn wir das tun, dann wenden wir im Grunde die Methode des engen Überlegungsgleichgewichtes auf die Begriffsanalyse an. Wir sollten stattdessen die Datenbasis einfach erweitern und die Begriffsanalyse im Sinne eines weiten Überlegungsgleichgewichtes betreiben."[89]

Grundmann bietet eine Art innerphilosophische „kohärenz-theoretische" Erweiterung der klassischen Datenbasis an. Neben philosophischen Intuitionen bezüglich der Verwendung epistemischer Begriffe in faktischen oder kontrafaktischen konkreten Situationen und dem intuitiven philosophischen Vorverständnis epistemischer Prinzipien sollen Intuitionen zur systematischen Rolle dieser Begriffe sowie bestimmte grundlegende philosophische Hintergrundintuitionen[90] herangezogen werden.

Grundmanns allgemeine metaepistemologische Kritik sowie seinen Lösungsansatz eines erweiterten Überlegungsgleichgewichts greife ich für den speziellen Fall der Erkenntnistheorie der Mathematik auf. Mit DSP schlage ich jedoch eine andere Erweiterung der Datenbasis vor:[91] Es soll versucht werden, ein Überlegungsgleichgewicht zwischen der klassischen theoretisch-philosophischen Analyse des mathematischen Wissensbegriffes auf der einen und der Phänomenologie hinsichtlich der tatsächlichen mathematischen

[86] Dies führt bereits zu einem methodologischen Problem, denn die Einschränkung der Datenbasis auf Intuitionen von Vertetern derselben erkenntnistheoretischen Grundposition führt zwangsläufig zu erkentnistheoretisch irrelevanten Ergebnissen. Vgl. etwa Cummins [28].

[87] Vgl. [49, S. 23 ff.].

[88] [49, S. 50].

[89] [49, S. 50].

[90] Für den Begriff der epistemischen Rechtfertigung ist dies bei Grundmann etwa der Rechtfertigungsskeptizismus.

[91] Dies schließt eine zusätzliche Erweiterung im Sinne von Grundmann natürlich nicht aus.

Praxis auf der anderen Seite herzustellen. Die Datenbasis für die Herstellung des Überlegungsgleichgewichtes wird also nicht um weitere philosophische Intuititionen erweitert, sondern um die Phänomenologie der konkreten Verwendungen von Begriffen wie „Wissen“, „Rechtfertigung“ und „Beweis“ durch Experten aus der mathematischen Praxis.

Es ist nicht ganz selbstverständlich, dass das Aufgreifen des von Grundmann vorgebrachten allgemeinen metaepistemologischen Kritikpunktes für den von mir untersuchten speziellen Fall überhaupt zulässig ist. Tatsächlich scheint sich die ursprüngliche Motivation von Grundmanns Argument, nämlich eine festgefahrene Debatte um widerstreitende philosophisch geschulte Intuitionen bezüglich der zu analysierenden epistemischen Begriffe, auf den ersten Blick für den Fall der Mathematik in Luft aufzulösen: Zumindest im Sinne einer traditionellen Erkenntnistheorie der Mathematik mag man mathematisches Wissen recht einhellig als unproblematischen Fall einer *internalistischen, invariantistischen* Konzeption von Wissen[92] *a priori* ansehen, die wesentlich auf einem Begriff von Rechtfertigung durch formale mathematische Beweise basiert.

Dieses Bild relativiert sich bei genauerer Betrachtung zumindest einer breiteren gegenwärtigen Diskussion jedoch: Neben seit Beginn der 80er Jahre aufgekommenen empiristischen und naturalistischen Positionen in der Erkenntnistheorie der Mathematik[93] werden Philosophen zunehmend auch auf interdisziplinär relevante Forschungsergebnisse aus den Kognitionswissenschaften aufmerksam, die den althergebrachten Status mathematischen Wissens in Frage stellen.[94] Daher mögen zwar naive formalisierbarkeitsorientierte Kriterien für epistemische Zuschreibungen, die sich eng am Begriff des formalen Beweises orientieren, tatsächlich eine in sich konsistente philosophische Theorie mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung liefern. Damit ist über ihre Güte im Vergleich zu konkurrierenden Lesarten oder alternativen Analysen von Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens oder mathematischer Rechtfertigung jedoch noch

[92] Vgl. Kapitel 2 Abschnitte 2.2 und 2.3.1.

[93] Die Position Philip Kitchers, die er in [58] entwickelt, ist eines der bekanntesten Beispiele.

[94] Wie bereits erwähnt, werde ich auf die kognitionswissenschaftliche Debatte im Rahmen meiner Arbeit nicht näher eingehen. Beispielhaft erwähnen möchte ich hier die Arbeiten von Lakoff & Nunez [67], Keith Stenning [121] und Helen De Cruz et al. [29]. Lakoff und Nunez könnten mit ihrer Theorie einer „*embodied mathematics*“, in welcher der Begriff einer „konzeptuellen Metapher“ den des mathematischen Beweises in seiner zentralen Rolle für den Erwerb mathematischer Erkenntnis ablöst, ein kognitionswissenschaftliches Gegenstück zu einer empiristischen philosophischen Theorie mathematischen Wissens liefern. Stenning bietet einen kognitionswissenschaftlichen Ausgangspunkt für eine Theorie der Entwicklung (insbesondere des Lernens) von mathematischem Wissen, in welcher die Logik eine zentrale Rolle spielt. Im Unterschied zu klassischen Konzeptionen, die auf dem Begriff der deduktiven, formal korrekten syntaktischen Ableitung aufbauen, liegt der Schwerpunkt bei Stenning jedoch auf Seiten der Semantik. De Cruz et al. untersuchen die kognitive Basis arithmetischen Denkens. Sie betreiben damit eine Art Grundlagenforschung auf dem Gebiet der kognitionswissenschaftlichen Erforschung mathematischen Denkens, die insbesondere für die philosophische Diskussion über den ontologischen und epistemischen Status von Zahlen von Bedeutung ist.

nicht entschieden. Mindestens ein zusätzlicher Prüfstein[95] besteht vor dem Hintergrund einer moderat normativen Wissenschaftsphilosophie[96] in der prinzipiellen Erfüllbarkeit solcher naiver Kriterien in Bezug auf die mathematische Forschungspraxis. Eine solche Erfüllbarkeitsbedingung stellt zumindest die Güte naiver FKE offenbar in Frage. Diesen Punkt werde ich in den Abschnitten 2.3.1 und 5.1.2 genauer diskutieren. Hier sei illustrierend nur erwähnt, dass etwa folgende Setzung:

> X weiß, dass p gdw. X eine formale Ableitung von p aktuell mental repräsentiert,

im konkreten Fall zu der unplausiblen Annahme verpflichtet, dass Mathematiker zumindest prinzipiell in der Lage sind, auch hochkomplexe und mehrere hundert Seiten lange Ableitungsketten aktuell mental zu repräsentieren.

1.4.2 Ein wissenschaftstheoretischer Einwand: Sozioepistemischer Relativismus

Als Rechtfertigung für die spezielle Erweiterung der Datenbasis der klassischen Begriffsanalyse im Rahmen von DSP habe ich unter anderem folgendes Argument angeführt:[97] In meiner Arbeit versuche ich, eine prinzipiell in eine umfassendere Wissenschaftsphilosophie der Mathematik einbettbare Erkenntnistheorie der Mathematik zu betreiben. Dadurch kommen generell auch wissenschaftsphilosophische Überlegungen bezüglich meiner Methode in Frage. Diese Überlegungen führen aber zu der moderat normativen Ansicht, dass die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin bei der Auswahl der Datenbasis für eine epistemologische Analyse der Begriffe „mathematisches Wissen" und „mathematische Rechtfertigung" geeignet berücksichtigt werden sollte. Gegen diese Argumentation lassen sich Einwände formulieren, die ich hier kurz darstelle. Anschließend werde ich erläutern, warum sich die sozio-empirische Erkenntnistheorie der Mathematik diesen Einwänden meiner Ansicht nach entziehen kann.

Bei der konkreten Auswahl einer erweiterten Datenbasis, insbesondere hinsichtlich der Zulässigkeit einer Miteinbeziehung empirischer soziologischer Ergebnisse über die wissenschaftliche mathematische Praxis, bewegt man sich aus wissenschaftstheoretischer Sicht jedoch allzubald im Fahrwasser des sogenannten Historizismus. Dabei handelt es sich um eine wissenschaftstheoretische Position, die im Wesentlichen von Thomas Kuhns *Structure of Scientific Revolutions* ([65]) ihren Ausgang nahm. C. Ulises Moulines charakte-

[95] Bei Grundmann besteht ein solcher, wie bereits erwähnt (vgl. Fußnote 90), in einer adäquaten Diagnose des erkenntnistheoretischen Skeptizismus.
[96] Vgl. Abschnitt 1.3.5 sowie Fußnote 18 auf Seite 2.
[97] Vgl. insbesondere Abschnitt 1.3, S. 15 f.

risiert in [96] den wissenschaftstheoretischen Historizismus allgemein in Abgrenzung zur klassischen Wissenschaftstheorie:

> „[. . .] a) eine Theorie ist nicht einfach eine Gesamtheit von Grundsätzen; b) ihr Bezug zur Erfahrung ist völlig verschieden von den Annahmen der klassischen Wissenschaftstheoretiker, seien sie Induktivisten oder Falsifikationisten, und schließlich c) wenn eine Theorie, die als 'besser' eingestuft wird, eine andere, ältere Theorie ablöst, so ist die Beziehung zwischen beiden nicht die einer Reduktion [. . .].“[98]

In der allgemeinen Wissenschaftstheorie wird nun der Historizimus im Bereich der Erkenntnistheorie der Wissenschaften durchaus kritisch diskutiert, da er einen Relativismus zur Folge haben kann. Moulines nennt den spezifisch aus historizistischen Gedanken zur Wissenschaftstheorie entstandenen Relativismus einen *sozioepistemischen Relativismus*:

> „Die 'natürliche Nebenwirkung' des Historizismus in der Wissenschaftstheorie war keine eigentliche historizistische Epistemologie, sondern eher [. . .] der soziologistische Relativismus in bezug auf die wissenschaftlichen Erkenntnisse, d.h. die allgemeine Idee, nach der alle grundlegenden Begriffe zur Beschreibung wissenschaftlicher Erkenntisse wie *Wahrheit*, *Begründung*, *Rationalität*, *Realität* etc. nur in Abhängigkeit von bestimmten Kulturen oder Gemeinschaften Gültigkeit haben. [. . .] Für [den Relativisten] ist irgend eine Aussage, die in einer Kultur K wahr ist oder rational begründet, nicht unbedingt wahr oder begründet in einer anderen Kultur K'. Man darf auch keineswegs annehmen, dass es eine höhere Instanz gibt, die uns erlaubt zu entscheiden, wer recht hat. Die Aussage 'Die Erde ist flach' kann in unserer westlichen Kultur gut und gerne falsch sein; wenn eine Gruppe Ureinwohner in Neuguinea oder sonst wo glaubt, sie sei wahr, dann ist sie auch wahr, Punktum. [. . .] Wir werden diese besondere Art des Relativismus 'sozioepistemischen Relativismus' nennen, sofern er sich einerseits auf die grundsätzlichsten *epistemischen* Begriffe bezieht und sofern es sich andererseits bei den Entitäten, bezüglich welcher diese Begriffe relativiert werden, um *soziale* Entitäten handelt.“[99]

Die Bezeichnung „sozioepistemischer Relativismus“ für eine derartige wissenschaftstheoretische Denkweise wird von Moulines eingeführt, gebräuchlicher ist die Bezeichnung „sozialer Konstruktivismus“, wobei das konstruktivistische Moment hier allerdings wieder

[98] [96, S. 102].
[99] [96, S. 122 f.], Hervorhebungen im Original.

im Sinne einer wissenschaftstheoretischen Adaption des Programmes der konstruktivistischen Wissenschaftssoziologie, und nicht im Sinne von Lorenzens Erlanger Schule in der Philosophie der Mathematik aufzufassen ist.[100]

Als Grundpostulat des sozioepistemischen Relativismus formuliert Moulines:

> „Für einen beliebigen wissenschaftlichen Satz p ergeben die Aussagen 'p ist wahr' oder 'p ist begründet' in Wirklichkeit keinen Sinn; was Sinn ergibt, ist 'p ist wahr-in-K' oder 'p ist begründet-in-K', wobei K eine beliebige Kultur ist und die Ausdrücke 'wahr-in-K' und 'begründet-in-K' als nicht weiter analysierbare Prädikate interpretiert werden müssen."[101]

In der Folge ist „die einzige Studie, die in bezug auf wissenschaftliche Theorien sinnvoll ist, die soziologische Studie der *Benutzer* dieser Theorien".[102] Moulines konstatiert, dass sich die Wissenschaftstheorie „damit vollständig in einer Soziologie oder Ethnologie der Wissenschaften bzw. wissenschaftlichen Gemeinschaften auf[löst]".[103] Als Beispiel für eine explizit sozioepistemisch-relativistische Position nennt Moulines Mary Hesses [54], worin diese eine wissenschaftstheoretische Neuformulierung und Begründung des Bloorschen *strong programme* der Wissenssoziologie vornimmt.

Neben der scheinbaren Konsequenz, dass eine klassische Wissenschaftstheorie aus Sicht des sozioepistemischen Relativismus nicht mehr möglich ist, ist diese Position nach Moulines im Wesentlichen aus folgendem Grund problematisch: Ein konsequenter sozioepistemischer Relativist muss auch die Gültigkeit seines eigenen Forschungsansatzes und seiner eigenen Forschungsergebnisse relativieren, da das relativistische Grundpostulat allgemein für jede Form von Wissenschaft gilt. Diese Form selbstreferentieller Forschung weist Moulines kategorisch und zumindest an zitierter Stelle ohne weitere Argumentation als „apologetische Sackgasse" und „ärgerlichen und grotesken Ausdruck des relativistischen Geistes, der an einigen Instituten der Geisteswissenschaften einiger westlicher Universitäten herrscht" zurück.[104]

Ich werde im Folgenden kurz darlegen, warum ich den von mir vertretenen methodischen Ansatz der sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik an entscheidender Stelle in einem anderen Sinne verstehe als den von Moulines kritisierten wissenschaftstheoretischen Relativismus. Der von mir vertretene Ansatz versucht erstens nicht, die Behauptung zu rechtfertigen, der einzig mögliche sinnvolle mathematische Wissens- oder Rechtfertigungsbegriff sei ein deskriptiv an der mathematischen

[100] Vgl. Abschnitt 1.2 Fußnote 47.
[101] [96, S. 126].
[102] [96, S. 124 f.], Hervorhebung im Original.
[103] [96, S. 125].
[104] Vgl. [96, S. 127].

Praxis modellierter, und beschränkt sich zweitens auch nicht auf eine solche deskriptive Modellierung. Damit instantiiert er gerade nicht Moulines in der Tat selbstreferentielles relativistisches Grundpostulat, und spricht auch der klassisch verstandenen Epistemologie der Mathematik nicht die Existenzberechtigung ab. Wie ich im Vorangegangenen bereits erläutert habe, beinhaltet mein Ansatz in Form von Schritt 2 des Drei-Schritte-Programmes DSP zwar eine Modellierung der in der mathematischen Praxis tatsächlich verwendeten epistemischen Begrifflichkeiten. Allerdings geschieht diese Modellierung auf Grundlage der vorangegangenen philosophischen Analyse möglicher Lesarten solcher (in meinem Fall formalisierbarkeitsorientierter) Begriffe (Schritt 1), und im abschließenden Abgleich mit diesen (Schritt 3). Sie soll dazu dienen, die philosophische Debatte und ihren eigentlichen Untersuchungsgegenstand, die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin, wieder näher aneinander heranzuführen; die Notwendigkeit dieses Schrittes wird aber gerade durch Rekurs auf das eigentliche Ziel einer moderat normativen philosophischen Theorie plausibel gemacht. Die Modellierung der durch praktizierende Mathematiker tatsächlich verwendeten epistemischen Begrifflichkeiten dient dazu, einen Startpunkt festzumachen, an dem der Kontrollmechanismus einer klassisch analytisch verstandenen, wissenschaftstheoretisch motivierten Erkenntnistheorie der Mathematik überhaupt erst sinnvoll einsetzen kann. Erst muss klar sein, wie etwa der Wissenbegriff der Praxis aussieht, um feststellen zu können, inwieweit er sich von philosophisch fundierten Wissenskonzeptionen unterscheidet und wie er gegebenenfalls geeignet korrigiert werden könnte.

Auch halte ich es für etwas voreilig, wenn nicht sogar kurzsichtig, historizistisch orientierten wissenschaftstheoretischen Programmen einen unbedingten sozioepistemischen Relativismus im Sinne von Moulines vorzuwerfen: Eine wissenschaftstheoretische Position im Geiste des Historizismus, die etwa die These verteidigt, die Bewertung wissenschaftlicher Hypothesen erfolge abhängig von der jeweiligen Wissenschaftsgemeinschaft, muss sich nicht dazu verpflichten, den Wahrheitsbegriff zu relativieren. Eine Schlussfolgerung könnte vielmehr sein, dass der klassische Wahrheitsbegriff im tatsächlichen wissenschaftlichen Diskurs zunächst nur eine untergeordnete Rolle spielt, und er dort durch relative Begriffe ersetzt wird. Dies wirft aber gerade die interessante Frage auf, in welcher Beziehung diese relativen Begriffe zu einem klassischen Wahrheitsbegriff stehen, und inwiefern der klassische Wahrheitsbegriff die (Weiter-)Entwicklung der evaluativen Terminologie der Wissenschaftspraxis beeinflusst.

1.5 Verwandte Ansätze

Eine Reihe von Autoren betonen aus ganz unterschiedlichen, teilweise über spezielle Fragen der Mathematikphilosophie hinausgehenden Beweggründen die Rolle empirischer, auch speziell soziologischer Studien für eine Erkenntnistheorie der Mathematik. Ihre Zahl ist dabei vor allem in den letzten 15 Jahren deutlich angestiegen. Darüber hinaus wurde eine ebenfalls wachsende Zahl von sogenannten *practice-based approaches* innerhalb der internationalen Philosophie der Mathematik entwickelt, darunter erkenntnistheoretisch-naturalistische, wissenschaftstheoretisch-historizistische, phänomenologische, begriffsmodellierende und experimentell-erkenntnistheoretische Ansätze. Die sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik, die wie in Abschnitt 1.3.3 ausgeführt als Spezialfall eines Begriffsmodellierungs-Ansatzes gemäß Löwe & Müller [76] aufgefasst werden kann, fällt darunter. Die Arbeiten lassen sich zwar nur teilweise durch einen systematischen methodologischen Überbau verbinden;[105] sie eint jedoch die grundsätzliche Fokussierung auf Mathematik als Praxis, die mit unterschiedlichen Methoden der Wissenschaftsforschung, Soziologie, Didaktik, Psychologie und Kognitionswissenschaften untersucht werden kann.

Einige Beispiele für solche Arbeiten sind Markowitsch [89] zur Rolle impliziten Wissens für die mathematische Forschungspraxis, MacKenzies soziologische Studie [83] zu mechanisiertem, computergestütztem Beweisen, Lengs Arbeit [71] über die Umsetzung der in Lakatos' *Proof and Refutations* ([66]) beschriebenen Beweismethodologie in der modernen Forschungsmathematik, sowie Corfields Programm (vgl. insbesondere [26]) zur Identifizierung der essentiellen Mittel und Ziele (*means and ends*) aktueller mathematischer Forschungspraxis.[106] Den Einfluss sozialer Faktoren der mathematischen Praxis auf Natur und Gestalt mathematischer Beweise und dessen Auswirkung auf das philosophische Projekt einer Analyse des mathematischen Beweisbegriffes diskutieren etwa Goethe [45] und Chateaubriand [22]. Prediger versucht in ihrer Habilitationsschrift [109] eine mathematikphilosophische Unterfütterung einer mathematikdidaktischen Konzepti-

[105] Vertreter entsprechender Ansätze haben sich etwa im Rahmen des internationalen Forschungsnetzwerkes *PhiMSAMP* und der internationalen Tagungsreihe „*PMP – Perspectives of Mathematical Practice*“ zusammengeschlossen. „PhiMSAMP“ steht als Abkürzung für „Philosophy of Mathematics – Sociological Aspects and Mathematical Practice“; es handelt sich hierbei um ein von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördertes Netzwerk unter der Leitung von Prof. Dr. Benedikt Löwe (Amsterdam) und PD Dr. Thomas Müller (Utrecht), in dessen Rahmen diverse internationale Tagungen und Workshops zum Thema abgehalten wurden und dessen Ergebnisse kürzlich als Buch ([77]) erschienen sind. Die vorliegende Arbeit ist in großen Teilen im Rahmen von PhiMSAMP entstanden.

[106] Auf einen Ansatz von Brendan Larvor [68], die Arbeiten von Mary Leng und David Corfield nachträglich methodologisch zu verknüpfen, komme ich im folgenden Abschnitt 1.5.1 zu sprechen.

on von Mathematik als (inter-)kulturellem Produkt.[107] Löwe und Müller [75, 78, 76] fordern kontextsensitive Konzeptionen mathematischen Wissens ein, die insbesondere die in der tatsächlichen mathematischen Praxis auftretenden sozialen Faktoren berücksichtigen. Mit ihrem bereits in Abschnitt 1.1.1 vorgestellten Modell der begrifflichen Modellierung (*conceptual modelling*) schlagen sie zudem einen allgemeinen Rahmen für methodologische Diskussionen innerhalb der Philosophie der Mathematik vor. Aberdein untersucht in [1] Möglichkeiten, die Argumentationsformen von Beweisen, wie sie in der tatsächlichen mathematischen Praxis von Bedeutung sind, mit Mitteln der informellen Logik zu klassifizieren. Muntersbjorn diskutiert in [101] das Konzept des mathematischen Fortschrittes, welches ihr in theoretischen philosophischen Diskussionen oft als stark normiert und verfremdet erscheint. Sie umreißt daher in der genannten Arbeit erste Schritte einer stärker an der tatsächlichen, historischen und interkulturellen Entwicklung der mathematischen Praxis orientierten Neuausrichtung dieses Konzepts.

Auf einen Teil der genannten Arbeiten gehe ich im Laufe meiner weiteren Untersuchungen noch genauer ein.[108] In diesem Abschnitt werde ich speziell zwei Ansätze vorstellen, die meinem eigenen Ansatz mit Blick auf die verwendeten Methoden sehr verwandt erscheinen, aber dennoch klare Unterschiede aufweisen. Ich werde daher eine geeignete systematische Abgrenzung vornehmen, die auch dem Zweck dient, meinen Ansatz aus unterschiedlichen Blickwinkeln erneut zu beleuchten. Vorstellen werde ich zum einen den dialektisch-phänomenologischen Ansatz in der Philosophie der Mathematik, wie er ausgehend von den Arbeiten von Imre Lakatos vertreten wird. Zum anderen widme ich mich hier dem sehr jungen Ansatz der experimentellen Philosophie in der allgemeinen Erkenntnistheorie. Beide Ansätze verwenden auch empirische Methoden, um ihren jeweiligen Untersuchungsgegenstand zu erschließen. Den wissenschaftstheoretisch-historizistischen Ansatz, der meinem Entwurf einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik wohl am nächsten ist, habe ich bereits im vorangegangenen Abschnitt diskutiert und versucht, meinen Ansatz gegen eine prominente Nebenwirkung einer historizistischen Erkenntnistheorie der Wissenschaften, den sozioepistemischen Relativismus, zu verteidigen.

1.5.1 Dialektische Philosophie der Mathematik

Ausgehend von Imre Lakatos' *Proofs and Refutations* stellt Brendan Larvor in [68] den allgemeinen Ansatz einer modernen phänomenologischen Philosophie der Mathematik

[107] Vgl. auch [108], [110], siehe Fußnote 51.

[108] Vgl. insbesondere die Diskussion der Arbeiten zur begrifflichen Modellierung in einer „Philosophie von X" von Löwe und Müller in Kapitel 2 Abschnitt 2.3 sowie Kapitel 5 Abschnitt 5.1.

vor, den er als „dialektische Philosophie der Mathematik“ (*dialectical philosophy of mathematics*) bezeichnet. Larvor argumentiert dafür, dass dialektische Positionen in seinem Sinne zumindest implizit seit den 1990er Jahren in der Philosophie der Mathematik vertreten werden. Neben den Charakteristika des allgemeinen Ansatzes diskutiert er dazu konkrete Arbeiten von Yehuda Rav, von Mary Leng und von David Corfield. Leng antwortet darauf in ihrem Aufsatz [70] mit einer Darstellung ihres eigenen phänomenologischen Ansatzes, den sie in Anlehnung an Tragesser [124] als abgeschwächte Version der von Larvor formulierten dialektischen Position beschreibt.

Larvor charakterisiert den Ansatz der dialektischen Philosophie der Mathematik wie folgt: Der dialektische Philosoph beschäftigt sich, anders als ein klassischer Vertreter einer *armchair philosophy* (einer reinen Philosophie „aus dem Lehnstuhl“), gemäß einer phänomenologischen Vorgehensweise zuerst eingehend mit der Disziplin Mathematik selbst, bevor er philosophische Erörterungen darüber anstellt. Sein Ziel ist es, herauszufinden, was die Mathematik an sich selbst, den „mathematischen Standpunkt“, auszeichnet. Dabei geht er von der dialektischen Annahme aus, dass die Mathematik eine Art „innere Logik“ besitzt, oder anders formuliert, dass mathematische Forschung eine innere Entwicklungsgeschichte aufweist, die entlang ihres Forschungsgegenstandes durch Rationalitätsprinzipien geleitet ist:

> „The phenomenologist takes up a point of view and studies its logical constitution as it were ‘from the inside’. [...] We are interested in the ‘point of view’ belonging to mathematics itself. [...] [C]hanges in the body of mathematics normally take place for mathematical reasons. The dialectical philosopher of mathematics assumes the rationality and integrity of mathematical inquiry [...]. Notice that the object of study is mathematical *development* rather than truth or validity.“[109]

Ein schwacher phänomenologischer Ansatz lässt sich, wie Mary Leng es formuliert, daneben einfach dadurch motivieren, dass ein Philosoph der Mathematik sich auch mit dem auseinandersetzen muss, was in der tatsächlichen mathematischen Forschungspraxis passiert:

> „The phenomenological philosopher of mathematics starts by taking a good look at mathematics, and only then asks, and tries to answer, philosophical questions about the discipline. [...] The phenomenological approach is motivated by the simple claim that any philosopher of mathematics worth

[109] [68, S. 213 ff.].

her salt should have a clue as to what actually goes on in real mathematical research."[110]

Der dialektische Philosoph der Mathematik geht weiterhin davon aus, dass sich diese „innere Entwicklungsgeschichte" der Mathematik, die er untersuchen möchte, nicht im Sinne der deduktiven formalen Logik rekonstruieren lässt. Sie beruht gemäß der dialektischen Sichtweise wesentlich auf einer rationalen Weiterentwicklung und damit Veränderung der involvierten tragenden Begriffe. Im konkreten Fall handelt es sich dabei beispielsweise um Begriffe wie „Gruppe" oder „Vektorraum" (auf objektsprachlicher Ebene), um Begriffe wie „Beweis" oder „Axiom" (auf metasprachlicher Ebene), und um Begriffe wie „schön", „offensichtlich", „fruchtbar" oder „tief" (auf der Ebene wertender Begrifflichkeiten). Es sind die Strategien und Methoden, die Mathematiker bei der Weiterentwicklung dieser Begrifflichkeiten leiten, die der dialektische Philosoph identifizieren möchte.

Larvors Beispiele für dialektische Arbeiten in der Philosophie der Mathematik sind Yehuda Ravs [113], Mary Lengs [71] sowie David Corfields [23, 24, 25, 26]. Rav selbst vertritt in seinem Aufsatz jedoch keine explizit dialektisch-phänomenologische Position. Ziel des Aufsatzes ist es, gegen die Sichtweise zu argumentieren, dass mathematische Beweise eine rein deduktive Funktion erfüllen, indem sie zeigen, wie aus bestimmten Prämissen ein bestimmtes Theorem mittels deduktiver Schlussregeln abgeleitet werden kann. Methodisch führt Rav, unter Rückgriff auf sein Fachwissen als praktizierender professioneller Mathematiker, Beispiele aus einer breiten Auswahl veröffentlichter mathematischer Beweise aus unterschiedlichen mathematischen Fachbereichen an. Dadurch ist seine Arbeit mit dem dialektisch-phänomenologischen Ansatz methodologisch vereinbar, so dass seine Resultate (mit gewissen Einschränkungen, die Larvor diskutiert, die für meine Darstellung an dieser Stelle aber keine Rolle spielen) im Rahmen eines solchen Ansatzes genutzt werden können. Leng dagegen führt eine explizit phänomenologisch motivierte Studie durch, die prüfen soll, inwieweit die von Lakatos' entwickelte Charakterisierung der mathematischen Forschungspraxis auf das mathematische Spezialgebiet der C*-Algebren zutrifft. David Corfield entwickelt seinerseits ein autonomes Forschungsprogramm für eine Disziplin „*science studies*" der Mathematik, die verschiedene Disziplinen wie Psychologie, Anthropologie, Soziologie, Philosophie und Geschichte der Mathematik vereinen soll. Ziel der Unternehmung soll es sein, den wahren Charakter der Forschungsdisziplin Mathematik aufzudecken, indem die Techniken untersucht werden, mit deren Hilfe Mathematiker bestimmte mathematische Ziele wie etwa das Führen eines besonders schönen oder instruktiven Beweises für ein bestimmtes Theorem verfolgen.

[110] [70, S. 3, 5–6].

Zumindest hinsichtlich des resultierenden Forschungsprogrammes ähnelt der Ansatz der dialektischen Philosophie der Mathematik dem von mir verfolgten sozio-empirisch informierten Ansatz. Ich möchte hier insbesondere einen Punkt, in dem sich die beiden Ansätze klarerweise unterscheiden, und zwei Punkte, in denen sie tatsächlich übereinstimmen, hervorheben.

Der erste Punkt betrifft einen wichtigen Unterschied zwischen der Zielsetzung einer dialektischen Philosophie der Mathematik und meiner speziellen Forschungsfrage, dessen Klarstellung mir auch der präzisen Sprechweise zuliebe wichtig erscheint: Der dialektischen Philosophie geht es darum, dass die „innere Logik“ der Mathematik keine formal-deduktive, sondern eben eine dialektische ist. Damit ist gemeint, dass die Entwicklung mathematischer Forschungsprojekte, also Beweisprozesse, die sich unter Umständen über Jahre hinstrecken – wie etwa im Fall des von Lakatos untersuchten Beispiels des Euler-Theorems – nicht im Sinne einer deduktiven formalen Logik formalisierbar sind. Das heisst zunächst nicht, dass nicht einzelne aufgeschriebene Beweise, wie sie z.B. in einer mathematischen Fachzeitschrift veröffentlicht werden, oder wie sie an einer Tafel skizziert sein können, formal oder formalisierbar sind, und dieser Aspekt ist für die dialektische Philosophie der Mathematik auch nicht von großer Bedeutung.[111] Ich beschäftige mich dagegen gerade mit der Frage, inwiefern das, was die Mathematiker als einen „fertigen“ Beweis bezeichnen, formalisierbar ist, und welche epistemische Funktion die Eigenschaft der Formalisierbarkeit erfüllen könnte.

Eine Übereinstimmung besteht nun darin, dass auch ich wertende epistemische Begrifflichkeiten der mathematischen Praxis untersuche und daraus eine philosophisch befriedigende Erklärung der epistemischen Rolle formalisierbarer Beweise herzuleiten versuche. Methodisch scheint mich hier aber zunächst eine von Larvor formulierte Kritik zu treffen, die er mit Hilfe der Unterscheidung zwischen „outside-observer studies“ und „inside-phenomenological studies“ formuliert. Larvor nennt soziologische Methoden als Beispiele für bloße „outside-observer studies“, die rein deskriptiv angelegt sind und deren Ergebnisse prinzipiell nicht das Potential haben, eine „innere Logik“ der Mathematik aufdecken zu können:

[111] Die in den 1980ern von Philip Kitcher entwickelte und in [58] dargestellte naturalistische Position ist ein Beispiel für eine Erkenntnistheorie der Mathematik, die die Entwicklung mathematischen Wissens als eine auch durch soziale Faktoren bestimmte Folge von Ablösungen unterschiedlicher formaler Theorien beschreibt. Danach stellen sich insbesondere längere Beweisprozesse in der Geschichte der Mathematik als nicht formalisierbar dar, sofern sie sich über einen Zeitraum erstrecken, der eine solche Ablösung umfasst. Kitchers Theorie lässt aber offen und ist ausdrücklich damit verträglich, dass einzelne Beweise – im Sinne von Endprodukten zum Zeitpunkt t – formal oder formalisierbar relativ zur entsprechenden formalen Theorie zu t sind.

„When they [mathematicians] evaluate a piece of research they are not satisfied with the information that all the theorems have been validly deduced from consistent premises. Some judgements are sometimes contested and then there may be an exchange of reason-giving. [...] It is of course possible to re-describe these choices in entirely sociological or psychological terms, but to do that is to give up philosophy in favour of social science. It is to abandon the inside-phenomenological stance for the outside-observer position.“[112]

Ich habe jedoch bereits dafür argumentiert (vgl. Abschnitt 1.3), dass dies im Rahmen meines Ansatzes einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik gerade nicht der Fall ist. Auch meine Untersuchungen sind nicht rein arbiträr-deskriptiv, sondern in Bezug auf Forschungsdesign und Ergebnisinterpretation von philosophischen epistemologischen Theorien geleitet. Kerngedanke ist in meinem Fall die Annahme, dass Mathematiker Wissen systematisch zuschreiben, und man die empirisch gefundenen Kriterien vor einem philosophisch-theoretischen Hintergrund abgleichen kann. Dies entspricht der Annahme einer zugrundeliegenden inneren Rationalität der Mathematik als Wissenschaft, wie sie ein dialektischer Philosoph der Mathematik nach Larvor macht.

Als letzten Punkt möchte ich folgende weitere Gemeinsamkeit kurz aufgreifen: Larvor betont, dass die dialektische Philosophie der Mathematik sich nicht auf eine bestimmte ontologische Position, wie etwa den Fiktionalismus oder den Platonismus in Bezug auf mathematische Objekte, festlegen kann, da sich eine solche nicht aus einer dialektisch aufbereiteten inneren Geschichte der Mathematik rekonstruieren lässt. Im Gegenteil ist es Teil der dialektischen Annahme selbst, dass auch ontologische Sichtweisen dem dialektischen Wandel unterworfen sind. Zwar könnte etwa die Dominanz einer bestimmten ontologischen Sichtweise unter praktizierenden Mathematikern selbst Teil dieser inneren Geschichte sein oder diese beeinflussen – dies jedoch wäre, wie Larvor argumentiert, erst eine Erkenntnis, die eine dialektische Philosophie der Mathematik liefern könnte, und nicht Teil des Ansatzes selbst:

„Whether we adopt fictionalism; or embrace a kind of emergentism in which mathematics produces itself out of the activities of mathematicians; or whether we think of progress as ever-closer approximation to a pre-existing Platonic reality, makes no difference to our study of the inner logic of mathematical development. The dialectical stories turn out to be the same regardless of any ontological commitment. Of course, *mathematicians* may hold metaphysical

[112][68, Abschn. 1 „The Dialectical Philosopher“].

views which affect the development of the discipline, but this is part of what the dialectical philosopher hopes to understand.“[113]

Für den Ansatz einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik lässt sich analog festhalten: Weder muss sich ein sozio-empirisch informierter Erkenntnistheoretiker der Mathematik von vornherein auf eine bestimmte Ontologie mathematischer Objekte festlegen, noch muss er überhaupt annehmen, dass es Sinn macht, von *der einen* Ontologie der Mathematik zu sprechen. In Bezug auf die Fragestellung dieser Arbeit wäre es ein mögliches Ergebnis eines sozio-empirisch informierten Ansatzes, wenn auf der einen Seite gewisse Lesarten formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen eine bestimmte ontologische Position spezifizieren, oder auf der anderen Seite die Auffassungen eines einzelnen Mathematikers, einer Gruppe von Mathematikern oder einer Mathematikergeneration zur Ontologie mathematischer Gegenstände einen Einfluss auf die Akzeptanz von Beweisen oder die Bewertung epistemischer Zuschreibungen im Wissenschaftsalltag hätten.[114]

1.5.2 Experimentelle Philosophie

Eine aktuelle Debatte um die Methodologie der traditionellen *armchair epistemology*, also einer klassischen analytischen Erkenntnistheorie „aus dem Lehnstuhl“, wird vor dem Hintergrund der sogenannten experimentellen Philosophie geführt.

Die experimentelle Philosophie untersucht einerseits mit Hilfe von vor allem quantitativen empirischen Methoden begriffliche Intuitionen von gewöhnlichen Sprechern in Bezug auf kontrafaktische Szenarien, insbesondere in Bezug auf erkenntnistheoretische Gedankenexperimente. Damit vertritt sie den Anspruch eines Korrektivs gegenüber der klassischen analytischen Erkenntnistheorie, die sich allein auf die intuitive Bewertung solcher Gedankenexperimente durch einzelne Philosophen beruft. Andererseits untersuchen Vertreter der experimentellen Philosophie auch speziell philosophische Intuitionen mit Mitteln der empirischen Psychologie. Hierbei geht es in erster Linie um eine konstruktive Theorie von Intuitionen, insbesondere hinsichtlich ihres ontologischen und erkenntnistheoretischen Status. In Frage steht zum Beispiel, dass es sich bei philosophischen Intuitionen um den Output eines rein begrifflichen geistigen Vermögens handelt. Ich werde im Folgenden jedoch nicht weiter auf den konstruktiven Aspekt eingehen, sondern mich dem

[113] [68, Abschn. 1 „The Dialectical Philosopher“].

[114] Aufgrund des in vielen Fällen weitreichenden Konsenses bei der Akzeptanz von Beweisen oder der Bewertung von Zuschreibungen kollektiven mathematischen Wissens angesichts der eher heterogenen Landschaft ontologischer Grundüberzeugungen von Mathematikern lässt sich jedoch vermuten, dass die Relevanz unterschiedlicher ontologischer Positionen hier eher gering sein dürfte.

Teil des Programmes der experimentellen Philosophie zuwenden, der diese zu einem Korrektiv gegenüber der klassischen analytischen Philosophie machen soll. An dieser Stelle ist der Ansatz der experimentellen Philosophie dem in dieser Arbeit vertretenen *prima facie* sehr ähnlich, was eine genauere Gegenüberstellung und Abgrenzung erforderlich macht.

Die implizite These der experimentellen Philosophie „als Korrektiv" lautet, dass die klassische analytische Philosophie mit der Wahl ihrer Methoden eine empirische Behauptung aufstellt, die sie nicht begründen kann: Philosophische Intuitionen sind eine verlässliche Erkenntnisbasis. Die Gültigkeit dieser Behauptung unterziehen experimentelle Philosophen einer kritischen Untersuchung. Der Argumentationsgang ist etwa der folgende: Solange von Seiten der analytischen Philosophie kein alternativer Intuitionsbegriff vorgeschlagen wird, muss man philosophische Intuitionen in demselben Sinne verstehen wie Intuitionen von Naturwissenschaftlern, Mathematikern, Ärzten, oder Alltagsintuitionen.[115] Damit unterliegen philosophische Intuitionen auch denselben Gütekriterien als Erkenntnisquelle. Ein wesentlicher Faktor ist dabei ihre Verlässlichkeit, die sich unter anderem durch intersubjektive Stabilität auszeichnet. Gerade diese Stabilität scheint mit einem Blick auf verschiedene Debatten innerhalb der analytischen Philosophie jedoch, wie in Abschnitt 1.4.1 bereits für den Fall der analytischen Erkenntnistheorie besprochen, nicht durchweg gegeben. Wie Löwe und Müller in [76] betonen, findet sich bereits in der methodologischen Diskussion der 50er Jahre bei Mates [90] folgende Bemerkung zur Inkompatibilität philosophischer Intiutionen bezüglich der Verwendung bestimmter alltagssprachlicher Begriffe:

> „[T]he intuitive findings of different people, even of different experts, are often inconsistent. Thus, for example, while Prof. Ryle tells us that 'voluntary' and 'involuntary' in their ordinary use are applied only to actions which ought not to be done, his colleague Prof. Austin states in another connection: '...for example, take *voluntary* and *involuntary*: we may join the army or make a gift voluntarily, we may hiccough or make a small gesture involuntarily ...' If agreement about usage cannot be reached within so restricted a sample as the class of Oxford Professors of Philosophy, what are the prospects if the sample is enlarged?"[116]

Mit Hilfe von quantitativen Studien wollen Vertreter der experimentellen Philosopie daher die Stabilität der intuitiven Bewertung philosophischer Gedankenexperimente über-

[115] Vgl. etwa Weinberg et al. [127].
[116] Mates [90, S. 165].

prüfen. Durch die Auswahl von Probanden mit unterschiedlicher philosophischer Expertise steht dabei auch die in philosophischen Texten oftmals suggerierte Aussage auf dem Prüfstand, die philosophische Bewertung bestimmter Gedankenexperimente entspräche den „folk intuitions“ im Sinne einer Philosophie der normalen Sprache,[117] also der intuitiven Bewertung durch gewöhnliche kompetente Sprecher.

Tatsächlich zeigen verschiedene bisher durchgeführte empirische Studien, dass die innerhalb der philosophischen Gemeinschaft als Standard anerkannten Bewertungen der klassischen philosophischen Gedankenexperimente, insbesondere der sogenannten Gettier- und Gehirn-im-Tank-Szenarien in der Erkenntnistheorie, von der „durchschnittlichen“ Bewertung der entsprechenden Szenarien durch Probanden in quantitativen Umfragen abweichen.[118] Dem entgegen halten Vertreter der traditionellen analytischen Philosophie im Wesentlichen, dass die experimentelle Philosophie den Auftrag einer Philosophie der normalen Sprache falsch versteht: Es geht nicht darum, den Intuitionen beliebiger Laien gerecht zu werden, sondern darum, philosophisch geschulte Sprecherintuitionen zu Begriffen der normalen Sprache zu präzisieren. Bestehen bleibt hier natürlich der von Mates formulierte Einwand, auf den Löwe und Müller verweisen. Sie reformulieren und präzisieren diesen Einwand in der Sprechweise ihrer methodologischen Diskussion zur begrifflichen Modellierung in der Philosophie. Wie in Abschnitt 1.1.1 bereits besprochen, ist für Löwe und Müller dabei die Unterscheidung von Daten und Phänomenen wesentlich. Die Güte der methodologischen Rechtfertigung der analytischen Philosophen hängt demgemäß davon ab, ob es sich bei den zur philosophischen Analyse herangezogenen intuitiven Bewertungen bestimmter Verwendungsweisen der in Frage stehenden Begriffe tatsächlich um stabile Phänomene oder um bloße Daten, also einzelne philosophisch geschulte intuitive Bewertungen ohne Nachweis hinreichender Stabilität, handelt. Angesichts der innerhalb der Gemeinschaft der analytischen Philosophen teilweise festgefahrenen Debatten um solche intuitiven Bewertungen steht zumindest in diesen Fällen ein entsprechender Nachweis noch aus.

[117] Vgl. Newen & van Savigny [104, S. 11 f.]

[118] Im klassischen Gehirn-im-Tank-Szenario geht es etwa um die Frage, ob ein epistemisches Subjekt, welches tatsächlich ein echtes menschliches Wesen in der realen Welt ist, weiß oder bloß glaubt, dass es kein bloßes Gehirn in einem Tank mit Nährflüssigkeit ist, welchem über an Computer angeschlossene Neuronen nur eine falsche Realität vorgegaukelt wird. Nichols, Stich und Weinberg [105] fanden experimentell, dass die Einschätzung eines solchen Szenarios in hohem Maße vom philosophischen Wissenstand der Befragten abhängt. Probanden mit einem hohem philosophischen Wissensstand beantworten die Frage mehrheitlich mit „glaubt bloß“, bei Probanden mit einem niedrigen philosophischen Wissensstand sind die Antworten „glaubt bloß“ und „weiß“ etwa gleich verteilt. Ähnliche Einschätzungsunterschiede wurden in Bezug auf kulturelle Zugehörigkeit der Probanden gefunden (auch in [105]), aber auch hinsichtlich der Reihenfolge der von den Probanden zu beurteilenden Gedankenexperimente (vgl. Swain et al. [122]).

Einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik geht es allerdings weder darum, den erkenntnistheoretischen Status philosophischer Intuitionen an sich anzuzweifeln, noch darum, die intuitive Bewertung von Gedankenexperiment-Szenarien zum Wissensbegriff durch philosophische Experten empirisch zu kontrollieren. Sie untersucht empirisch lediglich die Verwendung epistemisch relevanter Begriffe in der wissenschaftlichen Praxis durch Fachexperten und zieht diese Ergebnisse zu denen einer philosophisch-analytischen Untersuchung hinzu. Diesem Vorgehen liegt einerseits die Annahme zugrunde, dass Philosophen zwar die besser geschulten Intuitionen zur Bewertung von Gedankenexperiment-Szenarien zu (allgemeinen) epistemischen Begriffen haben mögen, aber Szenarien aus dem Alltag praktizierender Mathematiker schlechter bewerten können als die entsprechenden Fachexperten. Ihnen mangelt es dabei in der Regel, insbesondere hinsichtlich der angemessenen Bewertung von komplexen Beweispraktiken, an der nötigen mathematischen Fachexpertise und Kenntnis der Spielregeln der mathematischen Fachgemeinschaft. Die philosophisch vielleicht laienhafte Verwendung von Wissens- oder Rechtfertigungszuschreibungen in der Wissenschaftsgemeinschaft ist andererseits für das Gesamtprogramm einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik relevant, weil diese auf eine Explikation epistemischer Begriffe für die Mathematik zielt, die auch innerhalb einer umfassenden Wissenschaftsphilosophie der Mathematik fruchtbar gemacht werden kann. Eine solche Explikation sollte sowohl den philosophischen Intuitionen bezüglich der Wahrheitsbedingungen epistemischer Zuschreibung als auch den in der mathematischen Praxis verwendeten Beurteilungskriterien für solche Zuschreibungen gerecht werden.[119] Die sozio-empirisch informierte Erkenntnistheorie der Mathematik unterstellt Mathematikern also nicht generell die „besseren“ Intuitionen bezüglich epistemischer Begriffe, die sie in Gedankenexperimenten unter Beweis stellen sollen. Auch bleibt eine Kontrolle der empirisch gefundenen Ergebnisse zu epistemischen Begriffen der mathematischen Praxis durch philosophisch geschulte Intuitionen bestehen durch die in Schritt 3 von DSP vorgenommene Rückanbindung der empirischen Ergebnisse an philosophische Positionen der allgemeinen Erkenntnistheorie.

Letztlich läßt sich die Relevanz empirischer Studien über die mathematische Praxis für philosophische Theorien mathematischen Wissens nicht voraussetzungslos begründen. Wer eine Argumentation wie die hier vorgeschlagene aus prinzipiellen Gründen für gänzlich unzulänglich erklärt, wird sich nicht dazu verpflichtet sehen, einer in sich konsistenten philosophischen Wissenstheorie empirische Prüfsteine in den Weg zu legen. Konsequenterweise sollten dann aber eine solche Theorie mathematischen Wissens und eine empirisch

[119] Vgl. insbesondere Fußnote 71.

informierte Theorie im hier beschriebenen Sinne nicht als konkurrierende Theorien, sondern vielmehr als unterschiedliche Teilprojekte auf dem Feld der Erkenntnistheorie der Mathematik begriffen werden, mit ganz unterschiedlichen Zielen. Eine empirisch informierte philosophische Untersuchung mathematischen Wissens bildet dann im Hinblick auf das Gesamtprojekt der Erkenntnistheorie der Mathematik eine nicht nur wertvolle, sondern auch erforderliche Ergänzung, unabhängig davon, ob das Ergebnis einer solchen Untersuchung den Rahmen bereits bestehender philosophischer Theorien mathematischen Wissens sprengt oder nicht.

2 Formalisierbarkeitsorientierte Konzeptionen mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung

Dieses Kapitel ist Schritt 1 des in Abschnitt 1.3.3 vorgestellten Drei-Schritte-Programmes gewidmet. Es werden verschiedene Lesarten formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen diskutiert, welche die in der Grundform eines solchen Kriteriums enthaltenen Parameter unterschiedlich spezifizieren. Im ersten Abschnitt 2.1 des Kapitels stelle ich diese Grundform vor und reiße kurz das Spezifikationsspektrum der darin enthaltenen Parameter an. Die nachfolgende Diskussion orientiert sich systematisch an aus allgemeiner erkenntnistheoretischer Sicht unterschiedlich zu klassifizierenden konkreten Spezifikationen dieser Parameter. In Abschnitt 2.2 werden entsprechend die nötigen erkenntnistheoretischen Begrifflichkeiten bereitgestellt. In Abschnitt 2.3 betrachtete ich unter 2.3.1 zunächst eine naive Spezifikation eines FKE, welche die Parameter der Grundform im engsten Sinne auffasst. In 2.3.2 betrachte ich Lesarten, die in Löwe & Müller [75] als – jedoch unzulängliche – modale Abschwächungen einer solchen naiven Spezifikation diskutiert werden. In 2.3.3 stelle ich eine an die von Löwe und Müller in [75] und [78] entwickelte Alternative angelehnte kontextextualistische modale Lesartvor. Zwei weitere Lesarten, die ich in 2.3.4 untersuche, werden von Philip Kitcher in *The Nature of Mathematical Knowledge* ([58]) im Rahmen seiner Kritik an einer aprioristischen Auffassung mathematischen Wissens diskutiert. Die Lesart, die ich schließlich in 2.3.5 anspreche, gründet sich auf Jody Azzounis Sichtweise informeller mathematischer Beweise. Gemäß dieser Sichtweise sind informelle Beweise sogenannte Ableitungsanzeiger (*derivation indicator*). Diese Ableitungsanzeiger-Lesart stellt in Kombination mit Aspekten der Kritik Kitchers eine vielversprechende Variation der von Löwe und Müller angebotenen Analyse dar, und bildet daher einen theoretischen Ausgangspunkt für die in den nachfolgenden Kapiteln 3 und 4 vorgestellten empirischen Untersuchungen.

2.1 Grundform und Parameter formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen (FKE)

Unter einem *formalisierbarkeitsorientierten Kriterium für epistemische Zuschreibungen* (kurz: FKE) verstehe ich ein Kriterium für das Vorliegen beweisbasierten mathematischen Wissens oder beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung, welches die folgende Form hat:

Ein epistemisches Subjekt X verfügt über einen formalisierbaren Beweis für eine mathematische Aussage p. (FKE)

(FKE) enthält mit den Ausdrücken „formalisierbar" und „verfügen über" zwei weiter zu spezifizierende Parameter. Unter einer starken Lesart kann mit „verfügen über" etwa der direkte kognitive Zugang zu einem Beweis für p gemeint sein. Diese Spezifikation markiert jedoch nur eine Grenze des Spektrums der möglichen Lesarten. Auch die möglichen Bedeutungen von „formalisierbarer Beweis" reichen, wie bereits in der Einleitung (S. x) diksutiert, von dem konkreten Vorliegen eines vollständig formalen Argumentes über das Vorliegen eines mechanisch in ein solches übertragbaren Argumentes bis hin zu der bloßen Behauptung der formalen Ableitbarkeit, etwa auf der Grundlage einer vorliegenden, jedoch schemenhaften Beweisskizze.

2.2 Erkenntnistheoretische Vorbemerkungen

In der folgenden Diskussion der verschiedenen Lesarten von (FKE) im Hinblick auf unsere philosophischen Intuitionen bzw. auf unterschiedlichen philosophischen Positionen zum Wissens- und Rechtfertigungsbegriff werden die relevanten erkenntnistheoretischen Positionen stark vereinfachend nach zwei Gesichtspunkten unterschieden.[120] Zum einen wird nach der jeweils geforderten Art der Zugänglichkeit rechtfertigender Gründe differenziert. Die entsprechenden erkenntnistheoretischen Positionen werden allgemein als externalistisch *versus* internalistisch bezeichnet. Zum anderen wird unterschieden, ob die jeweilige erkenntnistheoretische Position epistemische Standards als invariant gegenüber kontextuellen Änderungen oder als prinzipiell kontextabhängig konzipiert. Die zugehörigen Positionen bezeichnet man als Invariantismus *versus* Kontextualismus. Ich gebe im

[120] In der Erkenntnistheorie werden unterschiedliche Spielarten und teilweise auch Mischformen der resultierenden vier Grundpositionen vertreten. Ich werde die allgemeinen Debatte um die Adäquatheit der einzelnen Positionen im Rahmen dieser Arbeit nicht aufgreifen. Meine Ausführungen dienen allein dem Zweck, mit Hilfe der eingeführten Begrifflichkeiten eine systematische Klassifikation der im Anschluss diskutierten unterschiedlichen Lesarten von (FKE) durchführen zu können, und die schließlich in Kapitel 5 vorgeschlagenen empirisch informierten Lesarten begrifflich an die erkenntnistheoretische Diskussion anbinden zu können.

Folgenden eine kurze, für meine Zwecke hinreichende Darstellung der Kernthesen der jeweiligen Positionen, die sich im Wesentlichen an Grundmann [50], MacFarlane [81] und Brendel [17] orientiert.

Wenn man invariantistische und kontextualistische erkenntnistheoretische Positionen gegenüberstellt, so meint man in der Regel den semantischen Kontextualismus, genauer genommen den semantischen Zuschreibungskontextualismus im Unterschied zum semantischen Invariantismus bezüglich der epistemischen Begriffe „Wissen“ und „Rechtfertigung“. Diese beiden konkurrierenden Positionen geben unterschiedliche Antworten auf die Frage nach den Wahrheitsbedingungen für epistemische Zuschreibungen, d.h. Aussagen der Form „X weiß, dass p“ und „X ist gerechtfertigt zu glauben, dass p“. Der semantische Invariantismus verlangt, dass die epistemischen Standards, die für die Wahrheit einer epistemischen Zuschreibung maßgeblich sind, kontextunabhängig fixiert sind. Der Zuschreibungskontextualismus vetritt dagegen die These, dass erst der Äußerungskontext der jeweiligen epistemischen Zuschreibung diese epistemischen Standards festlegt.[121] Nicht jede Art der Kontextabhängigkeit epistemischer Standards impliziert daher gleich einen semantischen Kontextualismus: Die kontextuelle Variation hängt im Sinne des semantischen Zuschreibungskontextualismus insbesondere von den dem Zuschreiber bewussten Irrtumsmöglichkeiten für das epistemische Subjekt ab. In der Terminologie der möglichen Welten bedeutet dies, dass die Rechtfertigung, die das epistemische Subjekt für seine Überzeugung, dass p, besitzt, zumindest in allen aus der Perspektive des Zuschreibers relevanten möglichen Welten verlässlich mit der Wahrheit von p verknüpft sein muss, wobei die Relevanz einer möglichen Welt von kontextuellen Faktoren bestimmt wird.[122] Vom semantischen Kontextualismus ist ein substantieller Kontextualismus zu unterscheiden, dem es nicht um die Kontextabhängigkeit der Wahrheitsbedingungen von epistemischen Zuschreibungen, also der Bedeutung der epistemischen Begriffe „Rechtfertigung“ und „Wissen“ geht, sondern um die Kontextabhängigkeit der epistemischen Eigenschaft der Basalität oder Begründungsunbedürftigkeit von Überzeugungen.[123] Ich werde mich mit „Kontextualismus“ jedoch stets auf den semantischen Kontextualismus und, sofern nichts

[121]Vgl. Grundmann [50, S. 151 f.]; ich werde hier nicht auf die Grenzposition des Subjektkontextualismus oder auch subjekt-sensitiven Invariantismus eingehen, der kontextuelle Variation der epistemischen Standards abhängig von der Perspektive des epistemischen Subjekts erlaubt, weitere situative Abhängigkeiten aber ausschließt.

[122]Vgl. [50, S. 154]. Insbesondere fordert der semantische Zuschreibungskontextualismus der Rechtfertigung etwas anderes als eine gewisse Personen- und Zeitrelativität epistemischer Rechtfertigung, also deren Abhängigkeit vom Kontext der rechtfertigenden Gründe des epistemischen Subjekts. Letzteres gehört zu den allgemeinen, in der Erkenntnistheorie positionsübergreifend vertretenen Adäquatheitsbedingungen für eine Analyse des Rechtfertigungsbegriffes (vgl. [50, S. 224] sowie Abschnitt 5.2.3).

[123]Vgl. [50, S. 326].

anderes gesagt wird, dabei auf die spezielle Variante des Zuschreibungskontextualimus beziehen.[124]

Hinsichtlich internalistischen und externalistischen Positionen wird in der Erkenntnistheorie eine weitere Unterscheidung getroffen, nämlich zwischen Zugangsinternalisten bzw. -externalisten und ontologischen Internalisten bzw. Externalisten. Diese Unterscheidung betrifft in erster Linie internalistische und externalistische Rechtfertigungskonzeptionen.[125] Ein Zugangsinternalist bezüglich epistemischer Rechtfertigung fordert, dass das epistemische Subjekt X, um gerechtfertigt zu glauben, dass p wahr ist, die relevanten epistemischen Standards nicht nur erfüllen, sondern zu diesem Faktum auch kognitiven Zugang haben muss.[126] Dagegen genügt es dem Zugangsexternalisten, wenn X die epistemischen Standards zwar objektiv erfüllt, davon aber keine kognitive Kenntnis hat. Es reicht hin, wenn eine geeignete externe Relation zwischen X' Überzeugung und der Tatsache, dass p, instantiiert ist. Diese Relation wird in unterschiedlichen externalistischen Ansätzen verschieden bestimmt, etwa als kausale Relation oder als objektive Verlässlichkeit des überzeugungsstiftenden Vorgangs. Ontologische Internalisten hingegen behaupten, dass die Gründe, die eine Überzeugung von X rechtfertigen, voll und ganz in X' mentaler Perspektive aufzufinden sind. Der ontologische Status von Gründen wäre also gleichzusetzen mit dem mentaler Zustände. Ontologische Externalisten beziehen dagegen auch externe Tatsachen außerhalb der mentalen Perspektive von X als

[124]Nicht jede Verwendung von „kontextsensitiv“, „kontextabhängig“ (im Unterschied zu „kontextinvariant“ und „kontextunabhängig“) oder „kontextueller Faktor“ meint dagegen gleich eine Kontextabhängigkeit im Sinne des semantischen Zuschreibungskontextualismus. Dies gilt in Bezug auf diese Arbeit insbesondere für die Diskussion der empirischen Studien in Kapitel 3 und 4; dort ist es unter anderem gerade die Art der Kontextabhängigkeit, die erst im Laufe der Diskussion genauer bestimmt werden kann. Ich werde an entsprechender Stelle (vgl. S. 81) noch einmal darauf hinweisen.

[125]Darüber hinaus kann man explizit einen Internalismus bzw. Externalismus bezüglich des Wissensbegriffes vertreten. Diese Unterscheidung ist eher für internalistische Positionen relevant, da ein Rechtfertigungsinternalismus noch keinen Wissensinternalismus zur Folge haben muss. Der Wissensinternalismus stellt sich im Wesentlichen als ein Rechtfertigungsinternalismus dar, der darüber hinaus Rechtfertigung als Teil der Wissensdefinition begreift und keine zusätzlichen, externalistischen Bedingungen an den Wissenbegriff stellt. Die allgemeine erkenntnistheoretische Diskussion hat jedoch gezeigt, dass rein internalistische Wissenskonzeptionen problematisch sind (vgl. für eine ausführliche Darstellung etwa Brendel [17, Kap. 7]). Von einem Wissensexternalismus würde man hingegen sprechen, sobald die Wissensdefinition externalistische Faktoren, wie etwa eine objektive Verlässlichkeitsbedingung an den überzeugungsbildenden Prozess oder das Vorliegen einer Kausalbeziehung zwischen dem Wahrmacher einer Überzeugung und der Überzeugung selbst, als notwendige oder hinreichende Bedingungen umfasst. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese Faktoren bereits über eine externalistische Rechtfertigungskonzeption ins Spiel kommen, oder erst als zusätzliche Forderungen neben einer internalistischen Rechtfertigungskonzeption erhoben werden

[126]Daher müssen internalistische Kriterien für die Zuschreibung von Rechtfertigung in einer Art und Weise formuliert werden, die klarstellt, was es für eine mathematische Aussage p bedeutet, durch die „argumentative Rechtfertigungspraxis [...] epistemischer Subjekte“[127] gerechtfertigt zu sein. Im Bereich der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin handelt es sich bei dieser argumentativen Praxis in der Regel gerade um eine durch X vorgenommene Präsentation eines Beweises für p.

rechtfertigungskonstituierende Faktoren mit ein.[128] In diesem Kapitel verstehe ich unter Rechtfertigungsinternalismus und -externalismus jeweils die Zugangs- und nicht die ontologische Variante.[129]

2.3 Verschiedene Lesarten formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen

Bei der folgenden Analyse verschiedener Lesarten von (FKE) beginne ich mit einer kritischen Diskussion von Lesarten, die eine rein internalistische und strikt invariantistische Theorie mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung ermöglichen. In der Folge diskutiere ich verschiedene Abschwächungen solcher Lesarten, die auf eine kontextualistische Theorie hinauslaufen.

2.3.1 Eine strikt invariantistisch-internalistische Lesart von (FKE)

Es gibt eine naheliegende naive Spezifikation von (FKE), die ich als strikt invariantistisch-internalistische Lesart bezeichnen werde. Die Attraktivität dieser Spezifikation ergibt sich unter anderem daraus, dass sie eine Erklärung des vermeintlichen epistemischen Sonderstatus der Mathematik liefert.

Die Standarddefinition des Wissensbegriffes in der klassischen Erkenntnistheorie analysiert Wissen als wahre, gerechtfertigte Meinung mittels der folgenden drei jeweils notwendigen und zusammen hinreichenden Bedingungen für die Wahrheit von „X weiß, dass p“:

- X glaubt, dass p,
- p ist wahr,
- X hat gute Gründe für seine Überzeugung, dass p, hinsichtlich fester epistemischer Standards.

Schon der erkenntnistheoretische Skeptizismus, spätestens aber die Arbeiten von Edmund Gettier machten deutlich, dass diese Definition dennoch nicht Basis einer adäquaten Erkenntnistheorie sein kann. Während Gettier zeigte, dass die klassische Wissensdefinition in obigem Sinne in bestimmten Situationen, sogenannten Gettier-Szenarien, zu

[128] Vgl. Grundmann [50, S. 250].
[129] Auf letztere komme ich in Kapitel 5, Abschnitt 5.2.3 jedoch kurz zurück.

kontraintuitiven Wissenszuschreibungen führt,[130] besteht die sogenannte skeptische Herausforderung dagegen in der Möglichkeit skeptischer Szenarien wie Descartes' „Bösem Dämon" oder Putnams „Gehirnen im Tank".[131] Sowohl die Gettier-Beispiele als auch die skeptische Herausforderung basieren wesentlich auf bestehenden Lücken zwischen einer internalistischen Konzeption epistemischer Rechtfertigung[132] und Wahrheit. Im Gettier-Fall sind alle drei Bedingungen der klassischen Wissensdefinition erfüllt, eine positive Wissenszuschreibungen erscheint aber dennoch unangemessen, da eine Rechtfertigung vorliegt, die mit den Wahrmachern von p nicht hinreichend verknüpft ist: p wird hier aus einer falschen, aber vom epistemischen Subjekt gerechtfertigterweise geglaubten Aussage q gefolgert. Im skeptischen Fall ist die Wahrheit von p gar nicht gegeben, dennoch liegt eine Rechtfertigung für die Überzeugung, dass p wahr ist, vor.[133] Da die klassische, internalistische Wissensdefinition in obigem Sinne diese Lücken zunächst nicht füllen kann, muss sie trotz ihrer intuitiven Attraktivität für den allgemeinen Fall zurückgewiesen werden. Bedient man sich neben der Unterscheidung zwischen internalistischen und externalistischen auch der zwischen invariantistischen und kontextsensitiven erkenntnistheoretischen Positionen,[134] so lässt sich die klassische Wissenskonzeption systematisch unter den verschiedenen Wissenskonzeptionen, die als Reaktion auf Gettier und den Skeptizismus entstanden, einordnen: Sie fällt in die Kategorie des internalistischen strikten Invariantismus.

Fände man nun für einen bestimmten Wissensbereich ein Kriterium für das Vorliegen von Wissen, welches die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

(Int) es liefert einen internalistischen sowie

(Inv) strikt invariantistischen Wissensbegriff und

(T) verknüpft epistemische Rechtfertigung verlässlich mit Wahrheit,

so wäre insbesondere durch die Kombination von (Int) und (T) und das Fehlen zusätzlicher externalistischer Bedingungen an die Verbindung zwischen Rechtfertigung und Wahrheit der gewussten Überzeugung nach dem bisher Gesagten offenbar ein gewisser epistemischer Sonderstatus etabliert. Die folgende Spezifikation von (FKE) erfüllt dank

[130] Gettier veröffentlichte diese Beispiele 1963 in Gettier [42]; vgl. auch die Darstellung in [17, Kap. 6].
[131] Vgl. Descartes [31] und Putnam [112].
[132] Im Sinne der in Abschnitt 2.2 eingeführten Terminologie.
[133] Vgl. auch Brendel [17, S. 37 f.].
[134] Vgl. wieder Abschnitt 2.2.

einer geeigneten Einstellung der zwei Parameter „verfügen über“ und „formalisierbar“ zum einen die Bedingungen (Int) und (Inv):

> Das epistemische Subjekt X hat aktuell direkten kognitiven Zugang zu einer formalen Ableitung von p und kann diese Schritt für Schritt nachvollziehen. (FKE$_1$)

Darüber hinaus stellt die Lesart (FKE$_1$) in folgendem Sinne eine absolut verlässliche Verbindung zwischen Rechtfertigung und Wahrheit her und erfüllt dadurch Bedingung (T): Die tatsächliche Verfügbarkeit einer formalen Ableitung garantiert insbesondere die logische Möglichkeit einer solchen, und damit die Wahrheit von p relativ zur Klasse der durch das verwendete Axiomenschema definierten Modelle. Würde man (FKE$_1$) zu einem Kriterium für die Wahrheit von „X weiß, dass p“ erheben, so wäre es also in dem Sinne hinreichend,[135] dass es die Wahrheit von p in allen Strukturen, in denen auch die Axiome des verwendeten formalen Systems wahr sind, impliziert.

Dasselbe gilt auch für eine leicht abgeschwächte Lesart (FKE$_1$'), die den Begriff der formalen Ableitung durch einen Formalisierbarkeitsbegriff im engeren Sinne ersetzt:

> Ein *formalisierbarer*$_{\text{inv}}$ Beweis für p ist ein Argument, das mechanisch in eine formale Ableitung von p überführt werden kann.[136]

Dieser Spezifikation von „formalisierbar“ gemäß folgt nämlich aus der Existenz eines formalisierbaren$_{\text{inv}}$ Beweises für p die formale Ableitbarkeit von p logisch. Ein entsprechendes formalisierbarkeitsorientiertes Kriterium für epistemische Zuschreibungen lautet:

> X hat aktuell direkten kognitiven Zugang zu einem formalisierbaren$_{\text{inv}}$ Beweis für p und kann diesen Schritt für Schritt nachvollziehen. (FKE$_1$')

Die Adäquatheit von (FKE$_1$) und (FKE$_1$') lässt sich – zumindest unter den methodologischen Annahmen dieser Arbeit – jedoch leicht bestreiten: (FKE$_1$) und (FKE$_1$') sind keine notwendigen Kriterien für Zuschreibungen beweisbasierten Wissens oder beweisbasierter Rechtfertigung, da es in der mathematischen Praxis eine Vielzahl zu berücksichtigender Fälle gibt, in denen mathematisches Wissen oder epistemische Rechtfertigung vorliegen, (FKE$_1$) bzw. (FKE$_1$') aber klarerweise nicht erfüllt sind. Diese Konsequenz sollte aber auch generell als philosophisch unbefriedigend angesehen werden; sie erscheint

[135] Und damit auch hinreichend für die Wahrheit von „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p“.

[136] Die Bezeichnung „formalisierbar$_{\text{inv}}$“ werde im Folgenden auch außerhalb der theoretischen Analyse von (FKE) einheitlich für Formalisierbarkeit im wie hier verstandenen engeren Sinne verwenden.

insbesondere hinsichtlich gerechtfertigter mathematischer Überzeugungen als in hohem Maße kontraintuitiv.

Ich stütze mich hier auf die Argumentation von Benedikt Löwe und Thomas Müller in [75]. Dieser liegt die mit meiner methodologischen Position verträgliche Prämisse zugrunde,[137] dass ein Begriff mathematischen Wissens konform mit den Wissenszuschreibungen der mathematischen Praxis sein sollte:

> „We will proceed from a broadly naturalistic assumption: In philosophising about mathematics, mathematical practice must be taken seriously. If certain expressions, such as 'knowledge' or '... knows that ...', are used in the mathematical community, then that usage cannot be dismissed without good arguments."[138]

Löwe und Müller weisen eine strikt invariantistische, internalistische Spezifikation von formalisierbarkeitsorientierten Kriterien für epistemische Zuschreibungen, wie (FKE_1) und (FKE_1'), mit dem empirisch motivierten Argument zurück, dass solche Lesarten praktizierenden Mathematiker nahezu kein nicht-triviales mathematisches Wissen bzw. keine gerechtfertigte Überzeugungen mit nicht-trivialem mathematischen Gehalt zugestehen:

> „It just isn't the case that mathematicians have a derivation in mind. [...] The proofs in mathematical research papers are so far removed from derivations that only a few experts could produce a derivation from them, even if they wanted to [...]. We need to take seriously the fact that derivations are hardly ever used."[139]

Die Zurückweisung ist nicht nur für formale Ableitungen (*derivations*) formuliert, sondern implizit auch für formalisierbare$_{\text{inv}}$ Beweise: Ein Argument, auf dessen Grundlage nur wenige Experten in der Lage sind, eine formale Ableitung zu produzieren, kann nicht als mechanisch in eine formale Ableitung übertragbar bezeichnet werden.

2.3.2 Modalisierte invariantistische Lesarten von (FKE)

Eine übliche Art und Weise, den oben formulierten Einwänden gegen invariantistische Lesarten von (FKE) zu entgegnen, besteht in der Einführung einer Im-Prinzip-Klausel:

[137] Löwe und Müller formulieren ihren methodologischen Ansatz, der mit dem in dieser Arbeit vertretenen im Wesentlichen übereinstimmt, erst detailliert in einer Nachfolgearbeit (vgl. [76] und die Diskussion in Kapitel 1).

[138] [75, Abschn. 1].

[139] [75, Abschn. 4.1].

Das epistemische Subjekt sollte zumindest im Prinzip über einen formalen oder formalisierbaren Beweis verfügen, d.h. prinzipiell – im Unterschied zu aktual – in der Lage sein, einen solchen anzugeben.

Unspezifizierte Im-Prinzip-Klauseln lösen das Problem der abgeschwächten Formulierung von (FKE) offenbar nicht in befriedigendem Maße: Man weicht damit in erster Linie die Anwendungskriterien der entsprechenden Lesart von (FKE) auf, ohne dabei das ohnehin schon vorhandene Spezifikationsspektrum von „verfügen über" und „formalisierbar" informativ zu erweitern. In der in Abschnitt 1.3 eingeführten Terminologie von Moser schadet ersteres dem evaluativen, letzteres dem semantischen und dem explanatorischen Projekt einer wissenschaftsphilosophisch motivierten Erkenntnistheorie. Auch die Beziehungen zwischen den u.U. unterschiedlichen Analyseergebnissen im Rahmen dieser drei Projekte werden dadurch gegebenenfalls nur verschleiert, statt sie zu klären. Die Einführung einer unspezifizierten Im-Prinzip-Klausel zur Formulierung einer schwächeren Lesart von (FKE) ist daher aus systematischen Gründen abzulehnen.

Ich betrachte daher im Folgenden geeignet spezifizierte Im-Prinzip-Klausel. Systematisch gesehen kann sich „im Prinzip" auf beide Parameter von (FKE) beziehen, sowohl auf „verfügen über" als auch auf „formalisierbar". Bezieht sich „im Prinzip" auf den Parameter „verfügen über", so bedeutet dies in der Regel eine Aufweichung von (Int), da vom epistemischen Subjekt kein direkter aktueller Zugang zu den rechtfertigenden Gründen für seine Überzeugung, dass p – nämlich einem formalen oder formalisierbaren Beweis für p – verlangt wird, sondern nur noch ein prinzipieller. Wie stark man hier von (Int) abweichen muss, hängt natürlich von der weiteren Spezifikation von „im Prinzip" ab. Zudem zieht die Einführung einer Im-Prinzip-Klausel eine Aufweichung von (Inv) nach sich, denn Im-Prinzip-Klauseln werden in der Regel kontextabhängig gelesen, d.h. etwa im Sinne von „unter geeigneten Umständen in einer geeigneten Art und Weise". Genauer gesagt: Im-Prinzip-Klauseln sind modale Ausdrücke,[140] d.h. ihre Semantik lässt sich auch mittels des Begriffs der zugänglichen möglichen Welt formulieren. Die Menge der zugänglichen Welten ist aber zunächst abhängig von der aktualen Auswertungswelt der Im-Prinzip-Klausel. Um an (Inv) festhalten zu können, müsste man die Im-Prinzip-Klausel kontextunabhängig formulieren, d.h. die Menge der zugänglichen Welten jeweils ohne Bezug auf die aktuale Auswertungswelt definieren. Wie ich im Folgenden kurz umreiße, argumentieren Löwe und Müller dafür, dass die mathematische Praxis es tatsächlich jedoch nicht erlaubt, eine solche kontextunabhängige Formulierung zu finden.

[140] Vgl. Löwe & Müller [75, Abschn. 4.2]: „The notion of 'could in principle generate' implies some type of modal idealisation".

Löwe und Müller diskutieren drei Möglichkeiten, mittels Im-Prinzip-Klauseln modalisierte Lesarten eines formalisierbarkeitsorientierten Kriteriums für mathematisches Wissen[141] kontextunabhängig zu spezifizieren. Diese lauten:[142]

„($\dagger_1$) S knows that P iff, with the help of a logician, S can generate a derivation of P."

„($\dagger_2$) S knows that P iff, given ten years, she could write a formal derivation."

„($\dagger_3$) S knows that P iff, given a blackboard and a piece of chalk, she is able to produce an acceptable blackboard proof within an hour."

Im Falle dieser drei Varianten werden die Umstände, unter denen das epistemische Subjekt aktuell in der Lage sein sollte, einen Beweis anzugeben, kontextunabhängig spezifiziert; im ersten Fall unter Rückgriff auf die Fähigkeiten und Expertise eines Mathematikers mit umfassenden logischen Fähigkeiten, in den beiden anderen Fällen durch Angabe eines fixierten Zeitrahmens, innerhalb dessen X einen konkreten Beweis vorbringen muss. Die letztgenannte Variante beinhaltet außerdem eine Abschwächung von (T) – hier wird zu dem Zweck, einen akzeptablen Zeitfaktor angeben zu können, kein formaler oder formalisierbarer$_{\text{inv}}$ Beweis mehr eingefordert, sondern ein akzeptabler (hier noch in einem kontextunabhängigen Sinne) Tafelbeweis.

Der ersten Variante[143] entspricht folgende Spezifikation von (FKE):

X ist mit der Hilfe eines Logikers in der Lage, eine formale Ableitung für p zu erzeugen, (FKE$_2$)

Diese ist insofern fragwürdig, als das Konzept „mit der Hilfe eines Logikers" darin so unspezifiziert ist, dass z. B. folgende, triviale (und darüber hinaus in höchstem Maße nicht-internalistische) Lesart von (FKE$_2$) als Wahrheitskriterium für „X weiß, dass p" oder „X glaubt gerechtfertigterweise, dass p" nicht ausgeschlossen wird:[144] Es könnte sich bei dem zugelassenen Hilfesteller um einen idealisierten, omnipotenten Logiker handeln. Ein Mathematiker wäre mit derartiger Hilfe durchaus in der Lage, eine formale Ableitung zu erzeugen, ohne dass er dazu einen irgendeinen substantiellen Eigenbeitrag leistet.

Zu den anderen beiden Varianten konstruieren Löwe und Müller jeweils Gegenbeispiele unter Rückgriff auf die mathematische Praxis, welche die Adäquatheit der entsprechenden

[141] Vor allem ihre Kritik an solchen Lesarten lässt sich auch auf den Fall epistemischer Rechtfertigung und somit auf (FKE) im Allgemeinen übertragen.

[142] Vgl. [75, Abschn. 4.2].

[143] Diese Variante wurde tatsächlich von Steiner in [119] vorgeschlagen und – allerdings negativ – diskutiert; im Unterschied dazu treten die beiden in [75] diskutierten Lesarten mit fixiertem Zeitrahmen nur als hypothetische Positionen um des Argumentes gegen situativ-invariante Lesarten willen auf.

[144] In Bezug auf (FKE$_2$) als ein Testkriterium für das konkrete Vorliegen mathematisches Wissen mag diese Lesart jedoch ausgeschlossen sein, da seine Anwendbarkeit sonst nicht gesichert wäre.

Lesarten von (FKE) hinsichtlich des explanatorischen und des evaluativen Projektes einer empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik in Frage stellen:[145] ($\dagger_2$) führt etwa in solchen Fällen zu kontraintuitiven positiven Wissenszuschreibungen, in denen ein hinreichend begabter Mathematikstudent zu Beginn seines Studiums in der Lage ist, im Laufe der nächsten zehn Jahre einen formalen Beweis für ein mehr oder weniger beliebiges mathematisches Theorem p zu erbringen, über das er zum gegebenen Zeitpunkt noch gar nichts weiß. Eine ($\dagger_2$) entsprechende Lesart von (FKE) liefert daher kein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von mathematischem Wissen (oder auch von mathematischer Rechtfertigung).

Der Zeitrahmen in ($\dagger_3$) ist dagegen zwar so gewählt, dass eine entsprechende Lesart von (FKE) als notwendig und hinreichend für das Vorliegen von mathematischem Wissen oder mathematischer Rechtfertigung in gewissen Standardsituationen aus dem Alltag erfahrener praktizierender Forschungsmathematiker gelten könnte. Unter anderen, für die wissenschaftliche mathematische Praxis ebenso relevanten Umständen, etwa in einer mündlichen Fachprüfung im Rahmen eines Mathematikstudiums, ist dieser Zeitrahmen aber gegebenenfalls zu groß. Eine ($\dagger_3$) entsprechende Lesart von (FKE) wäre daher nicht hinreichend als Kriterium für positive epistemische Zuschreibungen in der mathematischen Praxis. Verkleinert man den Zeitrahmen entsprechend, lassen sich laut Löwe und Müller Beispiele aus der Forschungsmathematik finden, in denen Wissen oder Rechtfertigung gemäß der in der Praxis etablierten Sprechweise vorliegt, ($\dagger_3$) aber nicht erfüllt ist:

> „[M]any research mathematicians do not have all of the proofs they need for their work at their immediate cognitive disposal. They need to try one or two standard approaches to tackle the problem, remember the important details, and then are able to provide an acceptable proof. If one keeps this time interval too short, then one arrives at too strict a criterion for knowledge."[146]

Eine entsprechende Lesart von (FKE) wäre dann also kein notwendiges Kriterium für das Vorliegen von mathematischem Wissen oder mathematischer Rechtfertigung in der mathematischen Praxis mehr.

2.3.3 Kontextualistische modalisierte Lesarten von (FKE)

Die vorangegangenen Überlegungen legen nahe, dass strikt invariantistische Lesarten von (FKE), trotz Abschwächung einer der beiden Bedingungen (Int) und (T) oder sogar

[145] Vgl. genauer [75, Abschn. 4.2].
[146] [75, Abschn. 4.2].

beider, auf Probleme stoßen. In diesem Abschnitt wende ich mich daher kontextsensitiven Lesarten von (FKE) im Sinne des semantischen Kontextualismus zu.

Löwe und Müller selbst schlagen im Anschluss an ihre oben dargestellte kritische Diskussion zwei kontextualistische modale Kriterien für das Vorliegen mathematischen Wissens vor. Dabei betrachten sie zunächst folgende Setzung:

„(#) S knows that P iff S's dispositional state of mind allows her to produce the required form of proof or justification for P within the time frame allowed by the context.“[147]

Als eine Lesart von (FKE) lässt sich das in (#) formulierte Wissenskriterium erst auffassen, wenn man annimmt, dass sich das Konzept *akzeptabler Beweise* bzw. in bestimmten Kontexten angemessener Beweistypen in eine entsprechend liberalisierte und kontextualisierte Lesart von „formalisierbar“ einbetten lässt. Diese Annahme möchte ich den folgenden Überlegungen um des Argumentes willen vorerst ohne weitere Rechtfertigung voranstellen, komme aber in Kürze darauf zurück. Unter dieser Annahme ergibt sich folgende Lesart von (FKE), in welcher der Ausdruck „formalisierbar“ nicht mehr explizit auftaucht:

X besitzt die Disposition, innerhalb eines durch den aktuellen Zuschreibungskontext bestimmten Zeitrahmens einen in Bezug auf den Zuschreibungskontext akzeptablen Beweis für p zu erzeugen. (FKE$_3$)

Der Zeitfaktor wird in (FKE$_3$) insbesondere als eine Möglichkeit begriffen, die zunächst unspezifische Rede von mathematischen Fähigkeiten in einer Analyse von „über einen Beweis verfügen“ als „im Prinzip in der Lage sein, einen konkreten Beweis zu erzeugen“ durch die Rede von Dispositionen zu ersetzen.[148]

Die kontextualistische Lesart (FKE$_3$) kann jedoch nur fruchtbar sein, wenn die betrachteten Kontexte den jeweils angemessenen Zeitrahmen und den erforderlichen Beweistyp in geeigneter Weise bestimmen, etwa gemäß einer allgemeinen, ihrerseits möglichst kontextunabhängigen Zuordnungsvorschrift. Zumindest sollten die relevanten kontextuellen Parameter allgemein identifiziert und systematisch beschrieben werden können. Löwe und Müller gehen zwar davon aus, dass ein Kontext in der mathematischen Praxis den dafür angemessenen Typus informeller Beweise in diesem Sinne geeignet bestimmt, weisen die entsprechende Annahme für Zeitrahmen jedoch zurück. Der Beweistyp ist gemäß

[147] [75, Abschn. 4.3].

[148] Der Begriff der Fähigkeit als modales Konzept wird gemeinhin als verwandt mit dem Dispositionsbegriff verstanden. Zumindest in [78] lese ich Löwe und Müller etwa so, dass „in der Lage zu h sein“ soviel bedeutet wie „die Disposition besitzen, innerhalb eines bestimmten Zeitrahmens h zu tun“ (vgl. [78, Abschn. 2]).

Löwe und Müller durch den Typ des Zuschreibungskontextes festgelegt: Z. B. ist es im Rahmen von Seminarvorträgen üblich, einen Tafelbeweis zu präsentieren, der eine völlig andere Form hat als etwa ein Beweis, der in einer mathematischen Fachzeitschrift veröffentlicht wird. Für den Fall des Zeitrahmens gibt es dagegen höchstens eine eindeutige Zuordung zwischen einzelnen Kontexten und den Beweistypen; es mag also sein, dass jedem konkreten Zuschreibungskontext der mathematischen Praxis, unter Berücksichtigung einer genügend großen Anzahl von kontextuellen Faktoren, tatsächlich ein eindeutiger Zeitrahmen für die Angabe eines akzeptablen Beweises zugeordnet werden kann. Die in Abschnitt 2.3.2 angerissenen Überlegungen zur Inadäquatheit invarianter Zeitrahmen[149] deuten jedoch nach Löwe und Müller auch darauf hin, dass selbst eine situative Bestimmung angemessener Zeitrahmen sich nicht durch ein hinreichend unabhängiges, kontextübergreifend einheitliches Prinzip regeln lässt:

> „This analysis [(#)] may be all that is needed, but it also comes with a certain problem: There does not seem to be an independent standard from which to assess the necessary time.“[150]

(FKE_3) müsste demnach für eine fruchtbare kontextualistische Analyse zumindest weiter expliziert werden.

Löwe und Müller argumentieren in [75] und detaillierter in [78] dafür, dieses Problem durch Rückgriff auf einen Fähigkeitsbegriff (*skill*) und ein damit verbundenes Stufen-Modell des Erwerbs professioneller Fähigkeiten zu lösen, den Hubert und Stuart Dreyfus in ihrem Buch *Mind over Machine* [33] entwickeln. In seiner ursprünglichen Form unterscheidet das Dreyfus-Dreyfus-Modell fünf Fähigkeitsstufen, die ich im Folgenden als *Professionsstufen* bezeichne: *Novice*, *Advanced Beginners*, *Competence*, *Proficiency* und *Expertise*. Während etwa auf der *Novice*-Stufe die im Wesentlichen unreflektierte Anwendung expliziter, allgemeiner Regeln steht:

> „*Novice.* Application of context-free rules through information processing“,

ist die *Expertise*-Stufe durch ein besonders hohes Maß an implizitem Wissen-Wie gekennzeichnet:

> „*Expertise.* No need for rules.“[151]

Ich werde dieses Modell nicht in seinem vollen Umfang vorstellen, sondern gehe hier und im Folgenden jeweils nur soweit ins Detail, wie es mir für meine Argumentation vonnöten erscheint. Eine konkrete Ausgestaltung des allgemeinen Dreyfus-Dreyfus-Modells

[149] Vgl. S. 58.
[150] [75, Abschn. 4.3].
[151] Löwe & Müller [78, S. 268].

für mathematische Fähigkeiten und Professionsstufen wird in [78] nicht vorgenommen.[152] Löwe und Müller diskutieren aber zwei allgemeine Aspekte zur Natur und Individuierung mathematischer Fähigkeiten und Professionsstufen: Zum einen sollten Professionsstufen nicht einzelnen Individuen zugewiesen werden, zumindest nicht im Sinne einer objektiv bestimmten Eigenschaft, sondern eher bestimmten Verhaltensmustern in charakteristischen Situationen.[153] Ein einzelnes Individuum ist dann aufgrund seiner spezifischen professionellen Fähigkeiten dazu in der Lage, sich in entsprechenden Situationen in der Regel gemäß dieser Muster zu verhalten. So kann man etwa davon sprechen, dass die spezifischen mathematischen Fähigkeiten eines Mathematikers eine bestimmte Professionsstufe induzieren (ich verwende im Folgenden zugunsten der Lesbarkeit den Ausdruck „Professionsstufe von X" als abkürzende Sprechweise in diesem Sinne). Zum anderen können die für eine bestimmte Professionsstufe charakteristischen Verhaltensmuster und die dafür notwendigen mathematischen Fähigkeiten unter Umständen abhängig vom mathematischen Spezialgebiet variieren. Für die Mathematik sollte allgemein also eher von Professionsstufen in Bezug auf ein mathematisches Spezialgebiet gesprochen werden.[154]

Löwe und Müller schlagen in [75] ein notwendiges und hinreichendes kontextualistisches Wissenskriterium vor, in dem die rein dispositionale Lesart von „über einen Beweis verfügen", welche auf einen Zeitfaktor zur Kontextualisierung angewiesen scheint, durch die Rede von mathematischen Fähigkeiten ersetzt ist:

> „S knows that P iff S's current mathematical skills are sufficient to produce the form of proof or justification for P required by the actual context. This analysis, we claim, is adequate as a general explication of mathematical knowledge."[155]

Die folgende kontextualistische Lesart von (FKE) entspricht nun diesem Kriterium bis auf eine Modifikation:

> Die durch X' aktuelle mathematische Fähigkeiten induzierte Professionsstufe (in Bezug auf die relevanten mathematischen Spezialgebiete) reicht hin, um einen Beweis für p des vom Zuschreibungskontext erforderten Typs zu produzieren. (FKE$_4$)

[152] In den Kapiteln 4 und 5 werde ich anhand meiner empirischen Ergebnisse einige Anhaltspunkte für eine mögliche Ausgestaltung geben können. Eine detailliertere Ausarbeitung ist aber im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen.

[153] Vgl. [78, S. 270]

[154] Vgl. [78, S. 274]

[155] [75, Abschn. 4.4].

Diese Modifikation besteht in der Ersetzung von „X momentane mathematische Fähigkeiten sind hinreichend“ durch „die durch X' momentane mathematische Fähigkeiten induzierte Professionsstufe ist hinreichend“, und ist durch die weiterführende Diskussion zur Individuierung mathematischer Fähigkeiten in [78, Abschn. 5.2] motiviert. Die dort vorgebrachten Argumente für die Adäquatheit des in obigem Zitat vorgeschlagenen Wissenskriteriums[156] erlauben eher eine Zuordnung von Professionsstufen als von spezifischen mathematischen Fähigkeiten zu Beweistypen.

Im Folgenden geht es mir darum, in Anlehnung an Löwes und Müllers Diskussion in [75] und [78] herauszuarbeiten, worin der prinzipielle Vorteil einer Lesart wie (FKE$_4$) gegenüber der rein dispositionalen Lesart (FKE$_3$) besteht. Der in (FKE$_4$) verwendete Fähigkeitsbegriff besitzt durch das Dreyfus-Dreyfus-Modell eine theoretische Basis, die einerseits unabhängig von der durch Löwe und Müller vorgeschlagenen Analyse mathematischen Wissens ist. Dies verhindert eine zirkuläre Analyse des Konzepts mathematischer Fähigkeiten durch Begrifflichkeiten einer Erkenntnistheorie der Mathematik, die selbst wieder auf mathematische Fähigkeiten Rekurs nimmt. Andererseits sichert das Dreyfus-Dreyfus-Modell objektive Bewertungsstandards für das Vorliegen unterschiedlicher Professionsstufen. Dadurch wird es theoretisch möglich, Kontexttypen der mathematischen Praxis die jeweils benötigte Professionsstufe in Abhängigkeit vom jeweils angemessenen Beweistyp anhand dieser Standards zuzuordnen. Dass diese Zuordnung in der Praxis tatsächlich funktioniert, motivieren Löwe und Müller durch den Verweis auf die in der Praxis gut etablierte Sprechweise von mathematischen Fähigkeiten.[157] Zwar zielt das Modell gerade nicht auf die Angabe eines festen Kriterienkataloges („*a stable core of skills*“[158]) für einzelne Professionsstufen. Einzelne Fähigkeiten, die als Indikatoren für eine bestimmte Professionsstufe gelten können, sind in verschiedenen Kontexten unterschiedlich relevant. Dennoch wird laut Löwe und Müller die kontextabhängige Auswahl der relevanten einzelnen Fähigkeiten durch ein kontextübergreifend einheitliches, unabhängiges Prinzip geregelt: die Antwort auf die Frage danach, welche Aufgaben praktizierende Mathematiker während eines Forschungsprozesses erfüllen.[159] Dieses Prinzip liefert eine *funktionale* Analyse der kontextuellen Festlegung der Parameter „Beweistyp“ und „Professionsstufe“:[160] Abhängig davon, welche Aufgabe das epistemische Subjekt X mit einem Beweis erfüllen soll, bestimmt der konkrete Kontext den angemessenen Bewei-

[156] Vgl. genauer die nachfolgende Diskussion zum Vergleich von (FKE$_4$) und (FKE$_3$).
[157] Vgl. [75, Abschn. 4.4] und [78, Abschn. 1].
[158] [78, S. 272].
[159] Vgl. [78, S. 272]
[160] Eine funktionale Auffassung von mathematischen Beweisen wird sich im Folgenden auch in der Diskussion der Position Philip Kitchers wiederfinden (vgl. Abschnitt 2.3.4). Vgl. auch die folgende Zwischenbilanz.

styp. Einen Beweis eines bestimmten Typs in einem konkreten Kontext zu produzieren und zu kommunizieren erfordert dann ein bestimmtes Fähigkeitsprofil von X, das die benötigte Professionsstufe festlegt.[161]

Akzeptiert man die Annahmen, dass sich im konkreten Fall tatsächlich der jeweils angemessene Beweistyp und die entsprechende Professionsstufe durch kontextuell variierende, aber durch ein funktionalistisches, unabhängiges Prinzip verbundene Kriterien bestimmen lassen, so erhält man mit (FKE_4) eine Lesart, die den Einwänden gegen die modal-dispositionale Lesart (FKE_3) entgeht. Gemäß meiner bisherigen erkenntnistheoretischen Klassifikation handelt es sich mit (FKE_4) dabei nicht nur um eine Lesart von (FKE), die explizit die Bedingung (Inv) abschwächt. Auch starke Lesarten von (Int) und (T) sind nicht mit (FKE_4) verträglich.

Im Falle von (T) hängt das Ausmaß der Abschwächung vor allem davon ab, ob die Angemessenheit eines Beweistyps stets die Korrektheit der Beweise dieses Typs impliziert. Zwar ist der Korrektheitsbegriff für informelle mathematische Argumente nicht so präzise wie für formale, dennoch stellt ein korrekter informeller mathematischer Beweis ein Argument dar, bei dem aus der Wahrheit der Voraussetzungen die Wahrheit des bewiesenen Satzes gemäß den Regeln des vernünftigen Denkens folgt, was immer noch eine vergleichsweise starke Lesart von (T) erlaubt. Denkbar wäre aber, dass etwa auch Tafelbeweise angemessen sind, die lokal Fehler enthalten, jedoch global, also im Sinne des groben Argumentationsganges, korrekt sind. In diesem Fall müsste (T) stärker liberalisiert werden. Dann stellt sich allerdings die Frage, ob man in Bezug auf (FKE_4) im Sinne der philosophischen Analyse noch von einem hinreichenden Kriterium für das Vorliegen von Wissen sprechen kann, da es in der allgemeinen Erkenntnistheorie weitgehender Konsens ist, die Wahrheit von p als notwendige Bedingung für das Vorliegen von Wissen, dass p, zu fordern.[162]

Bezüglich der Bedingung (Int) gibt ein Blick auf das Dreyfus-Dreyfus-Modell Aufschluss. Die verschiedenen Stufen lassen jeweils unterschiedliche, mal internalistische, mal externalistische Interpretationen zu. Ich möchte dies nur kurz an den beiden Extremen, *Novice* und *Expertise*, verdeutlichen. Die Charakterisierung der *Novice*-Stufe ist mit einem internalistischen Bild epistemischer Rechtfertigung vereinbar, da hier vom epi-

[161] Man beachte, dass X' tatsächliche Professionsstufe seinerseits durch X' individuelles Fähigkeitsprofil festgelegt ist. Unterschiedliche Fähigkeitsprofile können der gleichen Professionsstufe zugeordnet werden. Dies folgt aus der weiter oben referierten Überlegung, dass die Zuordnung von Professionsstufen nicht unbedingt durch Angabe eines festen Kriterienkataloges erfolgen muss. Das vom Kontext geforderte spezielle Fähigkeitsprofil muss also nicht identisch mit X' tatsächlichem Fähigkeitsprofil sein – die Tatsache, dass sie der gleichen Professionsstufe zuzuordnen sind, garantiert eine hinreichend große Übereinstimmung in den relevanten Aspekten.

[162] Vgl. etwa Brendel [18, S. 11–12].

stemischen Subjekt die bewusst korrekte Anwendung expliziter Regeln gefordert wird. Die Charakterisierung der *Expertise*-Stufe scheint dagegen besser zu einer externalistischen Theorie epistemischer Rechtfertigung zu passen: Vom epistemischen Subjekt wird verlangt, dass es ohne explizite Anwendung von Problemlösungsstrategien und ohne bewusstes Abwägen und Entscheiden für eine von mehreren Alternativen so handelt, wie es unter normalen Umständen objektiv am verlässlichsten ist.[163] Bei Dreyfus und Dreyfus heißt es:

> „[E]xperts don't solve problems and don't make decisions: they do what normally works."[164]

Insofern erfüllt (FKE_4) nur eine schwache Bedingung (Int'): Insoweit, als jede Professionsstufe das Durchlaufen der *Novice*-Stufe (oder einer anderen niedrigen Stufe) voraussetzt, ist ein internalistisches Moment epistemischer Rechtfertigung implementiert. Zwar kann die Bewertung der rechtfertigenden Gründe für eine Überzeugung im Falle des Experten mit der objektiven Verlässlichkeit seiner überzeugungsbildenden Prozesse zusammenfallen, so dass dann eine Rechtfertigung gerade im Sinne eines externalistischen Reliabilismus gegeben scheint. Auch mag der Experte die in seiner Novizenzeit erlernten Regeln vollständig vergessen hat. Dennoch ist das Dreyfus-Dreyfus-Modell so angelegt, dass sich der Expertenstatus und die damit verbundenen Fähigkeiten normalerweise erst aus einer zunächst expliziten Kenntnis dieser Regeln heraus entwickeln.

Eine Zwischenbilanz

Nach den bisherigen Überlegungen erscheint (FKE_4) als aussichtsreicher Kandidat für eine empirisch informierte Lesart von (FKE), den man nun im Rahmen von Schritt 2 des Drei-Schritte-Programmes einem „empirischen Test" unterziehen könnte, was in Schritt 3 gegebenenfalls zu einer Verfeinerung dieser Lesart führen würde. Dennoch werde ich an dieser Stelle die theoretische Analyse formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen noch nicht abbrechen, sondern zwei Apekte von (FKE_4) herausgreifen, die ich bereits hier einer weiteren Analyse unterziehen möchte. An dieser Stelle gehe ich insbesondere über die beiden Arbeiten [75] und [78] von Löwe und Müller hinaus.

[163] Man beachte hier die spezifische Verwendung der erkenntnistheoretischen Begrifflichkeiten. Der Fähigkeitserwerb, wie er im Dreyfus-Dreyfus-Modell modelliert wird, ließe sich in psychologisch-kognitionswissenschaftlicher Terminologie auch als eine Internalisierung expliziter, objektiver externer Regeln beschreiben (vgl. hierzu etwa Stenning [121, S. 3, 259].). Hier verwende ich „intern" und „extern" aber gerade umgekehrt.

[164] [33, S. 30 f.].

Der erste Aspekt betrifft noch einmal die weiter oben (S. 63) bereits diskutierte Festlegung des einem bestimmten Kontext angemessenen Beweistyps sowie der vom epistemischen Subjekt erforderten Professionsstufe. Laut Löwe und Müller geschieht auch diese Festlegung situativ, in dem Sinne, dass es keine feste Kriterienliste für die Auswahl des angemessenen Beweistyps bzw. der benötigten Professionsstufe gibt. Dennoch ist sie nicht völlig relativ, denn sie wird durch ein einheitliches, unabhängiges Prinzip geregelt: die geschlossene, zielgerichtete Berufspraxis der Mathematikergemeinschaft. Die Antwort auf die Frage danach, welcher Beweistyp und welche Professionsstufe in einem konkreten Kontext angemessen sind, ergibt sich aus der Antwort auf die Frage, welche Aufgabe das epistemische Subjekt mit seinem Beweis in Bezug auf den umgebenden, konkreten mathematischen Forschungsprozess erfüllen soll. Hier liegt die plausible Annahme zugrunde, dass es ein einheitliches, kontextübergreifendes Ziel mathematischer Forschung gibt, welches in konkreten Forschungsprozessen verfolgt wird. Offen bleibt allerdings, wie dieses Ziel oder auch diese Ziele genau aussehen, in welchem Sinne eine Rückkopplung an Beweistypen und mathematische Fähigkeiten gegeben ist, und ob diese tatsächlich eine fruchtbare kontextsensitive Analyse[165] durch (FKE_4) begründet. An dieser Stelle komme ich auf die oben zugunsten des Argumentationsganges aufgestellte Hypothese zurück, die in (FKE_3) und (FKE_4) verwendete Redeweise von Beweistypen ließe sich durch einen geeignet modifizierten Formalisierbarkeitsbegriff abbilden. Nur unter dieser Annahme entsprechen den von Löwe und Müller entwickelten Kriterien ja überhaupt Lesarten von (FKE). Die Frage nach der Rechtfertigung dieser Hypothese kann nun – zum Ende des ersten Durchlaufs von Schritt 1 hin – als eine verfeinerte Formulierung meiner ursprünglichen Forschungsfrage nach der epistemischen Rolle formalisierbarer Beweise aufgefasst werden; ihr nachzugehen könnte auch dabei helfen, eine Antwort auf die von Löwe und Müller zunächst offen gelassene Frage nach der genaueren Funktionsweise des von ihnen nur postulierten einheitlichen Prinzips zu finden. In Abschnitt 2.3.5 werde ich daher einen von Jody Azzouni entwickelten Formalisierbarkeitsbegriff vorstellen, der einen Ansatz dazu liefern könnte, die Rede von kontextuell bestimmten Beweistypen (und den damit verbundenen mathematischen Fähigkeiten) in (FKE_4) zu präzisieren.

Der zweite, mit dem ersten verbundene Aspekt, den ich im Rahmen dieses Kapitels noch aufgreifen möchte, betrifft das im vorangegangenen Abschnitt ebenfalls angesprochene funktionalistische Verständnis der epistemischen Rolle mathematischer Beweise. Dieses sollte meiner Auffassung nach durch Überlegungen zur Natur von Beweisen genauer abgebildet werden. Dadurch ergibt sich, wie ich in Kapitel 5 (Abschnitt 5.1.2, S. 222 f.) ausführlicher diskutieren werde, natürlicherweise ein Ansatzpunkt für die Verbindung

[165] Vgl. S. 60.

zwischen bestimmten Beweistypen und spezifischen mathematischen Fähigkeiten des epistemischen Subjektes.

2.3.4 Kitchers Kritik an aprioristischen Lesarten von (FKE)

Der nun folgende Abschnitt befasst sich mit der Analyse zweier verwandter, aprioristischer Lesarten von (FKE), die man als „historisch informierte“ invariantistische Lesarten bezeichnen kann. Diese Lesarten trifft eine Kritik, welche ursprünglich Philip Kitcher in „The Nature of Mathematical Knowledge“ ([58]) gegen den mathematischen Apriorismus richtet. Für meine Zwecke ist besonders der konstruktive Teil von Kitchers Kritik interessant, denn dieser bietet einen guten Ansatzpunkt für eine sozio-empirisch informierte Überarbeitung des kontextsensitiven modalisierten formalisierbarkeitsorientierten Kriteriums für epistemische Zuschreibungen (FKE_4), wie es in Abschnitt 2.3.3 vorgestellt wurde. Meine Ausführungen beinhalten daher auch eine knappe, auf die entsprechenden Lesarten von (FKE) übertragene Darstellung von Kitchers Kritikansatz.[166]

Kitchers beginnt seine Argumentation mit einem Argument gegen einen mathematischen Apriorismus, der sich auf einen rein formalen Beweisbegriff stützt: Angenommen, es existieren zu verschiedenen Zeitpunkten t so etwas wie *formale Standardtheorien* (bei Kitcher: *standard formal theories*, im Folgenden auch kurz: SFT^t), d.h. axiomatische Formalisierungen der von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierten mathematischen Theorien. Dann ändern sich diese mit der Zeit, denn offensichtlich arbeiten die heutigen Mathematiker mit anderen Axiomen als noch die Mathematiker des 19. Jahrhunderts, des Mittelalters oder gar der Antike, und es wäre auch in Hinblick auf die Zukunft der Mathematik nicht sinnvoll anzunehmen, dass das momentan verbreitete Axiomensystem nicht mehr verändert würde. Die Übergangsphase zwischen zwei formalen Standardtheorien SFT^{t_1} und SFT^{t_2} ist dabei durch das Arbeiten mit Beweisen gekennzeichnet, die den Rahmen der korrekten Beweise in SFT^{t_1} sprengen, ohne dass SFT^{t_2} bereits vollständig ausgearbeitet und etabliert ist. Nach Kitcher ist ein naiver formalistischer Apriorismus, dem gemäß mathematische Beweise stets korrekt relativ zu irgendeiner (selbst wenn nicht immer nur ein und derselben) formalen Standardtheorie sein müssen, damit zurückgewiesen, denn er kann die Akzeptanz von Beweisen in den für die Entwicklung mathematischen Wissens so wichtigen Übergangsphasen zwischen zwei formalen Standardtheorien

[166]Insbesondere kann es sich bei dem Folgenden also nicht um eine adäquate Darstellung der Kitcherschen Theorie mathematischer Erkenntnis selbst handeln, und ebenso wenig um eine detaillierte Aufschlüsselung seiner Kritik am mathematischen Apriorismus. Mir geht es in erster Linie darum, einige von Kitchers – in Bezug auf [58] teils sogar nur vorläufige – allgemeineren erkenntnistheoretischen Einsichten zur Mathematik für die Formulierung bzw. Kritik eines bestimmten Lesarttypus von (FKE) nutzbar zu machen.

nicht erklären. Übertragen auf eine entsprechende Lesart von (FKE) bedeutet dies das Folgende:

$$X \text{ verfügt zu } t \text{ über ein SFT}^{t}\text{-formalisierbares Argument für } p \qquad (\mathrm{FKE}_5)$$

kann, unabhängig von der Bedeutung von „verfügen über", keine adäquate Spezifikation von (FKE) sein: Es existieren relevante (historische) Beispiele für mathematische Beweise, die als epistemische Rechtfertigung in der mathematischen Praxis zu einem Zeitpunkt t^* anerkannt werden, die aber nicht SFT^{t^*}-formalisierbar sind.

Was als rechtfertigender Beweis akzeptiert wird kann nun laut Kitcher nur eine korrekte, vernünftige soziale Praxis bestimmen. Um eine solche adäquat beschreiben und erklären zu können, sind der Begriff des formalen Beweises oder des $\text{formalisierbaren}_{\mathrm{inv}}$ Beweises, die Kitcher auch als strukturalistische Beweisbegriffe bezeichnet, jedoch ungeeignet. Um zu verstehen, was die Auswahl bestimmter mathematischer Argumente und die Zurückweisung anderer korrekt und vernünftig macht, benötigt man nach Kitcher einen funktionalen Beweisbegriff, der umfasst, was für eine Aufgabe bestimmte Beweise erfüllen, die andere nicht erfüllen. Einen möglichen Ansatzpunkt für die Analyse dieser Aufgabe, der im Rahmen von aprioristischen Theorien besonders erfolgversprechend ist,[167] bietet ein Übergang von Beweisen als rein sprachlichen Entitäten zu der *Handlung des Beweisfolgens*:

> „We should abandon the structuralist approach to proofs in favor of a *functional* characterization. To put the point simply, proofs are sequences of sentences which do a particular job and, if we have a predilection for formal proofs, it is because we think that formal proofs do the job better than informal ones. [...] The central idea of this answer is to distinguish proofs by characterizing the notion of following a proof."[168]

Ein Übergang von Beweisen im Sinne rein sprachlicher Entitäten zu Handlungen, allerdings zu dialogischen kommunikativen Handlungen, wird sich auch in Bezug auf die (von aprioristischen Theorien unabhängige) Deutung der von mir vorgestellten empirischen Ergebnisse als fruchtbar erweisen, um epistemische Zuschreibungskriterien der mathematischen Praxis zu analysieren.[169]

Auf dieser Grundlage kann Kitcher einen weiteren, allgemeineren Einwand gegen jede Form von mathematischem Apriorismus formulieren, der von dem gerade dargestellten

[167] Kitcher verfolgt diesen speziellen Ansatz später, im Rahmen seiner eigenen, genuin *historisch* informierten Analyse dieser Aufgabe, jedoch nicht weiter, vgl. [58, Kap. 8, Abschnitt II].

[168] [58, S. 37], Hervorhebung im Original.

[169] Vgl. hierzu Abschnitt 4.3, Aspekt (I), und auch Abschnitt 5.1, S. 223 f.

historischen Argument gegen einen naiven Apriorismus unabhängig ist. Aprioristischen Theorien ist demnach die Behauptung gemeinsam, dass eine Analyse der Tätigkeit des Beweisfolgens als lokales logisches Schlussfolgern hinreicht, um die epistemische Funktionsweise von Beweisen und den induzierten apriorischen Status beweisbasierten mathematischen Wissens begründen zu können:

> „What job do proofs do? The apriorist emphasis on the importance of proofs in mathematics reflects a traditional answer: proofs codify psychological processes which can produce a priori knowledge of the theorem proved. If we are to embed the popular thesis that mathematical knowledge is a priori because it is based on proof in an adequate epistemology, then I submit that this is the answer which we should adopt."[170]

Dieser Behauptung hält Kitcher sein *Argument der langen Beweise* (*long proofs argument*) entgegen. Dieses besagt, dass im Falle eines sehr langen und komplex verschachtelten Beweises für p das bloße lokale Nachvollziehen als *a priori*-Rechtfertigung nicht ausreicht, da es unvernünftig wäre, *a priori* jegliche Irrtümer durch das epistemische Subjekt auszuschließen.

Kitchers Argumentation lässt sich als Kritik an folgender Lesart von (FKE) auffassen:

> X verfügt (zu t) über ein korrektes Argument für p, welches einen psychologischen Prozess des Beweisfolgens induziert, bei dem jeder Argumentationsschritt von X durch lokales logisches Schlussfolgern (gemäß SFT^t) nachvollzogen wird. (FKE$_6$)

Elemente dieser Lesart findet man auch in (FKE$_1$), (FKE$_1$') und in (FKE$_5$). Der Adäquatheit von (FKE$_6$) kann man eine leicht modifizierte Version des Argumentes der langen Beweise entgegenhalten: Das Nachvollziehen langer, komplexer Beweise birgt eine Vielfalt von Irrtumsmöglichkeiten für das nachvollziehende epistemische Subjekt, wodurch ein rationaler Zweifel an der Wahrheit der Konklusion entsteht. Dieser Zweifel ist umso größer, je stärker formalisiert der Beweis ist, denn die Erhöhung des Formalisierungsgrades bedeutet meist auch eine Verlängerung des Beweises:

> „Reasonable uncertainty about the conclusion is not just a feature of the kinds of proofs which mathematicians commonly construct and follow. If proofs were presented in completely formal style, the increase in length would ex-

170 [58, S. 37].

acerbate the rational worry that, at some point, one's attention might have lapsed or one may have misremembered some results established earlier."[171]

Ein solcher rationaler Zweifel ist an sich zulässig für epistemische Rechtfertigung. Um Kitchers Argument gerecht zu werden, muss ergänzt werden, dass der Zweifel aber nicht beliebig groß werden darf. Eine Beschränkung der rationalen Unsicherheit, die das Folgen eines langen Beweises birgt, kann nun aber nicht mithilfe eines engen Formalisierbarkeitsbegriffes, wie z.B. formalisierbar$_{\text{inv}}$ erklärt werden, denn wie gerade angemerkt würde ein stärkeres Maß an Formalisiertheit den Beweis in der Regel nur länger und die Unsicherheit entsprechend größer machen. Damit entnimmt man der Kitcherschen Kritik an (FKE$_5$) und (FKE$_6$) auch noch einen unabhängigen Kritikpunkt an (FKE$_1$) und (FKE$_1$').

Kitchers Argumentation scheint bei genauerer Betrachtung eine implizit internalistische Konzeption mathematischer Rechtfertigung zugrunde zu liegen. (FKE$_6$) könnte als externalistisches Kriterium, also unter Aufgabe von (Int), dem Argument der langen Beweise entgehen;[172] sofern der während des Nachvollziehens eines korrekten Beweises ablaufende psychologische Prozess tatsächlich die Überzeugung, dass p, im epistemischen Subjekt generiert, und dieser Prozess aus einer Kette ebenfalls objektiv korrekter lokaler Schlußfolgerungen besteht, kann man ein epistemisches Subjekt als im externalistischen Sinne gerechtfertigt betrachten, auch wenn ihm das selbst nicht bewusst sein man, da es subjektive Zweifel bezüglich der Güte der Rechtfertigung für seine Überzeugung hegt. Kitchers eigenem Entwurf zufolge, den ich aber in diesem Rahmen nicht weiter besprechen werde, gründet sich neues mathematisches Wissen wesentlich auf bestehendes kollektives, *a posteriorisches* weil evolutionäres, durch Autoritäten tradiertes Wissen.

Im nun folgenden letzten Abschnitt dieses Kapitels werde ich eine Lesart von (FKE) diskutieren, die sich wie bereits erwähnt an der mathematikphilosophischen Position Jody Azzounis orientiert. Trotz fundamentaler inhaltlicher Differenzen etwa zur Position Philip Kitchers – Azzouni verteidigt gerade eine aprioristische Auffassung mathematischen Wissens – lehnt auch Azzouni vorschnelle erkenntnistheoretische Schlussfolgerungen aus klassischen starken Lesarten von (FKE) ab. Er bezieht dagegen die Rolle sozialer Praktiken innerhalb der wissenschaftlichen mathematischen Gemeinschaft explizit in seine philosophischen Überlegungen mit ein.

[171] [58, S. 42].

[172] Tatsächlich erfüllt (FKE$_6$) sowohl (T) – relativ zu SFT^t – als auch (Inv), letzteres zumindest bis auf den Zeitfaktor t.

2.3.5 Die Ableitungsanzeiger-Lesart von (FKE)

Entgegen der Kitcherschen Argumentation vertritt Jody Azzouni in [3] mit seiner *Ableitungsanzeiger-Sichtweise* (*derivation indicator view*) der mathematischen Praxis eine Konzeption mathematischer Beweise, die sich in seine aprioristische Erkenntnistheorie der Mathematik[173] einpassen und die Rolle der formalen Ableitung für die mathematische Praxis wieder hervorheben soll. Im Folgenden stelle ich eine Lesart von (FKE) vor, die Kernaspekte der Ableitungsanzeiger-Sichtweise aufgreift und gleichzeitig als mögliche Weiterentwicklung der bisher diskutierten Lesarten an die vorangegangenen Überlegungen anknüpft.[174] Ich werde zunächst kurz Azzounis generelle Sicht der erkenntnistheoretischen Rolle sozialer Faktoren in der mathematischen Praxis skizzieren, die sich von der Kitchers und auch Löwes und Müllers unterscheidet, und von der auch ich mich in Kapitel 1 bereits auf methodologischer Ebene abgegrenzt habe. Dennoch halte ich Azzounis Ableitungsanzeiger-Sichtweise für verträglich mit dem in Kapitel 5 dieser Arbeit skizzierten Ansatz. Anschließend beschreibe ich die Ableitungsanzeiger-Sichtweise und formuliere mit Hilfe eines daran angelehnten Formalisierbarkeitsbegriffes eine entsprechende Lesart von (FKE). Diese Lesart ist insbesondere hinsichtlich des Parameters „formalisierbar“ spezifiziert, lässt aber Spielraum bezüglich „verfügen über“. Daher gehe ich kurz auf verschiedene Spezifikationen des zweiten Parameters und deren erkenntnistheoretische Konsequenzen ein und prüfe ihre Verträglichkeit mit der Ableitungsanzeiger-Sichtweise. Dabei bleibe ich aber bei einer kurzen, ergebnisoffenen Darstellung, auf die ich in Kapitel 5 wieder zurückkomme.

Nach Azzouni können rein auf sozialen Faktoren beruhende Erkenntnistheorien der Mathematik nicht adäquat sein. Eines seiner Argumente gegen ihre Adäquatheit nimmt auf die Einhelligkeit der Mathematiker bei der Beurteilung mathematischer Beweise über die Zeit hinweg Bezug, welche sich nicht allein durch soziale Mechanismen erklären lasse:

> „Any approach which focuses only on (purely) social constraints on behavior falls short in explaining how mathematicians can agree on the status of proofs; and this is because social factors, even when they induce conformity at a time, can't (and don't) prevent *substantial* diachronic change.“[175]

Seine Erklärung für diese Einvernehmlichkeit ist gerade die, dass auch informelle Beweise in einer objektiven Beziehung zu formalen Ableitungen stehen. Hier unterscheidet

[173] Diese entwickelt er bereits in [2].

[174] Insofern werde ich nur punktuell auf Azzounis Arbeiten eingehen, ohne einen Anspruch auf eine vollständige systematische Diskussion seiner Position zu erheben. Insbesondere auf seine erkenntnistheoretischen Überlegungen in [2] werde ich nur soweit eingehen, als es für die Explikation der Ableitungsanzeiger-Sichtweise notwendig ist.

[175] [3, S. 84 f.], Hervorhebung im Original.

Azzouni sich auch von Kitcher in der Bewertung der Rolle sozialer Faktoren bei der Auswahl und Änderung von – in Kitchers Terminologie – formalen Standardtheorien. Diese gehen nach Azzouni im Wesentlichen als logische Erweiterungen auseinander hervor.[176] Der Übergang von einer zur anderen formalen Standardtheorie mag allerdings in einer Weise erfolgen, die durch soziale Hilfspraktiken vermittelt ist. Azzouni spricht solche Hilfspraktiken wie die Bezeugung durch Sachkundige (*testimony*) zunächst in einem anderen Zusammenhang explizit an: der bereits im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Problematik der langen Beweise. Azzouni stellt sich in [2] die Frage, ob wir durch einen Beweis, wie er etwa in einer mathematischen Fachzeitschrift veröffentlicht wird, Wissen *a priori* erlangen können. Diese Frage scheint sich nicht einfach mit „ja" beantworten zu lassen, da ein solcher Beweis in der Regel nicht mit jedem einzelnen Leser bereits als *a priori* wahr bekannten Annahmen startet. Der Leser scheint also zunächst nur zu Wissen *a priori* zu kommen, dass der bewiesene Satz aus der Menge der expliziten und impliziten Annahmen des Autors folgt. Hier vermittelt die Bezeugung durch den Autor dahingehend, dass das durch diese Annahmen erzeugte System ein Teilsystem eines momentan in der mathematischen Praxis akzeptierten axiomatischen Systems ist. Azzouni zufolge lässt sich das Zeugnis in einem solchen Fall aber prinzipiell wieder *a priori* eliminieren:

> „[. . .] there is a clear sense in which the testimony involved here can be eliminated *in principle* [. . .] only if this is possible, [in principle] will we describe the testimony [. . .] as *having mathematical authority*."[177]

Diese Eliminierbarkeitsthese kann als Zugeständnis im Lichte der von Kitcher mit seinem Argument der langen Beweise erhobenen Forderung verstanden werden, dass nur übersichtliche Beweise (*surveyable proofs*) *a priori*-Wissen generieren können. Ich werde diese Diskussion um Übersichtlichkeit und durch Beweise generiertes apriorisches Wissen im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter vertiefen.[178] Generell betrachtet Azzouni soziale Praktiken als essentiellen Bestandteil der mathematischen Praxis; ihre prinzipielle epistemische Eliminierbarkeit diskutiert er explizit nur für wenige kollektive Hilfspraktiken (*group practices of justification*), die der Apriorität mathematischen Wissens zunächst offenbar widersprechen. Im Folgenden möchte ich dagegen darstellen, dass die Ableitungsanzeiger-Sichtweise durchaus die Einbeziehung auch nicht eliminierbarer sozialer Faktoren erlaubt; stellenweise spricht Azzouni dies in [3] bereits selbst an.

Nach Azzounis Analyse der Funktionsweise informeller mathematischer Beweise qualifizieren sich informelle Argumente dadurch für den mathematischen Diskurs, dass sie

[176] Vgl. [3, S. 86 f.].
[177] [2, S. 166], Hervorhebungen im Original.
[178] Vgl. für eine detaillierte Darstellung Bassler [8].

auf eine formale Ableitung *verweisen*: „[...] I take a proof to *indicate* an 'underlying' derivation."[179] Mit „derivation" ist hier ein mechanisch überprüfbares, rein syntaktisches Argument in irgendeinem *algorithmischen System* gemeint, etwa im Sinne eines formalisierbaren$_{\text{inv}}$ Beweis in der oben eingeführten Terminologie:[180]

> „I've already stressed that 'algorithmic system' is neither restricted to a particular logic, a particular subject matter, nor even to an explicit language. What *is* required is that 'proofs' [...] are (in principle) mechanically recognizable."[181]

Ein entsprechendes formalisierbarkeitsorientiertes Kriterium für epistemische Zuschreibungen, mit noch unspezifiziertem „verfügen über", lautet nun einfach wie folgt:

X verfügt über ein Argument für p, das ein Ableitungsanzeiger ist. (FKE$_7$)

Der Ableitungsanzeiger ist bei Azzouni in erster Linie ein sprachliches Objekt. Es reicht jedoch nicht, die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft rein syntaktisch zu charakterisieren:

> „When mathematicians give what I'll describe as 'arguments that indicate derivations', the latter often seem to turn essentially on the subject matter that the derivation concerns."[182]

So ist es für den Übergang vom Ableitungsanzeiger zur formalen Ableitung zulässig, begriffliche oder bereichspezifische Wahrheiten heranzuziehen, denen keine syntaktischen Schlussregeln entsprechen:[183]

[179] [3, S. 84 f.], Hervorhebung im Original.

[180] „*Algorithmic system*" verwendet Azzouni dabei liberaler als Kitcher den Ausdruck „*standard formal theory*"; in [4] lässt er explizit auch diagrammatische Kalküle zu (vgl. insbesondere [4, S. 135 f.]).

[181] [3, S. 86], Hervorhebung im Original.

[182] [3, S. 88].

[183] Wesentlich stärker scheint mir Azzouni an dieser Stelle von einer Forschergruppe um Peter Koepke (Bonn) und Bernhard Schröder (Duisburg-Essen) gelesen zu werden, die sich mit der Entwicklung der Computersoftware NAPROCHE (NAtural language PRoof CHEcking) befasst (vgl. Cramer et al. [27]). Diese Software soll informelle mathematische Argumente mechanisch in formale Ableitungen überführen; genauer gesagt: NAPROCHE soll Beweise, die in einer der informellen mathematischen Sprache sehr ähnlichen formalen Sprache verfasst sind, mechanisch überprüfen können. Die NAPROCHE-Lesart der Ableitungsanzeiger-Sichtweise würde also lauten: Ein informelles mathematisches Argument ist ein Ableitungsanzeiger, wenn es sich in die von NAPROCHE verwendete pseudo-natürliche, sogenannte kontrollierte natürliche Sprache (vgl. Koepke [62]) übersetzen lässt, und das übersetzte Argument von dem implementierten Prüfalgorithmus (dem sogenannten *proof checker*) akzeptiert wird. In diesem Sinne ist ein Ableitungsanzeiger nach der NAPROCHE-Lesart bereits eine Ableitung in Azzounis Terminologie. Die inhaltliche Analyse der pseudo-natürlichsprachlichen Argumente wird dabei mittels computerlinguistischer Methoden vorgenommen. An dieser Stelle wird die NAPROCHE-Lesart allerdings unzulänglich, denn zumindest die eingesetzten computerlinguistischen Methoden können nur die Grammatik der

„The transformations are not logical axioms, but topic-specific truths [. . .].“[184]

Ein informeller Beweis kann nach Azzouni also auf einer begrifflichen Ebene[185] auf eine formale Ableitung verweisen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn wesentliche Beweisschritte des Ableitungsanzeigers auf der im Rahmen eines geeigneten formalen Kalküls syntaktisch nicht abbildbaren Bedeutung bestimmter Meta-Konzepte beruhen. Ein Beispiel hierfür ist ein Beweis, der mit einer Fallunterscheidung arbeitet, allerdings nur einen Fall ausarbeitet und die anderen Fälle durch ein „folgt analog zu Fall 1 aus Symmetriegründen“ beschließt.[186] In diesem Beispiel ist das Meta-Konzept, auf dem wesentliche Beweisschritte beruhen, das Konzept der Symmetrie, die zugehörige Meta-Argumentation ist der Symmetrieschluss.

Zwar mag der Symmetrieschluss in diesem fiktiven und auch in vielen anderen konkreten Anwendungsfällen gültig sein,[187] und ein konkreter informeller Beweis, in dem ein Symmetrieargument verwendet wird, mag stets fallspezifisch formalisiert werden können. Dem Symmetrieschluss entspricht damit aber noch keine allgemeine syntaktische Schlussregel in einem geeigneten formalen mathematischen Kalkül. Er ist nur bereichsspezifisch gültig, ohne dass man den zulässigen Anwendungsbereich – hier etwa: algebraische Umformungen von Ausdrücken, in denen symmetrische mathematische Prädikate und Relationen auftreten – geeignet formal definieren könnte: Zumindest für einige der von Azzouni diskutierten Beispiele für Symmetrieschlüsse wäre dies zwar im Rahmen eines Kalküls zweiter Stufe mit mathematischen Axiomen zweiter Stufe, die spezifische Ableitungsschritte für Ausdrücke mit symmetrischen Prädikaten zulassen, möglich. Azzouni argumentiert aber dafür, dass eine solcher Kalkül generell keinen geeigneten, natürlichen Kalkül für eine Analyse von Beweisstrukturen der mathematischen Praxis darstellt.[188]

Informelle Beweise, in denen Symmetrieschlüsse korrekt verwendet werden, sind also Ableitungsanzeiger in Azzounis Sinne, die durch ein rein syntaktisch nicht angemessen erfassbares Element auf eine formale Ableitung verweisen.[189]

(Pseudo-)Normalsprache analysieren, nicht aber begriffliche Wahrheiten ausnutzen. Solche Transformationsschritte sind aber für den Übergang von einem Ableitungsanzeiger zur indizierten formalen Ableitung bei Azzouni explizit erlaubt.

[184] [3, S. 89].

[185] Jedoch ohne dass dadurch zwangsläufig auf mathematische *Objekte* Bezug genommen werden müsste, vgl. [3, S. 89]

[186] Solche Symmetrieargumente findet man etwa in Kontexten, in denen ein Beweis für eine Äquivalenz gegeben werden soll; oft wird nur eine der beiden Implikationsbeziehungen explizit gezeigt, da die umgekehrte Implikationsbeziehung damit bereits aus Symmetriegründen folgt.

[187] Z. B. immer dann, wenn in einzelnen Beweisschritten symmetrische Beziehungen wie „=“ ausgenutzt werden. Dies ist stets bei Äquivalenzumformungen von Gleichungen der Fall. Vgl. Azzouni [3, S. 89].

[188] Vgl. [3, S. 90 ff.].

[189] Insbesondere erklärt ein Ableitungsanzeiger daher im Allgemeinen nicht in einem für die mathematische Praxis befriedigenden Sinne, *warum* er auf eine formale Ableitung verweist. Azzouni hat genau dieser

Gemäß der in den vorangegangenen Abschnitten verwendeten erkenntnistheoretischen Klassifizierung der unterschiedlichen Lesarten von (FKE) läßt sich zu (FKE_7) das Folgende festhalten: (FKE_7) erfüllt die Bedingung (T) strikt, wenn für einen Ableitungsanzeiger stets gilt, dass er neben den Axiomen und Schlussregeln des zugrunde liegenden algorithmischen Systems nur von der Substitution begrifflicher Wahrheiten und von bereits durch einen Ableitungsanzeiger bewiesenen Sätzen Gebrauch macht. Ein Ableitungsanzeiger in diesem Sinne garantiert die (systemrelative) Wahrheit seiner Konklusion. Unter einer liberaleren Lesart der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft könnte auch ein nicht korrektes oder sehr lückenhaftes informelles mathematisches Argument ein Ableitungsanzeiger sein. Dann wäre (T) allerdings nicht mehr im Sinne einer wahrheitsgarantierenden epistemischen Rechtfertigung erfüllt. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass ein epistemisches Rechtfertigungskonzept, welches die Infallibilität epistemischer Rechtfertigung impliziert, zumindest aus Sicht der allgemeinen Erkenntnistheorie gar nicht wünschenwswert ist.[190]

(FKE_7) erfüllt bezüglich der bisher vorgestellten Ableitungsanzeiger-Lesart des Parameters „formalisierbar“ auch die Bedingung (Inv), allerdings in leicht abgeschwächter Form: Wie bereits angemerkt, sind die Kriterien für das Vorliegen der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft abhängig vom thematischen Umfeld (*subject matter*) der mathematischen Aussage p, die es zu beweisen gilt. Damit wird (FKE_7) aber noch nicht sensitiv hinsichtlich weiterer, begleitender situativer Umstände. Eine weitergehende Einbindung von nicht-elimierbaren situativen Faktoren, insbesondere von mathematischen Fähigkeiten und Professionsstufen im Sinne der Diskussion von (FKE_4),[191] deutet Azzouni zwar stellenweise explizit an, ohne diese Möglichkeit jedoch detailliert auszuarbeiten:

> „But there is another way, more sociological in flavor, in which topic-specificity comes into play. This is in how the mathematicians can presume on *knowledgable readers*: proof-procedures of various sorts can be simply assumed as parts of the toolkit; a certain level of competence (in proof) is assumed as well, so that if a proof takes a certain form, the reader is understood as able to modify it in appropriate ways. These ways, turning on the background

Punkt jüngst dazu veranlasst, die Rede von „*derivation indicator*“ für seine Auffassung der Verhältnisses von informellen zu formalen Beweisen als unglücklich zu bezeichnen. Der Ausdruck „*indicator*“ suggeriere demnach, dass eine Ableitungsanzeiger auch zeigt, warum er auf eine formale Ableitung verweist (vgl. [6, Fußnote 17 und Abschnitt 16]).

[190]Vgl. etwa Brendel [18, S. 12]: „Wissen muss als fallibel analysiert werden, d. h. S' Rechtfertigung der Meinung, dass p, muss die Wahrheit von p nicht garantieren. [...] Eine Wissensanalyse, die von Wissen Infallibilität verlangt – und daher Wissen mit Gewissheit gleichsetzt – hätte zwar den theoretischen Vorteil, gegenüber Gettier-Problematik und Skeptizismus immun zu sein, ein so bestimmter Wissensbegriff wäre jedoch leer oder nahezu leer.“

[191]Vgl. S. 61.

> knowledge (and ability) of the profession at a time, can't be codified—not once and for all, anyway."[192]

Durch den noch unspezifizierten Parameter „verfügen über" bietet (FKE_7) im Hinblick auf die Bedingung (Int) Spielraum für unterschiedliche differenziertere Lesarten. Welche davon mit Azzounis eigener erkenntnistheoretischer Sichtweise verträglich sind, werde ich nicht im Detail diskutieren, da seine Ausführungen hier stellenweise unterschiedlich gelesen werden können. *Prima facie* ist (FKE_7) sowohl mit externalistischen als auch internalistischen Konzeptionen epistemischer Rechtfertigung verträglich, da die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft als objektive Eigenschaft sprachlicher Entitäten konzipiert ist. Eine externalistische Spezifikation von (FKE_7) könnte beispielsweise nur das objektive Vorliegen der Anzeiger-Eigenschaft fordern, ohne dass diese auch Teil des überzeugungsbildenen Prozesses in Bezug auf das epistemische Subjekt sein muss. Insbesondere wäre es dann nicht notwendig, dass das epistemische Subjekt auch die angezeigte formale Ableitung kennen muss. Azzounis Formulierungen deuten jedoch stellenweise auf eine internalistische Lesart hin, wie etwa das folgende Zitat verdeutlicht:

> „If proofs really are devices mathematicians use to convince another of one or another mechanically checkable derivation, it suffices to explain why mathematicians are so good at agreeing with one another on whether some proof convincingly establishes a theorem."[193]

Eine interessante Frage, die man nach den gerade angestellten Überlegungen bezüglich der Bedingungen (Inv) und (Int) aufwerfen kann, ist die nach der Natur der Träger der Anzeiger-Eigenschaft. Ich komme in Kapitel 5 darauf zurück. Dort schlage ich eine Kombination aus geeignet modifizierten Aspekten der Kitcherschen Überlegungen zu einem funktionalen Beweisbegriff und einem damit je nach intendierter Funktion verbundenen Übergang von Beweisen als rein linguistischen Entitäten zu Handlungen, sowie von Löwes und Müllers Modellierung der epistemischen Rolle mathematischer Fähigkeiten und Azzounis Ableitungsanzeigern als adäquate Formulierung eines sozio-empirisch informierten formalisierbarkeitsorientierten Kriteriums für epistemische Zuschreibungen vor. Als Träger der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft führe ich nicht rein sprachliche Entitäten, sondern Beweise als dialogische Handlungen („Beweishandlungen", vgl. Abschnitt 5.2.1, S. 230 f.) ein. Durch diesen Übergang zu Beweishandlungen wird die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft kontextualisiert und explizit auf soziale Faktoren wie die mathematischen

[192][3, S. 95 f.], Hervorhebungen im Original.
[193][3, S. 84 f.], meine Hervorhebung.

Fähigkeiten des epistemischen Subjektes oder die Adressaten einer bestimmten Beweisführung ausgedehnt.[194] Bei Azzouni findet sich zumindest ein rhetorischer Hinweis auf die Möglichkeit, eine Ableitungsanzeiger-Eigenschaft statt für Beweise als rein sprachliche Entitäten für kommunikative Handlungen zu konzipieren:

> „The day-to-day practice of mathematicians isn't to actually *execute* such derivations, but only to *indicate*, to themselves or to others in their profession, such derivations [...]."[195]

Mein Vorschlag ist indes wesentlich durch meine empirischen Ergebnisse motiviert, die ich in den nun folgenden Kapiteln 3 und 4 vorstellen werde.

[194] Mein Vorschlag kann dabei auch als Versuch aufgefasst werden, bei Azzouni teilweise undeutlich bleibende Begrifflichkeiten der Ableitungsanzeiger-Sichtweise präziser zu fassen. Vgl. hierzu insbesondere Abschnitt 5.2.1, S. 232 ff.

[195] [3, S. 95], Hervorhebungen im Original.

3 Eine Umfragestudie zur Verwendung epistemischer Begriffe in der mathematischen Praxis

In diesem Kapitel stelle ich die erste meiner beiden sozio-empirischen Studien zu epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis vor. Dabei handelt es sich um eine Umfragestudie, in der sowohl der abstrakte Wissens- und Beweisbegriff praktizierender Mathematiker als auch der konkrete Gebrauch epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis untersucht wurden. Die Durchführungs- und entsprechend auch die Darstellungsabfolge orientieren sich dabei am „idealtypischen Ablauf eines empirischen Forschungsprozesses“:[196] In Abschnitt 3.1 diskutiere ich das experimentelle Design der Studie, insbesondere den Aufbau des Fragebogens, die Auswahl der Umfrageteilnehmer und das Auswertungsverfahren, sowie Grundsätzliches zum gewählten Interpretationsrahmen. In Abschnitt 3.2 stelle ich ausgewählte Ergebnisse der Umfrage vor. Ich beschränke mich dabei auf eine in sich abgeschlossene Menge von Teilergebnissen, die in Bezug auf meine philosophische Fragestellung besonders aufschlussreich sind. Der vollständige Fragebogen sowie die Gesamtheit der Umfragedaten sind in Anhang A und B dargestellt. In Abschnitt 3.3 biete ich eine vorläufige Interpretation der vorgestellten Ergebnisse im Hinblick auf drei philosophisch motivierte Arbeitshypothesen an. Diese vorläufige Interpretation liefert vier Ausgangsfragen für die im nachfolgenden Kapitel 4 vorgestelle Vertiefungsstudie.

3.1 Methode und Forschungsdesign

Wie schon in Abschnitt 1.3.4 von Kapitel 1 erwähnt,[197] legt die Ausgangsfragestellung meiner Untersuchung neben qualitativen auch quantitative Erhebungsmethoden nahe. Ich habe für die quantitative Studie die Methode der Befragung mittels eines Online-Fragebogens gewählt. Der zugehörige Fragebogen wurde im Sommer 2006 mithilfe einer

[196] Klammer [59, S. 48].
[197] S. 24 f.

entsprechenden Software (*Perseus / Web Surveyor*) entwickelt und von Ende Juli bis Anfang Oktober 2006 über die zugehörige Online-Plattform bereitgestellt, der Link auf die Plattform wurde zusammen mit einer kurzen Bitte zur Teilnahme an der Umfrage über Internet-Newsgroups versendet. Auch die Datensammlung der ausgefüllten Bögen erfolgte über diese Plattform. Im Folgenden möchte ich kurz genauer auf den Aufbau des Fragebogens, die Auswahl der Teilnehmer und das spezielle Auswertungsverfahren eingehen.

3.1.1 Aufbau des Fragebogens

Der verwendete Fragebogen enthält insgesamt 74 Fragen und gliedert sich in vier Teile. Ich betrachte hier nur die ersten drei Teile: In einem kurzen vierten Teil geht es um die Abfrage von Einstellungen zum (abstrakten) Begriff mathematischer Schönheit, die Ergebnisse dieses vierten Teils wurden im Rahmen dieser Arbeit aus Gründen des Umfangs aber nicht mehr ausgewertet.[198]

In Fragebogenteil I werden Alter und Geschlecht der Teilnehmer, ihr Ausbildungsstand (allgemein und im Fach Mathematik insbesondere), das Land, in dem die mathematische Ausbildung abgeschlossen wurde, sowie Lehr- und Forschungserfahrung im Fach Mathematik (in Jahren) abgefragt. Dieser Teil diente mir im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich zur Herausfilterung von Antworten aus der Zielgruppe (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Fragebogenteil II enthält sogenannte Einstellungsfragen, d.h. Fragen nach „Beurteilungen und Bewertungen über eine Person oder ein Thema durch den Befragten"[199] u.a. mittels vorgelegter, vorformulierter Aussagen zum Thema, welche die Befragten jeweils auf einer mehrstufigen Skala bewerten sollten. Mit Hilfe dieser Einstellungsfragen sollten die von praktizierenden Mathematikern entwickelten abstrakten Begriffe „Wissen" und „Beweis" untersucht werden.

Im umfangreichsten Fragebogenteil III wird, ebenfalls durch Einstellungsfragen vermittelt, die Verwendung von Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis untersucht. Zu diesem Zweck wurden den Umfrageteilnehmern vier fiktive Szenarien aus dem Alltag eines praktizierenden Mathematikers vorgestellt.

Die Szenarien wurden vor dem Hintergrund der folgenden drei durch die philosophische Diskussion in Kapitel 2 motivierten, empirischen Arbeitshypothesen entwickelt:

(H1) Die Wissenszuschreibungen der Teilnehmer hängen systematisch von kontextuellen Änderungen ab.

[198] Vgl. hierzu aber Müller-Hill & Spies [100].
[199] Klammer [59, S. 221].

(H2) Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung von p durch das epistemische Subjekt X ist hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung durch die Teilnehmer.

(H3) Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung für p durch das epistemische Subjekt X ist keine notwendige Forderung für eine positive Wissenszuschreibung durch die Teilnehmer.

Die These (H1) ist, in der Terminologie von Abschnitt 2.2 gesprochen, einerseits mögliche Ausschlussbedingung für strikt invariantistische Lesarten von (FKE), je nachdem, welche Art von kontextueller Abhängigkeit festgestellt werden kann: Handelt es sich um kontextuelle Abhängigkeiten, die unter Bezugnahme auf den Zuschreibungskontext von epistemischen Zuschreibungen ausgedrückt werden können, so wäre dies ein Argument für eine kontextualistische Analyse epistemischer Begrifflichkeiten der mathematischen Praxis im Sinne des semantischen Kontextualismus. Andererseits soll die Prüfung von (H1) Aufschluss darüber geben, ob epistemische Rechtfertigung durch mathematische Beweise entgegen der verbreiteten Vorstellung von unfehlbaren mathematischen Beweisen fallibel ist. Einen Hinweis darauf gibt gegebenenfalls eine Zeitrelativität der Bewertung von Wissenszuschreibungen im Hinblick auf hinzutretende Anfechtungsgründe.[200]

(H2) zielt auf die in Abschnitt 2.3.1 theoretisch begründete, intuitive Attraktivität strikt internalistisch-invariantistischer Lesarten von (FKE).

(H3) schließlich soll die ebenfalls in Abschnitt 2.3.1 ausgesprochene Behauptung, eine Abschwächung solch starker Lesarten von (FKE) sei im Rahmen einer sozio-empirisch informierten Untersuchung vonnöten, empirisch untermauern.[201]

Szenario 1 des Fragebogens wurde als Testszenario für (H1), Szenario 2 und 3 wurden als Testszenarien für (H2), und Szenario 4 als Testszenario für (H3) konzipiert. Jedes der vier Szenarien in Teil III des Fragebogens enthält dazu Schlüsselszenen, die Rückschlüsse auf mögliche systematische Zuschreibungskriterien für Wissenszuschreibungen und die

[200] An dieser Stelle erfolgt die in Abschnitt 2.2 (vgl. Fußnote 124) angekündigte generelle Erinnerung daran, dass im Folgenden die Rede von „kontextsensitiv", „kontextabhängig" (im Unterschied zu „kontextinvariant" und „kontextunabhängig") oder „kontextueller Faktor" nicht gleich eine Kontextabhängigkeit im Sinne des semantischen Zuscheibungskontextualismus behauptet; ob im Einzelfall eine Kontextabhängigkeit im Sinne des semantischen Kontextualismus vorliegt, wird durch vertiefende empirische Ergebnisse oder genauere Analyse im Laufe der Diskussion gegebenenfalls gesondert geprüft.

[201] (H1) bis (H3) liefern zwar keine so feinkörnige, systematische Unterscheidung zwischen verschiedenen Lesarten von (FKE), wie diese in Abschnitt 2.2 eingeführt wurde. Hier ist jedoch zu bedenken, dass die Klassifikation und Auswahl der dort diskutierten Lesarten zum Teil selbst erst Ergebnis der in diesem und in Kapitel 4 vorgestellten Interpretation der empirischen Ergebnisse sind. Kapitel 2 spiegelt in diesem Sinne den Analysestand nach mehreren Durchläufen des in Kapitel 1 vorgestellten Drei-Schritte-Programms DSP (vgl. 1.3.3) wider. Wie dort bereits erläutert, habe ich zugunsten der Lesbarkeit auf eine chronologische Abbildung der unterschiedlichen Zwischenstadien jedoch verzichtet.

möglicherweise zugrundeliegenden Rechtfertigungs- und Wissensbegriffe der Antwortenden im Hinblick auf die jeweilige Hypothese zulassen sollen.

In der im Folgenden betrachteten Schlüsselszene von Szenario 1 tritt im Laufe des Szenarios ein Anfechtungsgrund hinzu, der den vom Szenarioprotagonisten geführten Beweis aus erkenntnistheoretischer Sicht übertrumpft.[202] Es geht hier also um die Frage, ob und in welchem Sinne die Teilnehmer die anschließend abgefragten Wissenszuschreibungen kontextsensitiv bewerten. Die Schlüsselszenen der Szenarien 2 und 3 dienen der Klärung, ob ein weitgehend formaler Beweis bereits eine hinreichende Bedingung für eine positive Bewertung der in Frage stehenden Wissenszuschreibungen darstellt. In Szenario 4 (dieses ist vergleichsweise kurz und umfasst insgesamt nur zwei Fragen) geht es um die Frage, in welchem Maße sogenannte Beweisideen und (geometrische) Intuitionen hinreichend für die positive Bewertung der in Frage stehenden Wissenszuschreibungen sind, oder ob ein weitgehend formaler Beweis eine notwendige Bedingung für eine positive Bewertung darstellt.[203]

Der Szenarioverlauf wurde den Teilnehmern jeweils nur stückweise in kleinen Teilsequenzen preisgegeben. Jeweils nach einer abgeschlossenen Teilsequenz eines Szenarios wurden sie dabei gefragt, ob sie dem jeweiligen Protagonisten des Szenarios Wissen zuschreiben oder nicht.[204] Am Ende eines jeden Szenarios hatten die Umfrageteilnehmer Gelegenheit, einen Freitextkommentar abzugeben.

3.1.2 Zielgruppe und Stichprobe

Die Zielgruppe meiner Umfrage bestand aus einer internationalen Gruppe von Mathematikern mit Forschungs oder Lehrhintergrund (nicht notwendigerweise in der Hochschullehre) in Mathematik. Der Link zum Online-Fragebogen mit der Bitte zur Teilnahme wurde zweimal in wissenschaftlichen mathematischen Newsgroups veröffentlicht, zunächst als Testlauf in der Newsgroup `sci.math`. Die zweite Veröffentlichung, auf deren Ergebnisse ich mich in meiner Arbeit ausschließlich beziehe, geschah in den Newsgoups `sci.math.research` und `de.sci.mathematik`.[205]

[202] Vgl. Grundmann [49, S. 227].

[203] Vgl. zur genaueren Erläuterung die jeweiligen Begründungen zur Auswahl der Clustervariablen anhand der detaillierten Szenariobeschreibungen, S. 97, 106, 115 und 121.

[204] Rein technisch war ein „Zurückblättern“ möglich, d.h. ein Teilnehmer konnte zuerst alle Sequenzen eines Szenarios durchspielen und erst anschließend seine Antworten endgültig festlegen. Diese Option war den Teilnehmern jedoch nicht explizit zur Wahl gestellt.

[205] Da der Online-Fragebogen ausschließlich auf diese Weise zugänglich war, existiert also eine zusätzliche Einschränkung meiner Stichprobe auf Mathematiker, die wissenschaftliche mathematische Newsgroups lesen. Ich gehe jedoch im Folgenden ohne weitere Diskussion davon aus, dass diese Einschränkung keine ernstzunehmende Auswirkungen auf die Ergebnisse hat: Eine signifikante Korrelation zwischen der Angewohnheit, Newsgroups zu lesen, und bestimmten Einstellungen zur Natur mathematischen Wissens

Ein beantworteter Fragebogen zählte als gültig, wenn Fragebogenteil I sowie mindestens eine der Fragen aus einem der Fragebogenteile II, III, oder IV beantwortet wurden. Die Resonanz auf den zweiten Teilnahmeaufruf war mit 108 gültig beantworteten Fragebögen (von 250 Antworten insgesamt) zufriedenstellend. Von den 108 gültigen Antworten wurden 76 von Personen aus der Zielgruppe abgegeben.

Diese 76 Personen bilden die Stichprobe meiner Umfragestudie. Die meisten dieser Personen haben ihre mathematische Ausbildung in Deutschland (44,1 %) und in den USA (18,6 %) abgeschlossen, ebenfalls zu größeren Anteilen vertreten waren England (UK), die Schweiz, die Niederlande, Frankreich und Belgien. Die Mehrheit der Stichprobenteilnehmer verfügt über Erfahrungen von einem bis zu 35 Jahren sowohl in der Forschung als auch in der universitären Lehre. 13.2 % der Stichprobenteilnehmer haben einen Bachelor (oder einen äquivalenten Abschluss), 19.7 % einen Master (oder einen äquivalenten Abschluss) und 46.1 % einen Doktorgrad (oder einen äquivalenten Abschluss) in Mathematik erreicht.

Die Anzahl der für bestimmte Fragebogensequenzen berücksichtigten Antworten variiert im konkreten Fall. Dies wird an entsprechender Stelle stets gekennzeichnet sein.[206]

3.1.3 Auswertungsverfahren

Die quantitativen Fragen aus den Fragebogenteilen I und II wurden durch eine Analyse der relativen Häufigkeiten ausgewertet, die Ergebnisse der Freitextfragen werden durch eine exemplarische Zitatauswahl dargestellt (Abschnitt 3.2.1). Sie dienen der vertiefenden Interpretation der Häufigkeitsergebnisse (Abschnitt 3.3.1). Die quantitativen Fragen aus den vier Szenarien[207] in Fragebogenteil III wurden dagegen mithilfe einer sogenannten Clusteranalyse ausgewertet (Abschnitt 3.2.2).[208] Auch hier dienen die zusätzlich abgegebenen Freitextkommentare der Teilnehmer, die wieder in exemplarischer Auswahl zitiert werden,[209] der Klärung, Verfeinerung und Vertiefung der späteren Inter-

und mathematischer Beweise erscheint jedenfalls nicht sehr wahrscheinlich, und konnte auch durch die Ergebnisse der vertiefenden Interviewstudie, die nicht dieser Einschränkung unterlag, nicht bestätigt werden.

[206] Man beachte insbesondere, dass die Auswertung der verschiedenen Szenarien von Fragebogenteil III jeweils auf einer kleineren Anzahl von Datensätzen basiert, da hier das zusätzliche Kriterium erfüllt sein musste, dass das jeweilige Szenario vollständig beantwortet wurde.

[207] Vgl. Abschnitt 3.1.1.

[208] Eine erste Häufigkeitsanalyse und Interpretation ausgewählter Ergebnisse sowohl aus Fragebogenteil II als auch aus den Szenarien 1 und 3 aus Teil III im Hinblick auf (H1) bis (H3) wurde in Müller-Hill [99] und teilweise auch in Löwe, Müller & Müller-Hill [79] vorgenommen. Auf Grundlage der im Folgenden vorgestellten Clusteranalysen zu Fragebogenteil III ist jedoch eine wesentlich differenziertere Interpretation möglich.

[209] Sämtliche abgegebenen Freitextkommentare sind in Anhang B zusammengestellt.

pretationen (Abschnitt 3.3.2). Sämtliche Freitextkommentare werden im ursprünglichen Wortlaut wiedergegeben, sie wurden lediglich hinsichtlich grober grammatikalischer und orthographischer Fehler korrigiert. Die Zitate der Freitextkommentare werden zur einfacheren Bezugnahme fortlaufend durchnummeriert. Die Nummerierung hat die Form (3.i) für das i-te Zitat im dritten Kapitel.

Da die Clusteranalyse kein allgemein bekanntes, klassisches statistisches Auswertungsverfahren wie etwa eine Korrelationsanalyse darstellt und außerdem eine Reihe von methodologischen Vorüberlegungen nötig macht, möchte ich hier genauer darauf eingehen. Das Auswertungsverfahren der Clusteranalyse ist ein Verfahren, mit dem Verdichtungspunkte (*Cluster*) in zweidimensionalen Datenwolken ausfindig gemacht werden können. In Bezug auf Umfragedaten bedeutet das, dass man mithilfe einer Clusteranalyse besonders ausgeprägte Antwortprofile herausfiltern kann.[210] Dabei wird ein idealer Antworttypus als stellvertretend für eine ganze Klasse ähnlicher Antwortprofile identifiziert. Daher ist die Clusteranalyse ein in erster Linie klassifikatorisches und damit qualitatives Auswertungsverfahren (Clusterklassifikation nach Idealtypen), dem aber ein quantitatives Datenaufbereitungsverfahren (Clusterbildung mit Hilfe einer quantitativen Ähnlichkeitsrelation) vorgeschaltet ist. Insbesondere handelt es sich nicht um ein statistisches Verfahren, d.h. es werden keine Aussagen über die statistische Signifikanz bestimmter Cluster gewonnen: Die Antwortprofile sollen vielmehr zeigen, in welchen Bereichen sich die Intuitionen von Mathematikern in Bezug auf die Verwendung von Wissenszuschreibungen *überhaupt* bewegen. Aufgrund dieser speziellen Eigenschaften ist die Clusteranalyse hinsichtlich des tatsächlichen Rücklaufs verwertbarer Fragebögen, der für eine klassische Statistik zu niedrig war, sowie angesichts der Diagnose möglicher gruppenspezifischer, z.B. fachbereichsspezifischer Verwendungen der Begriffe von Wissen, Rechtfertigung, Beweis und Formalisierbarkeit in der mathematischen Praxis besonders geeignet.

Neben den vier unabhängigen Clusteranalysen der jeweiligen Schlüsselszenen der Einzelszenarien habe ich weder eine Gesamtclusteranalyse aller vier noch eine kombinierte Analyse einzelner Schlüsselszenen durchgeführt. Der hier zugrundeliegende Datensatz ist dafür technisch ungeeignet: Für eine Berücksichtigung einer größeren Anzahl von sogenannten Clustervariablen, also von Fragen, die in die Profilbildung mit eingehen, wie sie die gemeinsame Clusteranalyse verschiedener Schlüsselszenen mit sich gebracht hätte, ist sowohl der Umfang der Stichprobe zu gering als auch die verwendete Antwortskala (vgl. S. 97) zu grobkörnig. Mögliche Verbindungen zwischen einzelnen Clustern aus ver-

[210] Vgl. Abschnitt 3.2.

schiedenen Szenarien knüpfe ich auf theoretischer Ebene in Abschnitt 3.4 anhand der in 3.3.2 vorgeschlagenen Interpretationen und stelle sie im Rahmen der nachfolgenden Vertiefungsstudie auf den empirischen Prüfstand. Auch eine gemeinsame Clusteranalyse der Schlüsselszenen aus Fragebogenteil III mit Fragen aus Teil II wurde nicht durchgeführt: Die starke Dominanz einzelner Antwortmöglichkeiten in den Häufigkeitsergebnissen aus Fragebogenteil II[211] verhindert eine sinnvolle Clusteranalyse dieser Ergebnisse, denn sie erlauben kaum Profilbildung. Insbesondere erzeugen diese Ergebnisse keine sinnvollen neuen Antwortprofile im Vergleich mit den aus Teil III gewonnenen Profilen.

Auf abstrakte technische Details des Verfahrens gehe ich an dieser Stelle nicht weiter ein.[212] Soweit spezielle Details für die Ergebnisdarstellung notwendig sind, erläutere ich diese zum besseren Verständnis exemplarisch mit direktem Bezug auf die konkreten Ergebnisse anhand von Szenario 1 in Abschnitt 3.2.2 (S. 97 f.). Die Clusteranalyse der elektronischen Datensätze habe ich mithilfe der Software *ClustanGraphics*[213] vorgenommen.

Von methodologischer Bedeutung insbesondere in Bezug auf die spätere Interpretation der Ergebnisse ist dagegen die Auswahl der Clustervariablen: Sie ist nicht in erster Linie durch das Verfahren bestimmt, sondern erfolgt im Vorfeld der Auswertung durch den Auswertenden. Das vortheoretische Verständnis der untersuchten Fragestellung ist daher für die Auswahl der Clustervariablen und darüber hinaus auch für die spätere Auswahl einer zugehörigen Clusterlösung (d.h. die Auswahl der endgültigen Anzahl und Gestalt der Antwortcluster, vgl. S. 97 f.) entscheidend. In meinem Fall erfolgte die Auswahl der Clustervariablen pro Szenario, also die Bestimmung der für meine Fragestellung jeweils relevanten Schlüsselszene, unter Rückgriff auf die Ergebnisse der in Kapitel 2 geführten Diskussion verschiedener formalisierbarkeitsorientierter Konzeptionen von beweisbasiertem mathematischem Wissen und mathematischer Rechtfertigung. Bei mehreren möglichen Clusterlösungen zu diesen Variablen wurde zudem diejenige Lösung ausgewählt, die vor dem Hintergrund der entsprechenden philosophischen, erkenntnistheoretischen Begrifflichkeiten am besten zu interpretieren war. Dieses Vorgehen entspricht damit dem

[211] Vgl. hierzu Abschnitt 3.2.1.

[212] Hier sei z. B. auf Bacher [7], Everitt, Landau & Leese [38] und Wiedenbeck & Züll [129], für die mathematischen Hintergründe insbesondere auf Kaufman & Rousseeuw [57] verwiesen.

[213] Version 8.0, programmiert von David Wishart, Clustan Limited, Edinburgh & St. Andrews.

in Abschnitt 1.3.3 beschriebenen Programm DSP einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik: Die in Kapitel 2 durch philosophische Analyse gewonnenen Ergebnisse (Schritt 1) beeinflussen das Design der hier vorgestellten empirischen Untersuchung (Schritt 2) im Hinblick auf einen vorläufigen Vergleich von analytischen und empirischen Ergebnissen in Abschnitt 3.3 (Schritt 3), der schließlich zu einer erneuten theoretisch geprägten Diskussion in Abschnitt 3.4 (Schritt 1) für die in Kapitel 4 vorgestellte empirische Vertiefungsstudie führt (Schritt 2).

3.1.4 Grundsätzliches zum Interpretationsrahmen

In diesem Abschnitt geht es um zwei allgemeine Vorüberlegungen zum Deutungsrahmen der empirischen Ergebnisse im Hinblick auf das spezielle Design der Umfragestudie. Diese Überlegungen betreffen zum einen die Formulierung der Fragen im Szenarioteil III des Fragebogens und deren Auswirkung auf die Beurteilungsperspektive der Umfrageteilnehmer und damit die Rolle der epistemischen Einstellungen der Befragten für die Clusterinterpretation. Zum anderen betreffen sie die im Aufbau des Fragebogens bereits angelegte Spannung zwischen abstrakten Fragen zum Wissens- und Beweisbegriff in Fragebogenteil II und der Beurteilung von beweisbasierten Wissenszuschreibungen in Bezug auf konkrete Szenarien in Teil III.

Rolle der epistemischen Einstellungen der Umfrageteilnehmer für die Interpetation der Ergebnisse aus Fragebogenteil III

Sämtliche der in Fragebogenteil III im Rahmen der vier Szenarien zu beantwortenden Fragen sind (bis auf die Freitextfragen) von der Form: „Weiß X (zu t_{in}) dass p wahr (falsch) ist?“ (englische Originalformulierung: „*Does X (at t_{in}) know that p is true (false)?*“). „X“ bezeichnet dabei den jeweiligen Szenarioprotagonisten, „p“ die in Frage stehende mathematischen Aussage, und „t_{in}“ den Zeitpunkt innerhalb des Szenariogeschehens, auf den sich die in Frage stehende Wissenszuschreibung „X weiß (zu t_{in}), dass p“ bezieht;[214] fällt der Zeitpunkt t_{in} mit dem Zeitpunkt t'_{in}, der innerhalb des Szenariogeschehens erreicht ist, als die zu beurteilende Frage zu einem bestimmten Zeitpunkt t_{out} außerhalb des Szenariogeschehens der Umfrage gestellt wird, zusammen, so wird t_{in} in der Frage nicht explizit benannt.

[214] Da in den vier Szenarien des Fragebogens für p jeweils ein *Name* für den jeweiligen mathematischen Satz verwendet wurde (*Jones conjecture*, *Bob's theorem*, T_1, T_2 und *Mates conjecture*) und nicht vom Inhalt des Satzes die Rede war, wurden die Fragen, entsprechend der normalsprachlich natürlicheren Sprechweise, in der Form „*Does X (at t_{in}) know that p is true (false)?*“ statt „*Does X (at t_{in}) know that p (not-p)?*“ formuliert.

Bei der Beschreibung der verschiedenen Clusterprofile und deren anschließender Interpretation gehe ich standardmäßig, d.h. wenn etwa die Freitextkommentare der Befragten nicht ausdrücklich eine andere Deutung nahelegen, davon aus, dass die Befragten die Fragen zu den Szenarien in Teil III auf der Basis aller Informationen zum Szenario beurteilt haben, die ihnen selbst zum Zeitpunkt t_{out} bekannt waren. Dies gilt insbesondere für die vorgeschlagenen Deutungen von Antwortclustern (zu Szenario 3 und 4), zu denen keine oder keine verwertbaren Freitextkommentare abgegeben wurden. Man beachte hier wieder (vgl. Abschnitt 3.1.1), dass das Szenariogeschehen den Befragten nur stückweise preisgegeben wurde; vor allem gehe ich standardmäßig nicht davon aus, dass die Befragten zurückgeblättert haben. Außerdem setze ich ebenso standardmäßig voraus, dass die Befragten den Szenarioprotagonisten Wissen aufgrund der jeweils präsentierten Beweise zu- oder abschreiben, also beurteilen, ob der von X präsentierte Beweis für p hinreicht, um X' Wissen, dass p, zu begründen.

Diese Standardfestlegung hinsichtlich der Deutung der epistemischen Einstellungen der Befragten bei der Beantwortung der Szenariofragen ist insofern willkürlich, als diese Fragen jeweils auch anders gelesen werden können: Es ist denkbar, dass die Befragten die Szenariofragen aus der Perspektive des jeweiligen Szenarioprotagonisten, insbesondere nur unter Berücksichtigung des Szenariogeschehens bis zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage, oder im Gegenteil stets unter Berücksichtigung des gesamten Szenariogeschehens (also mit Zurückblättern) beantwortet haben. Auch könnten sie ihre spezifischen Antworten nicht aufgrund der Informationen zu dem vom jeweiligen Szenarioprotagonisten erbrachten mathematischen Beweis, sondern aufgrund von Nebeninformationen abgegeben haben. Dieser Interpretationsspielraum auf Seiten der Befragten wurde (bis auf die Option des Zurückblätterns, welche nicht explizit gestattet und durch die Gestaltung des Fragebogens auch nicht ersichtlich, aber technisch möglich war) absichtlich belassen, um schwer verständliche und unnatürliche Formulierung der Fragen weitestgehend zu vermeiden.

Prinzipiell relevant für die in den Abschnitten 3.2.2 und 3.3 vorgeschlagenen speziellen Clusterdeutungen und umfassenderen Interpretationen wird eine vom gesetzten Standard abweichende Lesart der Szenariofragen durch die Teilnehmer in Fällen, in denen t_{in} nicht mit t'_{in} übereinstimmt, in denen es andere den Befragten durch die Szenariobeschreibung bekannte Quellen gibt, auf denen sich X' Wissen, dass p, begründen kann, oder in denen sich die epistemischen Einstellungen des Szenarioprotagonisten bezüglich mathematischen Wissens und mathematischer Beweise von vornherein, unabhängig vom speziellen Szenarioverlauf, wesentlich von denen der Teilnehmer unterscheidet. Der erste

Fall trifft in Bezug auf die hier analysierten Schlüsselszenen auf Szenario 1, 2 und 4, der zweite und dritte nur auf Szenario 3 zu.[215]

Gemäß den abgegebenen Freitextkommentaren sind solche abweichenden Lesarten der Szenariofragen durch die Umfrageteilnehmer nur vereinzelt aufgetreten; für die Interpretation in Abschnitt 3.3.2 relevante Auswirkungen auf die in Abschnitt 3.2.2 vorgeschlagene Deutung der Antwortcluster haben sie nur im Falle von Szenario 1 (insbesondere Cluster 1). Diese abweichenden Lesarten werde ich an den entsprechenden Stellen gesondert diskutieren. Ansonsten lege ich ohne weitere Diskussion die gerade getroffene Standarddeutung zugrunde. Die Frage nach den Auswirkungen dieser Festlegung und der Bedeutung abweichender Lesarten durch die Umfrageteilnehmer für die Gesamtinterpretation der empirischen Ergebnisse wird im Rahmen der Vertiefungsstudie, insbesondere in Form von Ausgangsfrage 1 (vgl. Abschnitt 3.4, S. 139) aufgegriffen.

Spannung zwischen den Ergebnissen aus Fragebogenteil II und III

Während Fragebogenteil II abstrakte Fragen zu mathematischem Wissen und mathematischen Beweisen enthält, wird in Teil III der tatsächliche Gebrauch und die Beurteilung epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis hinterfragt. Diese Fragenkonstellation kann gemäß einem in der empirischen Soziologie bekannten, bereits in der methodologischen Diskussion in Kapitel 1 (vgl. S. 25 f.) kurz angesprochenen Phänomen zu Spannungen oder sogar Widersprüchen in der Deutung der Umfrageergebnisse führen. Dieses Phänomen lässt sich detaillierter wie folgt beschreiben: Während man mit Umfragen eigentlich das *soziale Verhalten* der Teilnehmer messen möchte, misst man tatsächlich ihr *verbales Verhalten*. Verbale Reaktionen können aber nicht mit sozialen Reaktionen gleichgesetzt werden, sondern deuten in der Regel nur auf diese hin.[216] Im Extremfall stehen verbale Reaktionen und soziales Verhalten sogar konträr zueinander.[217] Zwar handelt es sich bei den Ergebnissen aus Teil II und III des Fragebogens in *beiden*

[215] In Szenario 3 handelt es sich beim Szenarioprotagonisten um einen Mathematikstudenten im ersten Drittel seines Studiums, der aufgrund seiner mangelnden Erfahrung prinzipiell andere epistemische Einstellungen bezüglich mathematischen Wissens und mathematischer Beweise haben mag als ein erfahrenerer Umfrageteilnehmer. Keiner der Freitextkommentare zu diesem Szenario deutet jedoch auf eine Beantwortung der Fragen rein aus der Perspektive dieses Protagonisten hin, weshalb ich diesen Fall nicht weiter diskutiere.

[216] Vgl. Klammer [59, S. 220].

[217] Klammer führt dazu folgendes Beispiel aus der empirischen Sozialforschung an:

> „Wenn man etwa von einem Menschen erfahren will, welches er für das wichtigste gesellschaftliche Thema hält, so kann er zwar zum Beispiel äußern, den Schutz der Umwelt. Sein soziales Verhalten – vielleicht wirft er leere Getränkedosen auf die Straße und spricht in Diskussionen im Freundeskreis immer wieder das Thema Arbeitslosigkeit als bedeutendstes Problem in Europa an – lassen aber ganz andere Schlussfolgerungen zu. Es muss nicht einmal unterstellt werden, dass der Befragte bewusst eine falsche Antwort gegeben hat, viel-

Fällen um verbales Verhalten, die Verbalisierungsstufe des eigentlich zu messenden sozialen Verhaltens in Teil III des Fragebogens ist jedoch wesentlich niedriger als in Teil II, in dem es um abstrakte Überzeugungsfragen geht.

Tatsächlich liefert die von mir vorgeschlagene Interpretation[218] eine entsprechende Diskrepanz zwischen den Ergebnissen aus Teil II und III. Mit Hilfe einer geeigneten Übertragung der soziologischen Erklärung des gerade dargestellten allgemeinen Phänomens aus der empirischen Sozialforschung lässt sich jene wie folgt erklären: Dem Denken der meisten Stichprobenteilnehmer entspricht, dass mathematisches Wissen objektiv ist und ein mathematischer Beweis im Wesentlichen als formale Ableitung definiert werden kann. Dies hat aber keine direkten Implikationen für das soziale Akzeptanzverhalten bezüglich der in der mathematischen Praxis verwendeten Beweise oder den tatsächlichen Gebrauch von Wissenszuschreibungen.

Daraus ergibt sich die weiterführende Frage, ob hier soziales und verbales Verhalten wirklich, wie es auf den ersten Blick scheinen mag, einfach konträr zueinander stehen, oder ob eine detailliertere Analyse des sozialen Verhaltens nicht auch eine genauere soziologische Erklärung für das Zustandekommen der spezifischen, scheinbar entgegengesetzten Denkweisen liefern kann.[219] Dieser Frage gehe ich in meiner Arbeit nicht explizit weiter nach.[220] Ich sehe die hier dargestellte soziologische Erklärung bereits als hinreichende Rechtfertigung dafür an, die auftretenden Spannungen und Widersprüche zwischen den Umfrageergebnissen nicht etwa als wechselseitige Entwertung der Ergebnisse aus Teil II und III aufzufassen, sondern diese in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 zunächst als eigenständige Aspekte epistemischer Begrifflichkeiten der mathematischen Praxis zu interpretieren. Vor diesem Hintergrund ergeben sich die in Abschnitt 3.4 formulierten, philosophisch motivierten Ausgangsfragen für die empirische Nachfolgestudie.

---

mehr mag der Umweltschutz als wichtigstes soziales Thema seinem Denken entsprechen.“ ([59, S. 220]).

[218]Vgl. Abschnitt 3.3.1.

[219]Weiterhin ist in der empirischen Sozialforschung als *eine mögliche Ursache* für ein dem sozialen Verhalten entgegengesetztes verbales Verhalten die provozierende Kraft von Umfragen bekannt, eher *sozial erwünschte* als den Tatsachen oder Überzeugungen des Befragten entsprechende Antworten hervorzubringen (vgl. Klammer [59, S. 223]). Dies bezieht sich aber in erster Linie auf Spannungen zwischen Umfrageergebnissen, also öffentlich gemachten (anonymen oder nicht-anonymen) Angaben, und nicht-öffentlichen Verhaltensweisen oder inneren Einstellungen. Es wäre also kritisch zu hinterfragen, ob im hier verhandelten Fall, in dem eine Spannung zwischen unterschiedlichen Ergebnissen öffentlich gemachter Angaben vorliegt, die Diskrepanz von tatsächlichen und erwarteten oder erwünschten Einstellungen der Befragten eine Rolle spielt.

[220]Vgl. jedoch die Ausführungen unter Aspekt (VI) und (VIII) in Abschnitt 4.3.

3.2 Häufigkeits- und Clusteranalyse ausgewählter Fragebogensequenzen

Im folgenden Abschnitt stelle ich zunächst (Abschnitt 3.2.1) kurz die recht eindeutigen, homogenen Häufigkeitsergebnisse zu zwei Schlüsselfragen zum Wissens- und Beweisbegriff aus Fragebogenteil II dar. Die Ergebnisse werden dabei nur referiert, eine Diskussion und Interpretation erfolgt in Abschnitt 3.3.

Anschließend (Abschnitt 3.2.2) bespreche ich detailliert die wesentlich vielfältigeren und inhomogeneren Ergebnisse zu vier speziellen, mit dem Verfahren der Clusteranalyse[221] ausgewerteten Schlüsselsequenzen der Szenarien aus Fragebogenteil III.

Eine umfassende Interpretation der Ergebnisse aus Fragebogenteil III wird ebenfalls erst in Abschnitt 3.3 vorgeschlagen. Dennoch verhindert die Auswertungsmethode der Clusteranalyse eine strikte Trennung von theoriegeleiteter (in meinem Fall also philosophischer) Deutung und bloßer Beschreibung der Ergebnisse.[222] Bereits in Abschnitt 3.2.2 wird also der in Abschnitt 3.1.4 diskutierte Interpretationsspielraum auf die dort beschriebene Weise genutzt. Zudem besitzen die vier Clusteranalysen zu den Szenarien sehr unterschiedliche Interpretationsspektren. Die Analyse von Szenario 1 etwa eröffnet besonders großen interpretatorischen Spielraum, die von Szenario 4 besonders geringen; Umfang und Detailgenauigkeit der Diskussion der jeweiligen Clusteranalyse variieren entsprechend.

3.2.1 Häufigkeitsergebnisse aus Fragebogenteil II

In Fragebogenteil II wurden Einstellungsfragen zum abstrakten Wissens- und Beweisbegriff gestellt. Dazu gehören die Einstellungen von Mathematikern bezüglich der Objektivität mathematischer Erkenntnis und bezüglich des Zusammenhangs von mathematischer Erkenntnis und mathematischem Beweis. Das Antwortverhalten in diesem Fragebogenteil war sehr homogen: Die Einstellungsfragen wurden meist von über 80 Prozent der Stichprobenteilnehmer einhellig beantwortet. Ich gebe im Folgenden die relativen Häufigkeiten zu zwei wichtigen Vergleichsfragen in Bezug auf die anschließend vorgestellten Ergebnisse aus Fragebogenteil III explizit an.[223] Zur späteren Interpretation in Abschnitt 3.3.1 wird außerdem jeweils eine Auswahl der abgegebenen Freitextkommentare zu den Szenarien hinzugezogen.

[221] Vgl. Abschnitt 3.1.3.
[222] Vgl. die Ausführungen zur Theorieabhängigkeit der Clustervariablen und des Clusterergebnisses in Abschnitt 3.1.3.
[223] Vgl. Abschnitt 3.3.1. Die restlichen Ergebnisse aus Fragebogenteil II sind in Anhang B aufgeführt.

Zunächst wurden die Teilnehmer direkt gefragt, ob sie mathematisches Wissen für objektiv halten. Später sollten sie beurteilen, ob eine präzise Definition des Begriffs „mathematischer Beweis“ möglich ist. Eine große Mehrheit der Befragten hielt mathematisches Wissen für objektiv. Die Frage:

„*Is mathematical knowledge objective?*“

konnte mit „yes“ oder „no“ beantwortet werden. Die Antworten (als Häufigkeitsverteilung) lauteten dabei wie folgt:

Antwort	**Häufigkeit**	**Anzahl** (Σ 74)
yes	82.4 %	61
no	17.6 %	13

Eine ebenso große Mehrheit bejahte die Aussage, dass man präzise definieren kann, was ein mathematischer Beweis ist:[224]

„*Please select to which degree you accept the following statement:* One can precisely define what a mathematical proof is.“

Antwort	**Häufigkeit**	**Anzahl** (Σ 74)
strongly agree	28.4 %	21
agree	60.8 %	45
disagree	9.5 %	7
strongly disagree	1.4 %	1

Teilnehmer, die auf die zweite Frage eine positive Antwort gaben, d.h. entweder „strongly agree“ oder „agree“, wurden in einer darauffolgenden Freitextfrage gebeten, eine solche Definition von „mathematischer Beweis“ anzugeben. Etwa die Hälfte dieser Befragten gab eine abstrakte Definition an (oder verwies darauf), die sich wesentlich auf den Begriff der formalen Ableitung stützt. Ein wesentlich kleinerer Teil der Befragten, die die zweite Frage positiv beantworteten (hier ausschließlich „agree“), gab dagegen Kommentare ab,

[224]Dabei sind die beiden Gruppen von Teilnehmern, die die erste bzw. die zweite Frage positiv beantwortet haben, nicht völlig deckungsgleich. Dies hat zur Folge, dass alle weiteren möglichen Antwortpaare „pos-neg“, „neg-pos“ und „neg-neg“ auf diese beiden Fragen nur in jeweils sehr geringen Häufigkeiten auftreten konnten.

die sich stärker auf den Gebrauch des Begriffs „mathematischer Beweis" in der tatsächlichen mathematischen Praxis beziehen. Die folgenden Freitextkommentare sind bezüglich dieser beiden Teilgruppen exemplarisch; Kommentare (3.1) bis (3.8) gehören zur ersten, Kommentare (3.9) bis (3.16) zur zweiten Gruppe.

„Syntactically. See any textbook on logic, it doesn't fit into three lines." (3.1)

„A precise definition is too long to fit into this form; instead please refer to some standard textbook on formal mathematics." (3.2)

„A mathematical proof is a sequence of true propositions that ends with the proposition that was to be proven." (3.3)

„A series of symbol-manipulation based upon axioms and the logic rules." (3.4)

„A proof of a statement is a sequence of allowed actions in the language of logic which begins with a set of axioms and ends with the statement." (3.5)

„A derivation of a proposition from other proposition using pure logic only." (3.6)

„A series of transformation of chains of symbols according to certain rules." (3.7)

„What a proof is depends on the logical system being used, something which is not usually stated explicitly but is somewhere in the background. Each system has its own precise notion of proof." (3.8)

Die folgenden Kommentare gehören zur zweiten Teilgruppe und beziehen sich auf einen weniger abstrakten und auch weniger normativen[225] Begriff des mathematischen Beweises als die vorangegangenen Kommentare:

> „Formally: from a given set of deductive rules, and a set of axioms, a sequence of statements (machine-verifiable in the correctness of application of the rules), starting with hypothesis and ending with conclusion. Ideally, anyway.“ (3.9)

> „I would define a proof fundamentally as an argument that convinces mathematicians, less fundamentally as an argument that can be formalised and proven mechanically.“ (3.10)

> „An argument sufficiently detailed to convince experts.“ (3.11)

> „That's a hard question. A mathematical proof is to argue in a way that mathematicians agree to be a proof.“ (3.12)

> „A sequence of logical steps checked and deemed valid by a sufficiently high number of people.“ (3.13)

> „A convincing argument that instills belief that it is possible to construct a sequence of formal logical steps leading from generally accepted axioms to the given assertion.“ (3.14)

[225] Hier und im Folgenden verwende ich den Ausdruck „normativ“ nicht mehr, wie in Kapitel 1, im Sinne der Unterscheidung zwischen normativen und deskriptiven Ansätzen der Wissenschaftstheorie (vgl. die Fußnoten 18 und 84), sondern beziehe mich damit auf Normen oder Normvorstellungen innerhalb der wissenschaftlichen mathematischen Gemeinschaft.

„A finite sequence of statements following logically from each other, that begins with a given set of axioms and has the statement to be proved as a conclusion. In actual mathematical practice, this sequence tends to be shortened and written in some human language rather than pure symbolic logic, so the only difficulty that may arise in defining what a 'real-life' mathematical proof is, is to decide what constitutes an acceptable abbreviation of the hypothetical, full-length logical proof.“ (3.15)

„I did not say I have a definition at hand. My meaning of 'one can define' is that with joint effort and discussion we could arrive at a definition acceptable for most mathematicians, and my basis of thinking so is that in practice we can typically agree whether a certain argument is or is not a proof.“ (3.16)

Kommentare (3.9) bis (3.12) problematisieren explizit die Möglichkeit, den tatsächlichen, durch soziale Faktoren geprägten Beweisbegriff der mathematischen Praxis mithilfe des Begriffes der formalen Ableitung zu definieren. Kommentare (3.13) bis (3.16) versuchen, eine Verbindung zwischen einem formalen Beweisbegriff und den Beweisen in der tatsächlichen mathematischen Praxis aufzuzeigen.

Teilnehmer, die auf die zweite Frage negativ, mit „disagree“ oder „strongly disagree“, geantwortet haben, wurden anschließend gefragt, welche Umstände die präzise Definierbarkeit von „mathematischer Beweis“ verhindern. Die Antworten sind den gerade zitierten inhaltlich nicht unähnlich:

„There are different levels of obviousness: reasoning which appears instantly clear (‚trivial‘) to an expert might not at all convince a beginner. To be able to understand and to accept a proof depends on former knowledge and exercise, or on a sufficient number of intermediate steps.“ (3.17)

„No, I stated that I disagreed (but not strongly) that one *can* precisely define what a mathematical proof is: an entirely different statement! ... My disagreement is based on my observations that doing so is evidently difficult and there is not yet a satisfactory consensus among working mathematicians who care about the problem.“ (3.18)

„A proof is considered valid if ‚everybody‘ is convinced. The notion of ‚everybody‘ and possibly the notion of ‚convinced‘ change with time. Experience shows it.“ (3.19)

Hier wird wiederum explizit der Beweisbegriff der tatsächlichen Praxis als nicht präzise problematisiert, der Schwerpunkt liegt dabei auf dessen Unterbestimmtheit durch soziale Faktoren.

3.2.2 Clusteranalyse ausgewählter Sequenzen aus Fragebogenteil III

Im Folgenden werden die Clusteranalysen der jeweils ausgewählten Schlüsselszene aus den vier Szenarien in Fragebogenteil III vorgestellt. Um die Schlüsselszenen im Kontext vorzustellen, fasse ich das jeweilige Szenariogeschehen zunächst kurz zusammen.[226] Danach gebe ich die als Clustervariablen ausgewählten Fragen und die zugehörigen Antwortmöglichkeiten sowie eine kurze Begründung für die jeweilige Relevanz der zugehörigen Teilszene vor dem Hintergrund der philosophisch-theoretischen Diskussion in Kapitel 2 und besonders der für das jeweilige Szenario relevanten Hypothesen (H1) bis (H3) an.[227] Anschließend stelle ich die jeweils ausgewählte Clusterlösung und die zugehörigen Antwortprofile graphisch dar und beschreibe die Antwortprofile auch in Worten. Im Falle von Szenario 1 gebe ich dabei zusätzliche technische Erläuterungen zum Clusterverfahren, um die Darstellung der Clusterlösung verständlich zu machen. Schließlich schlage ich für jedes Cluster unter Rückgriff auf die abgegebenen Freitextkommentare von Teilnehmern, die dem entsprechenden Cluster angehören, eine Deutung des zugehörigen Antwortverhaltens unter Berücksichtigung des in Abschnitt 3.1.4 diskutierten Deutungsrahmens vor. Diese Kommentare werden dabei in exemplarischer Auswahl zitiert;[228] bei direkter Bezugnahme auf Kommentare einzelner Teilnehmer spreche ich unabhängig von deren tatsächlichem Geschlecht stets von „dem Teilnehmer“. Die Deutung der Freitextkommentare ist bereits philosophisch geprägt und bezieht sich vor allem auf die dem jeweiligen Antwortverhalten zugrundeliegenden rationalen Motivationen und Intuitionen hinsichtlich der Begriffe „mathematisches Wissen“ und „mathematischer Beweis“. Der besseren Lesbarkeit halber werde ich hier nicht jedes Mal durch entsprechende explizite Formulierungen betonen, dass es sich bei den vorgeschlagenen Deutungen der Antwortcluster nicht stets um zwingende Schlüsse, sondern in erster Linie um Interpretationen der Freitext-

[226] Der genaue Wortlaut und die Abfolge der einzelnen Erzählsequenzen können in Anhang A nachgelesen werden.
[227] Vgl. Abschnitt 3.1.1.
[228] Dabei sind sämtliche Hervorhebungen im Original durch die Kommentatoren getätigt.

kommentare in Bezug auf das zugehörige numerische Anwortprofil handelt. Insbesondere verwende ich ohne weiteren Verweis, sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird, die in Abschnitt 3.1.4 diskutierten Deutungsstandards.

Clusteranalyse zu Szenario 1

Szenariogeschehen und Clustervariablen Das erste Szenario handelt von einem Doktoranden namens John, der im Rahmen seiner Doktorarbeit an einem Beweis für eine bestimmte (fiktive) mathematische Vermutung, die *Jones Conjecture* (im Folgenden kurz: JC), arbeitet. Aus einer anfänglich groben Beweisidee entwickelt er schrittweise, unterstützt von seiner Betreuerin Jane Jones, einen ausgearbeiteten Beweis, der schließlich in einer angesehenen mathematischen Zeitschrift publiziert wird. Die von mir für die Clusteranalyse ausgewählte Schlüsselszene setzt an dieser Stelle ein:

> *„Eighteen months later, the editor accepts the paper for publication, based on a positive referee report. After his Ph.D., John continues his mathematical career. Five years after the paper was published, he listens to a talk on anti-Jones functions. That evening, he discovers that based on these functions, one can construct a counterexample to the Jones conjecture. He is shocked, and so is professor Jones.“*

Damit endet das Szenario. Die im Folgenden betrachtete Schlüsselszene beinhaltet drei Fragen, die hier als Clustervariablen dienen. Die unten stehende Tabelle gibt in der ersten Spalte den Variablennamen (der für den Bezug auf Abbildung 3.2 wichtig ist), in der zweiten Spalte den Wortlaut der Frage, in der dritten Spalte den Zeitpunkt t_{in} im Szenariogeschehen, auf den sich die Frage bezieht, und in der vierten Spalte den Zeitpunkt t'_{in} im Szenariogeschehen, der erreicht ist, als die Frage – im konkreten Fall zu einem Zeitpunkt t_{out} außerhalb des Szenariogeschehens – gestellt wird, an:[229]

Variable	**Wortlaut der Frage**	t_{in}	t'_{in}
QJones6	*Does John know that JC is true?*	**vor** Vortrag, **nach** Veröffentlichung	**vor** Vortrag, **nach** Veröffentlichung
QJones7	*Does John know that JC is false?*	**nach** Vortrag	**nach** Vortrag
QJones8	*Did John know on the morning before the talk that JC was true ?*	**vor** Vortrag, **nach** Veröffentlichung	**nach** Vortrag

[229]Vgl. Abschnitt 3.1.4 S. 86.

Jede der Fragen konnte mit „*yes*“, „*almost surely yes*“, „*almost surely no*“, „*no*“ oder „*can't tell*“ beantwortet werden. In der hier betrachteten Schlüsselszene in Bezug auf (H1) wird also die Bewertung einer Wissenszuschreibung vor Bekanntgabe des übertrumpfenden Anfechtungsgrundes direkt mit den beiden nach der Bekanntgabe abgefragten Wissenszuschreibungen verglichen, um Aufschluss über eine mögliche Zeitrelativität der Bewertung dieses Anfechtungsgrundes und einer daraus resultierenden Fallibilität der für die Wissenszuschreibungen zugrundegelegten Rechtfertigung (hier also von Johns veröffentlichtem Beweis für JC) zu erhalten.

Beschreibung der Clusterlösung Der Verlauf der Aggregatbildung bei einer Clusteranalyse wird über ein sogenanntes *Dendrogramm* (oder auch: Fusionsbaum) dokumentiert (Abb. 3.1). Darin werden die Fusionsschritte der einzelnen Aggregate veranschaulicht; auf der x-Achse sind die durch den Algorithmus zugewiesenen Fusionswerte aufgetragen,[230] auf der y-Achse die Fallnummern[231] der jeweils in Aggregaten zusammengefassten Datensätze. Beim vorliegenden Fusionsbaum handelt es sich zudem um ein abgeschnittenes Dendrogramm, bei dem die ersten Fusionsebenene aus Gründen der Übersichtlichkeit des Gesamtbaumes nicht abgebildet werden. Daher sind auf der y-Achse auch nicht alle Fallnummern aufgeführt. Im vorliegenden Fall können aus den der Analyse zugrunde liegenden 62 Antworten mindestens vier Antwortcluster gebildet werden (vgl. die heller unterlegten Bereiche in Abb. 3.1), deren Profile ich im Abschnitt 3.3 mit Blick auf die verwendeten Wissenszuschreibungskriterien, mögliche dazu passende Rechtfertigungskonzeptionen und entsprechende philosophische Wissenstheorien diskutieren möchte. Diese Profile sind in Abb. 3.2 dargestellt. Auf der senkrechten Achse des Diagramms sind die fünf Antwortmöglichkeiten numerisch aufgetragen, von „3 = yes“, „2 = almost surely yes“ bis „-3 = no“, mit „0 = can't tell“. Die Umwandlung der Ordinalskala in eine Intervallskala ist dabei für die Bestimmung von Mittelwerten innerhalb des Clusteralgorithmus notwendig.[232] Auf der waagerechten Achse des Diagramms finden sich die Bezeichnungen der

[230] Die absoluten Werte der Fusionsschritte interessieren dabei nicht (vgl. zu den hier verwendeten Abstandsmaßen *Euclidian Sum of Squares* und *Increase in Sum of Squares* (auch: WARD) zur Berechnung der Fusionswerte Wiedenbeck & Züll [129] sowie Kaufman & Rousseeuw [57]); der Abstand der Fusionswerte ist allerdings interessant. Unter anderem wird ein Validierungsverfahren im Rahmen der Clusteranalyse darauf aufgebaut: Der Graph der Funktionswerte zeigt an Stellen, an denen signifikante Fusionen auftreten, einen deutlichen „Knick“. Die an einem solchen Knickpunkt gebildeten Aggregate sind damit als Cluster validiert. Im vorliegenden Beispiel tritt ein solcher Knick bei Wert 12,0 auf: Der Abstand bis zur nächsten Fusion bei ca. 30,0 ist bedeutend größer als der bis zur letzten Fusion bei ca. 8,0.

[231] Die Fallnummer eines Datensatzes ist dabei einfach seine laufende Nummer in Bezug auf die Liste aller Datensätze.

[232] Ich habe die numerischen Abstände zwischen den fünf Ausprägungen dabei gewichtet. Auf einer nicht gewichteten Skala, also bei gleichen Abständen zwischen den einzelnen Werten, sind alle 5 Antwortmög-

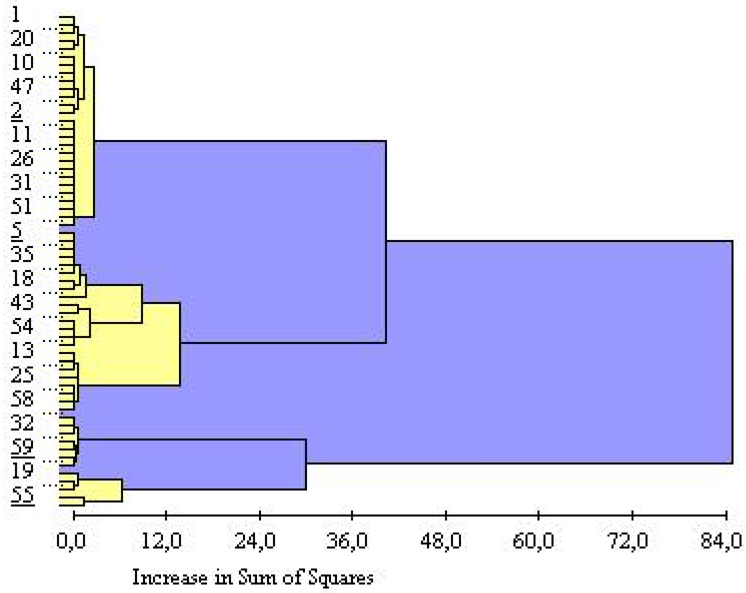


Abbildung 3.1: Fusionsbaum zu Szenario 1

drei gewählten Clustervariablen, also der drei relevanten Fragen aus dem Jones-Szenario. In Worten ausgedrückt erkennt man die folgenden vier Antworttypen, die jeweils ein Cluster bilden:[233]

- **Cluster 1** (27 Teilnehmer): Zu einem Zeitpunkt t_{out}, bevor die Befragten die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben,[234] antworten sie, dass John zu einem Zeitpunkt t_{in} vor dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC wahr ist. Nachdem sie die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten

lichkeiten bei der numerischen Clusterbildung gleichberechtigt, d.h. unabhängig voneinander. Das hier vorgestelle Clusterergebnis wird aber auch auf einer nicht gewichteten Skala reproduziert; die Gewichtung führt jedoch zu einer klareren Herausarbeitung der gefundenen Profile durch den Clusteralgorithmus. Die gewichtete Skala ist für die Clusteranalyse der Folgeszenarien besser geeignet als die ungewichtete, so dass ich aus Gründen der Einheitlichkeit durchgängig die gewichtete Skala zur Darstellung gewählt habe.

[233]Ich gebe hier und im Folgenden zu jedem Cluster die Anzahl der Teilnehmer an, deren Antworten darin zusammengefasst wurden.

[234]Das Szenariogeschehen wurde den Teilnehmern nur stückweise preisgegeben, vgl. Abschnitt 3.1.1 und 3.1.4, sowie die Diskussion zu t_{in}, t'_{in} und t_{out} auf S. 86.

sie, dass John nach dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC falsch ist, erhalten aber gleichzeitig eine positive Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Veröffentlichung und Vortrag aufrecht.

- **Cluster 2** (23 Teilnehmer): Bevor die Befragten die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John vor dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC wahr ist. Nachdem sie die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John nach dem Vortrag (ziemlich sicher) nicht weiß, dass JC falsch ist, und erhalten gleichzeitig eine positive Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Veröffentlichung und Vortrag aufrecht.[235]
- **Cluster 3** (7 Teilnehmer): Bevor die Befragten die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John vor dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC wahr ist. Nachdem sie die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John nach dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC falsch ist, und bewerten gleichzeitig die Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Veröffentlichung und Vortrag negativ.
- **Cluster 4** (5 Teilnehmer): Bevor die Befragten die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John vor dem Vortrag (ziemlich sicher) nicht weiß, dass JC wahr ist. Nachdem sie die Information über das Gegenbeispiel erhalten haben, antworten sie, dass John nach dem Vortrag (ziemlich sicher) weiß, dass JC falsch ist, und erhalten gleichzeitig eine negative Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Veröffentlichung und Vortrag aufrecht.

Deutung der Antwortcluster Eine Deutung des Antwortverhaltens zu den unterschiedlichen Clustern lässt sich mit Hilfe der Freitextkommentare der Teilnehmer zum Szenario vornehmen. 25 Teilnehmer der hier untersuchten Stichprobe haben Kommentare abgegeben. Es fiel dabei auf, dass Teilnehmer, die Cluster 2 zugeordnet wurden, besonders

[235] Cluster 2 enthält darüber hinaus auch jene Fälle, in denen alle drei Fragen der Schlüsselszene mit „*can't tell*“ beantwortet wurden. Auf dieses Antwortprofil, das allerdings nicht stark ausgeprägt war und daher bei der Analyse kein eigenes Cluster bildet, komme ich weiter unten noch einmal gesondert zu sprechen. Alternativ wäre eine Clusteranalyse mit fünf Clustern möglich und auch interpretierbar gewesen, da die vier hier vorgestellten Cluster im Wesentlichen reproduziert würden und ein eigenes „can't-tell“-Cluster hinzuträte. Dieses entstünde aus einer Aufspaltung von Cluster 2 in ein Cluster mit deutlicherer positiv-negativ-positiv-Profilkurve (Mittelwerte (2,13; -2,5; 2,13)) und in das neue Cluster (Mittelwerte (2,13; -2,5; 2,13)). Dieses neue Cluster ist dem hier vorgestellten Cluster 2 durch die leicht positiven Werte bei QJones6 und QJones8 immer noch recht nah. Darüber hinaus wird die Fünf-Cluster-Lösung durch den Kontrollalgorithmus der Software nicht verifiziert. Da ich insbesondere letztere aber zum Standard in Bezug auf alle anderen Clusterlösungen gemacht habe, habe ich mich schließlich gegen eine Analyse mit fünf Clustern entschieden.

3 = yes | 2 = almost surely yes | 0 = can't tell | -2 = almost surely no | -3 = no

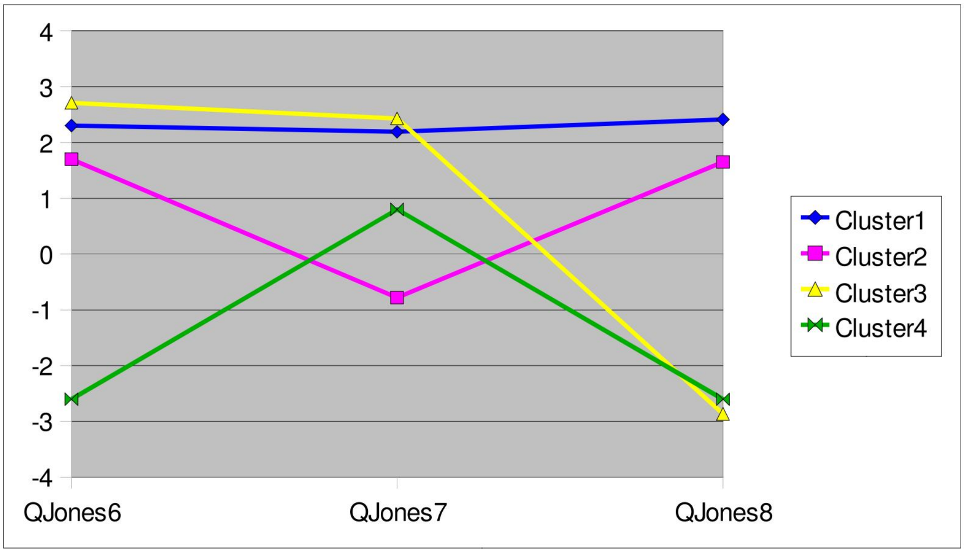


Abbildung 3.2: Antwortprofile der Cluster zu Szenario 1

häufig einen Kommentar über ihr Antwortverhalten abgaben. Dagegen gab es nur einen einzigen Kommentar eines Teilnehmers mit Antwortprofil 3. Ich zitiere im Folgenden zu jedem Cluster exemplarische Kommentare, die meiner Ansicht nach mehr Aufschluss über das zugehörige Antwortprofil geben.

Deutung von Cluster 1: Aus Cluster 1 wurden unter anderem die folgenden Freitextkommentare abgegeben:

„Although mathematical truth exists independently from human knowledge, one can of course never be *absolutely* sure to *know* it, since all human beings are prone to errors. One can, however, be *reasonably* sure to know *some* of it, since for many statements there exist a lot of different proofs, all of which have been reviewed and found correct by a lot of people.“ (3.20)

„You can ‚know‘ things even if they are not true. It is all in your mind.“ (3.21)

„It is true that even the unanimous opinion of all mathematicians of the world may be wrong, but for practical purposes, a mathematician will consider his proof correct when he has positive feedback from the mathematical community.“ (3.22)

„But really, only *two* mathematicians agreeing isn't enough. A positive referee report isn't very substantial. It needs much more time to be vetted and digested. Also, I think probably *all* mathematicians have had the experience of finding an error in their proof, after having been *certain* it was correct.“ (3.23)

Diese Kommentare drücken zum einen aus, dass ein mathematischer Beweis seinen tatsächlichen Rechtfertigungsstatus von der mathematischen Gemeinschaft erhält, und damit prinzipiell auch dann eine Rechtfertigung für positive Wissenszuschreibungen liefert, wenn er Fehler enthält. Kommentar (3.21) geht sogar weiter, indem er auch Falsches als prinzipiell wissbar bezeichnet. Zum anderen zeichnet sich hier aber auch ein Sprachgebrauch ab, gemäß dem der Ausdruck „to know“ gleichbedeutend mit „being reasonably sure to know“ (Kommentar (3.20)), „consider a proof correct“ (Kommentar (3.22)) und „being certain that a proof is correct“ (Kommentar (3.23)) verwendet wird. Vor dem Hintergrund des klassischen philosophischen Begriffs von Wissen als wahre, gerechtfertigte Überzeugung stellt dies zunächst eine Verwechslung von Wissen, gerechtfertigter Überzeugung und Glauben zu wissen dar. Dem muss jedoch genauer auf den Grund gegangen werden, um die Bedeutung von Cluster 1 für die Analyse des Wissensbegriffs der mathematischen Praxis bestimmten zu können (vgl. Abschnitte 3.3 und 3.4.1).

Ein möglicher Grund für diesen Sprachgebrauch und gleichzeitig für das Antwortverhalten von Cluster 1 ist die Wahl der Perspektive bei Beantwortung der Fragen. Weicht sie vom von mir in Abschnitt 3.1.4 festgelegten Deutungsstandard ab, haben die Befragten also z. B. aus Johns Perspektive zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage geantwortet, so würde dies die Wahl der Lesarten und das Antwortprofil von Cluster 1 wie folgt erklären: Johns epistemische Einstellungen zu einem Zeitpunkt vor dem fraglichen Vortrag ändern sich nicht dadurch, dass er zu einem späteren Zeitpunkt angeregt durch diesen Vortrag ein Gegenbeispiel zu JC, also eine bisher unberücksichtigte Irrtumsmöglichkeit entdeckt. Wenn also QJones6 positiv beantwortet wurde, so muss auch QJones8 positiv beantwortet werden. Die Teilnehmer hätten demnach mit einer positiven Antwort auf die Frage „*Does John know that JC is true*“ aus Johns Perspektive zum

Bezugszeitpunkt der Frage zum Ausdruck gebracht, dass John aufgrund seines Beweises fest davon überzeugt ist, dass JC wahr ist, und in diesem Sinne glaubt, zu wissen, dass JC wahr ist.

Deutung von Cluster 2: Das Antwortverhalten von Cluster 2 unterscheidet sich von dem von Cluster 1 dadurch, dass die Frage QJones7 statt durchweg positiv in der Regel mit „can't tell" bewertet wurde. Dies deutet auf eine gewisse Skepsis in Bezug auf die Stichhaltigkeit des von John „über Nacht" konstruierten Gegenbeispiels (im Vergleich zu dem monatelang ausgearbeiteten Beweis von JC) hin. Ansonsten kann Cluster 2 ähnlich wie Cluster 1 gedeutet werden. Ein großer Teil der Freitextkommentare (auch jene zu den „can't tell"-Fällen) lassen sich insbesondere hinsichtlich des Sprachgebrauchs von „know" im Sinne der oben vorgeschlagenen Deutung von Cluster 1 lesen, lassen aber etwas mehr Rückschluss auf mögliche alternative Gründe für diesen Sprachgebrauch zu:

> „This makes me wonder about the difference between ‚to know A has a proof' and ‚to be convinced by a claimed proof of A'. I am usually content to convince and be convinced." (3.24)

> „One may have here the sort of situation discussed by Imre Lakatos in ‚Proofs and Refutations'. The ‚anti-Jones' functions may be examples of monsters that expose an implicit assumption in the formulation and proof of the Jones conjecture." (3.25)

> „It all hinges on the definition of ‚knowing'. On the one hand there seem to be plenty of cases where one ‚knows', in a very strong sense, some facts of mathematics, e.g. elementary number theory and combinatorics. On the other hand, the reading of any very complex proof is prone to errors and oversights; being aware of this, the mathematician should be cautious to assign the status of ‚knowledge' to its conclusion. In this scenario, I assumed the proof was very complex, given the fact that it was an open problem in the community for at least some time." (3.26)

Die Kommentare (3.24) und (3.26) betonen, dass der Ausdruck „knowledge" in der mathematischen Praxis zumindest in Fällen, in denen ein mathematischer Sachverhalt durch einen sehr komplexen Beweis gestützt werden soll, höchstens im Sinne eines praktikablen Maßes an Rechtfertigung verstanden werden kann. Kommentar (3.25) deutet an, dass

– wie vermutet – das vermeintliche Gegenbeispiel, im Unterschied zu Johns vorherigem Beweis von JC, noch nicht ernst genug genommen wird, um darauf eine positive Wissenszuschreibung bzgl. der Falschheit von JC oder eine negative bzgl. der Wahrheit von JC zu gründen.

Deutung von Cluster 2 – die „can't tell"-Fälle: Von Teilnehmern, die Cluster 2 zugeordnet wurden und dabei die speziellen numerischen Antwortprofile (0 0 0) oder (x 0 0) besitzen, wurden unter anderem die folgenden Freitextkommentare abgegeben:

> „My answers would have been very different with different time frames mentioned." (Numerisches Antwortprofil: 2 0 0) (3.27)

> „My answers had been different if you had asked ‚Does John believe . . . ', instead of ‚Does John know . . . '. There is no objective truth, even in mathematics. There is only mathematicians who may be convinced one way or another, and a ‚proof' (or a ‚counterexample') may be a means to convince some/many/most of them." (Numerisches Antwortprofil: 0 0 0) (3.28)

> „If instead of knowledge the question would have been for belief, my answers would have been different." (Numerisches Antwortprofil: 0 0 0) (3.29)

> „I have consistently interpreted the word ‚know' in a rather narrow sense. Had I been John, I would have claimed for myself knowledge once I was reasonably confident that I had inspected every detail of a proof–but I might have been wrong in believing that I knew. The proof exists or does not exist independently of my own limitations as a human being, and while it is possible for a mathematician to know something, it is also possible (though less common) for a mathematician to believe he or she knows something when he or she does not. That there is no absolutely guaranteed method to distinguish between the two situations does not diminish the value of making the attempt." (Numerisches Antwortprofil: 0 0 0) (3.30)

Kommentar (3.27) weist auf eine Abhängigkeit des Rechtfertigungsstatus der Beweise und damit von Wissenszuschreibungen aufgrund von Beweisen von zeitlichen Faktoren hin. Die Kommentare (3.28) und (3.29) erklären die „can't tell"-Antworten jeweils dadurch, dass Wissenszuschreibungen im vorliegenden Fall schwieriger zu beurteilen sind als Zuschreibungen von Überzeugungen. Hier wird also auf eine Problematik der Verwendung von „to know“ etwa im Sinne eines Wissens objektiver Wahrheiten hingewiesen. Kommentar (3.28) betont darüber hinaus, dass dies kein Spezifikum in Bezug auf die Mathematik sei, sondern ein allgemeines Phänomen, das *auch* in der Mathematik auftritt. Kommentar (3.30) räumt dagegen die Möglichkeit des Wissens objektiver Wahrheiten explizit ein. Hier wird jedoch betont, dass es in der Mathematik zumindest aus der Sicht des epistemischen Subjekts praktisch nicht immer möglich ist, zwischen Wissen und bloßem Glauben zu wissen zu unterscheiden. Es ist jedoch unklar, ob dieser Teilnehmer die Fragen QJones6 bis QJones8 aus Johns Perspektive zum Bezugszeitpunkt der jeweiligen Frage (und nicht gemäß der Standarddeutung[236]) beurteilt hat. Sein Kommentar lässt sich auch so verstehen, dass er in diesem Fall QJones6 positiv beantwortet haben müsste.

Deutung von Cluster 3: Cluster 3 lässt sich so deuten, dass die Teilnehmer mit einem entsprechenden Antwortprofil einen Wissensbegriff zugrundegelegt haben, der insbesondere verlangt, dass Gewusstes wahr sein soll: Zum Zeitpunkt t_{out} von QJones7 und QJones8 haben sie die Information erhalten, dass John ein Gegenbeispiel zu JC konstruieren konnte. Sie fassen dieses Gegenbeispiel gemäß der positiven Antwort auf QJones7 als hinreichenden Beleg für die Falschheit von JC auf. Da sich der Wahrheitswert von JC über die Zeit nicht geändert hat, ist JC auch zum Bezugszeitpunkt t_{in} von QJones8 falsch. Entsprechend wird QJones8 trotz der früheren, positiven Antwort auf QJones6 negativ beantwortet. Zum Zeitpunkt t_{out} von QJones6 hingegen war den Befragten noch nicht bekannt, dass ein Gegenbeispiel zu JC konstruiert werden kann, ihre positive Antwort auf QJones6 ist also durch diese fehlende Zusatzinformation begründet. Der folgende, exemplarische Freitextkommentare aus Cluster 3 bringt dies auch zum Ausdruck:

> „[...] You didn't say, for instance, John had a sketch of a proof or an idea of a proof, but you said he had a proof. [...]“ (3.31)

Hier wird zudem betont, dass die Szenariobeschreibung bis zum Zeitpunkt t'_{in} nicht nur unvollständig, sondern irreführend war: Es wurde durch die Rede von einem von John geführten „Beweis“ die Korrektheit dieses Beweises vorausgesetzt. Dieser Teilnehmer unterscheidet demgemäß diverse Konzepte wie „Beweisidee“ oder „Beweisskizze“ von einem offenbar kontextunabhängigen Konzept des „wirklichen“ mathematischen Beweises. Als

[236] Vgl. Abschnitt 3.1.4.

Rechtfertigung für Wissenszuschreibungen sind diese Konzepte nicht gleichberechtigt: Ein „wirklicher“ Beweis ist notwendig für eine positive Wissenszuschreibung.

Deutung von Cluster 4: Das Antwortverhalten von Cluster 4 lässt sich unabhängig vom zugrundliegenden Wissensbegriff der Teilnehmer so deuten, dass seitens der Befragten von Anfang an eine generelle Skepsis gegenüber Johns Beweis bestanden hat, die durch das später gefundene Gegenbeispiel bestätigt wird. Die Freitextkommentare zu diesem Cluster lassen diesbezüglich keine vertiefende Deutung zu. Dieses Antwortcluster könnte insbesondere ein Artefakt der Umfragesituation sein, welche die betreffenden Befragten von vornherein vermuten ließ, dass im Laufe der Erzählung des Szenariogeschehens Informationen preisgegeben werden, die einer anfänglichen Einschätzung der Sachlage entgegenstehen.[237] Den folgenden Kommentar (3.32) etwa deute ich lediglich als Ausdruck dessen, dass dieser Teilnehmer das Szenariogeschehen und ggf. auch sein Antwortverhalten in diesem Szenario als selbstverständlich ansieht.

„So what?“ (3.32)

Ein weiterer Kommentar gibt aber, anders als das Antwortprofil selbst, ein wenig Aufschluss über mögliche allgemeine Kriterien zur Beurteilung der abgefragten Wissenszuschreibungen:

„How important is the Jones conjecture? How large is the community?“ (3.33)

Hier werden erneut situative Faktoren in die Beurteilung von QJones6 bis QJones8 einbezogen, nämlich die Bedeutung der mathematischen Aussage JC sowie die Größe der bereichsspezifischen *community*.

[237] Cluster 4 ist jedoch auch ein guter Kandidat für ein Cluster, das dadurch entstanden sein könnte, dass die Teilnehmer die technische Möglichkeit hatten, „zurückzublättern“ und bereits gegebene Antworten abzuändern. Wer also QJones6 zunächst positiv beantwortet hatte, bei QJones8 aufgrund einer positiven Antwort auf QJones7 dann aber negativ antwortet, hätte die Antwort zu QJones6 im Nachhinein – entgegen dem hier zugrundeliegenden Standarddeutungsrahmen – noch abändern können (in diesem Fall würde die Deutung von Cluster 4 mit der von Cluster 3 zusammenfallen). Da die Freitextkommentare der zu Cluster 4 gehörigen Teilnehmer diese Deutung aber nicht nahelegen, gehe ich hier nicht weiter darauf ein.

Clusteranalyse zu Szenario 2

Szenariogeschehen und Clustervariablen Im zweiten Szenario geht es um einen Mathematiker, Bob, der in einem Kolloquiumsvortrag einen zwar nicht bis ins formale Detail ausgearbeiteten Beweis präsentiert, die Korrektheit seiner Beweisidee jedoch durch eine bildliche Interpretation begründet. Während des Vortrages fällt einem Kollegen im Auditorium ein Fehler in der bildlichen Darstellung auf, den Bob, nachdem er darauf aufmerksam gemacht wurde, jedoch minutenschnell und stimmig mit seiner algebraischen Übersetzung beheben kann:

> „*One evening, the mathematician Bob Brown has an idea of how to calculate an explicit formula for a certain quantity and thereby finish a proof of some theorem he is currently working on. The idea is given to him by a picture. Bob translates the picture into an algebraic equation and tries to work out an algebraic proof. After spending the whole night on it, he finishes his proof. The resulting formula can even be reinterpreted following the line of thought from Bobs first visual idea, so he is perfectly convinced that he has found the right formula and proved his theorem. In the afternoon of the next day, Bob gives a talk to his colleagues about his proof. Because time is short, his audience cannot check the details of the algebraic proof he worked out over night, so Bob draws the picture displaying his guiding idea on the blackboard, and starts building up the main parts of his proof by referring to the picture. After some minutes, Jim Miles, a member of the audience, lifts his hand and tells Bob that there might be something conceptually wrong in the picture. Bob insists in the correctness of his picture. Jim specifies the point where an incoherence between the picture and Bob's algebraic translation of it occurs, and Bob suddenly recognizes his mistake. Bob meditates for a few minutes on how to fix his mistake, and then slightly modifies his picture. The new version fits with his equations. Because he only has to modify the picture, his correction does not change anything inside the algebraic proof. The change in the picture itself does not change the line of thought but is rather technical.*“

Ich betrachte in meiner Analyse die Teilszene nach dem Hinweis auf Bobs Fehler. In dieser Teilszene wird deutlich, dass Bobs algebraischer Beweis zwar weiterhin korrekt zu sein scheint, seine bildliche Beweisidee jedoch einen Fehler enthält. Sie ist für Hypothese (H2)[238] besonders relevant, da es hier um die Frage geht, ob die abgefragten Wissenszuschreibungen von den Stichprobenteilnehmern allein aufgrund der Korrektheit von Bobs

[238] Vgl. Abschnitt 3.1.1, S. 80.

algebraischem Beweis positiv bewertet werden, oder ob der Fehler in der bildlichen Beweisidee, obwohl ihm kein Fehler auf der algebraischen Seite entspricht, negativen Einfluß auf die Bewertungen nimmt.

Für die Clusteranalyse habe ich als Clustervariablen dementsprechend die vier letzten Fragen dieser Szene verwendet:[239]

Variable	**Wortlaut der Frage**	t_{in}	t'_{in}
QBob4	*Does Bob know that his theorem is true?*	**nach** Jims Hinweis, **vor** Bobs Einlenken	**nach** Jims Hinweis, **vor** Bobs Einlenken
QBob5	*Does Bob know that his theorem is true?*	**vor** Korrektur, **nach** Bobs Einlenken	**vor** Korrektur, **nach** Bobs Einlenken
QBob6	*Does Bob know that his theorem is true?*	**nach** Korrektur	**nach** Korrektur
QBob7	*Did Bob know that his theorem was true before he recognized his mistake?*	**vor** Bobs Einlenken	**nach** Korrektur

Beschreibung der Clusterlösung Die Clusteranalyse weist, wie im Dendrogramm in Abbildung 3.3 wieder durch die heller unterlegten Bereiche erkennbar, vier charakteristische Antwortprofile unter den in diesem Fall zugrundeliegenden 56 Antworten aus. Abbildung 3.4 zeigt die zugehörigen Antwortprofile. Die Profile können in Worten wie folgt beschrieben werden:

- **Cluster 1** (12 Teilnehmer): Nachdem die Teilnehmer zu t_{out} von QBob4 erfahren haben, dass Jim einen Einwand bezüglich Bobs Bild äußert, antworten sie bezogen auf den Zeitpunkt t_{in} von QBob4, als Bob also trotz Jims Hinweis auf einen Fehler auf der Korrektheit seiner Beweisführung beharrt, dass Bob (ziemlich sicher) weiß, dass sein Theorem wahr ist, oder schwächer, dass sie nicht beurteilen können, ob Bob dies weiß. Bezogen auf den Zeitraum, als Bob zwar auf Jims nähere Erläuterung hin den Fehler eingestanden hat, ihn aber noch nicht korrigieren konnte, antworten sie, dass Bob (ziemlich sicher) nicht weiß, dass sein Theorem wahr ist. Nachdem sie zum Zeitpunkt t_{out} von QBob6 erfahren haben, dass Bob den Fehler korrigieren konnte, schreiben sie Bob in Bezug auf den Zeitraum nach seiner Korrektur wieder Wissen, dass sein Theorem wahr ist, zu. Gleichzeitig bewerten sie

[239]Die Tabelle gibt in der dritten Spalte wieder den Zeitpunkt t_{in} im Szenariogeschehen, auf den sich die Frage bezieht, und in der vierten Spalte den Zeitpunkt t'_{in} im Szenariogeschehen, der erreicht ist, als die Frage – im konkreten Fall zu einem Zeitpunkt t_{out} außerhalb des Szenariogeschehens – gestellt wird, an (vgl. Abschnitt 3.1.4 S. 86).

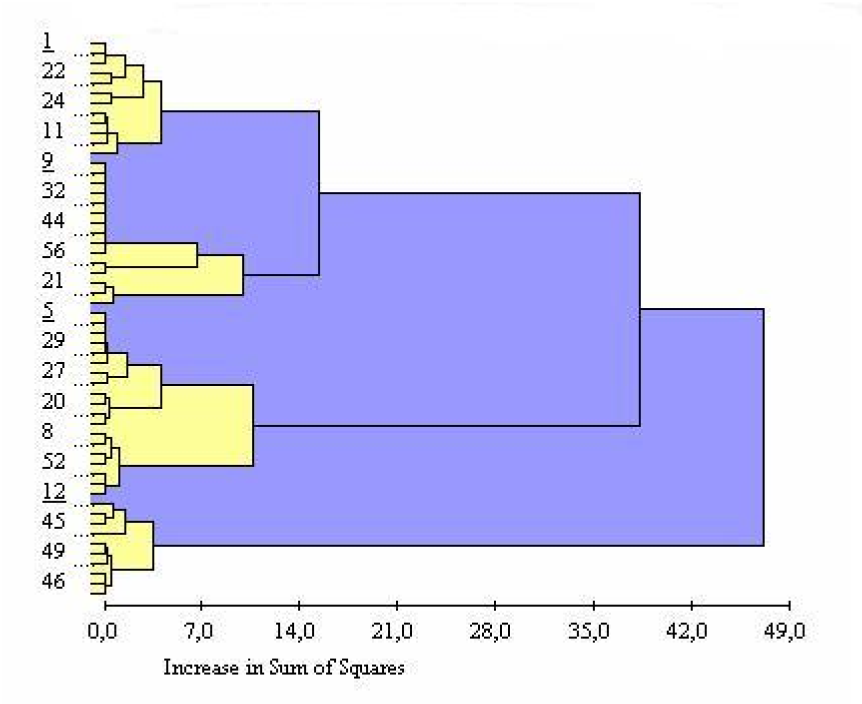


Abbildung 3.3: Fusionsbaum zu Szenario 2

auch eine Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Jims Hinweis und Bobs Einlenken positiv oder mit „can't tell".

- **Cluster 2** (15 Teilnehmer): Hier sind hauptsächlich die Antwortprofile zusammengefasst, die alle vier Fragen mit „can't tell" beantworten. Ich bezeichne es im Folgenden auch als das Cluster der „can't tell"-Fälle.[240]

- Die Profilkurve von **Cluster 3** (19 Teilnehmer) stimmt bis auf die Antworten zu QBob7 mit der Profilkurve von Cluster 1 überein: Hier wird lediglich die zum Zeitpunkt t_{out} von QBob4 positiv oder mit „can't tell" bewertete Wissenszuschreibung in Bezug auf den Zeitraum zwischen Jims Hinweis und Bobs Einlenken zum Zeit-

[240] Bedingt durch den Clusteralgorithmus, aber fast ohne Auswirkungen auf die Profilkurve, sind hier aber auch zwei Teilnehmer mit dem numerischen Antwortprofil (2 2 2 2) (entspricht durchgängig „almost surely yes", vgl. S. 97) untergebracht, sowie drei Fälle, in denen QBob4 − 6 negativ und QBob7 positiv beantwortet wurden. Letztere Ausreißer erklären insbesondere das leichte Abknicken der Profilkurve bei der Frage QBob7. Wegen der im Vergleich zum Grad der Abweichung geringen Anzahl sind beide Profile so schwach ausgeprägt, dass sie nicht als inhaltlich signifikant identifiziert werden. Ich berücksichtige sie bei meiner weiteren Interpretation daher nicht.

3 = yes | 2 = almost surely yes | 0 = can't tell | -2 = almost surely no | -3 = no

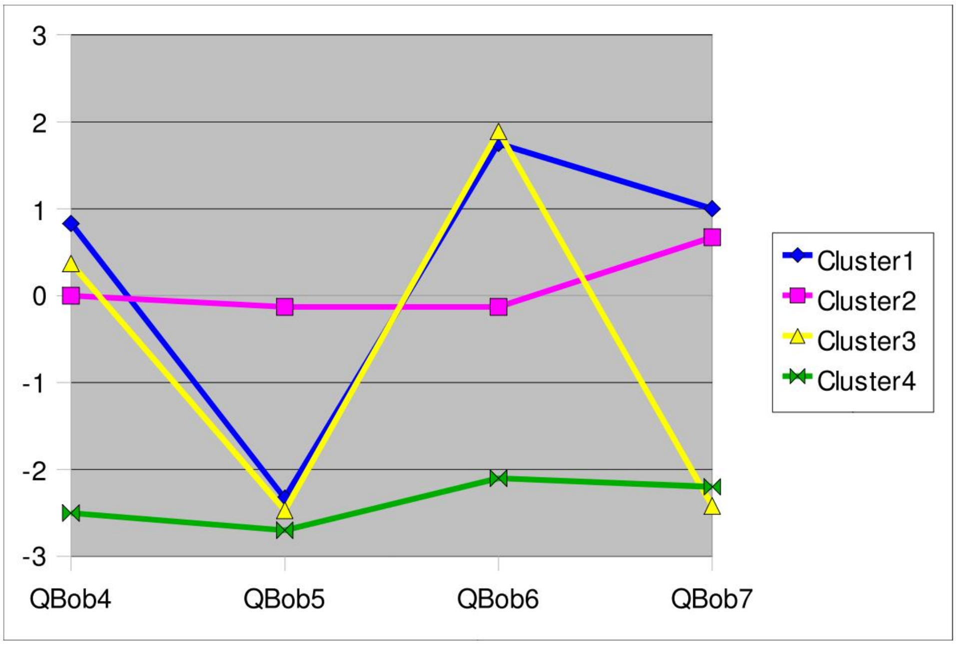


Abbildung 3.4: Antwortprofile der Cluster zu Szenario 2

punkt t_{out} von QBob7, als den Teilnehmern bekannt ist, dass Bobs Beweisidee fehlerhaft ist, Bob diesen Fehler aber korrigieren konnte, negativ bewertet.

- **Cluster 4** (10 Teilnehmer) schließlich fasst die Fälle zusammen, in denen die Wissenszuschreibungen in der betrachteten Teilszene allesamt negativ beurteilt wurden.

Deutung der Antwortcluster Die Anzahl der abgegebenen Freitextkommentare, die im Folgenden zur Deutung der vier Antwortprofile herangezogen werden können, ist im Vergleich zu Szenario 1 deutlich geringer. Ein Grund dafür scheint gemäß einiger der abgegebenen Kommentare wie „the same“, „same as for scenario 1“, „same as before only that here comes more ‘meaning’ in the picture“, „this too happens all the time ...“ zu sein, das viele Stichprobenteilnehmer ihrem Kommentar zu Szenario 1 ihrer Ansicht nach nichts hinzuzufügen hatten.

Deutung von Cluster 1: Aus Cluster 1 wurden unter anderem die folgenden Freitextkommentare abgegeben:[241]

„I presume Bob could finally save his proof. Though it should annoy him that there had been a flaw in his original idea.“ (Numerisches Antwortprofil: 2 -2 2 2) (3.34)

„I use pictures all the time. The extent to which they are convincing depends on the picture and the topic.“ (Numerisches Antwortprofil: 0 -2 0 0) (3.35)

„A ‚proof‘ found late at night is unorthodox and can be ingenious as well as wrong, thus requires reconsideration the next morning. A mathematical fact asserted by two independent arguments (e.g. algebraically AND based on a picture) seems pretty reliable. But if and once an error HAS been discovered, I like to be doubly cautious before regarding some correction as a fix.“ (Numerisches Antwortprofil: 2 -2 0 2) (3.36)

Das Antwortverhalten von Cluster 1 lässt sich in Bezug auf den in Abschnitt 3.1.4 diskutierten Deutungsrahmen wie folgt verstehen: Bob hat eine gute Beweisidee und auch einen konkreten Beweis für sein Theorem, und der kleine Fehler, der zwar für kurzzeitige Irritation sorgt, kann jedoch ausgeräumt werden, so dass in QBob6 und QBob7 einer positiven Wissenszuschreibung nichts mehr im Wege steht – diese Deutung wird von Kommentar (3.34) unterstrichen. Über die Rolle der bildhaften Beweisidee gegenüber dem algebraischen Argument lässt sich hier wenig sagen. In Bezug auf diese Frage scheinen mir die in Cluster 1 ebenfalls zusammengefassten Antwortprofile interessanter, die QBob4 bis QBob6 wie gerade beschrieben bewerten, QBob7 aber mit „can't tell“. Teilnehmer mit dem entsprechenden numerischen Antwortprofil (etwa 2 -2 2 0) haben jedoch keine verwertbaren Freitextkommentare abgegeben. Es lässt sich daher an dieser Stelle nur spekulieren, ob ein Grund für ein derartiges Antwortverhalten darin liegen könnte, dass eben das fehlerhafte bildliche Argument, welches Bob aber zunächst für korrekt hält und welches die Stütze für seinen Beweis liefert, eine positive, rückblickende Wissenszuschreibung für den Zeitpunkt vor Bobs Einlenken verhindert, trotz Vorliegen eines offenbar korrekten und in diesem Sinne vom bildhaften Argument unabhängigen

[241] Das numerische Antwortprofil einzelner Kommentatoren gebe ich nur an, wenn es von der Profillinie der Clustermittelwerte stärker abweicht.

algebraischen Beweises. Die Kommentare (3.35) und (3.36) geben Aufschluss über die generelle epistemische Bedeutung bildhafter Beweisideen: Kommentar (3.35) zeigt an, dass diese mit dem Kontext variiert – genauer gesagt ist es demnach vom mathematischen Themengebiet und der Art des Bildes selbst abhängig, ob ein bildgestütztes mathematisches Argument ein hinreichendes Kriterium für positive Wissenszuschreibungen sein kann. Auch Kommentar (3.36) spricht bildhaften mathematischen Argumentationen eine eigenständige epistemische Rolle zu. Dieser Kommentar deutet mit Blick auf das zugehörige numerische Antwortprofil an, dass dieser Teilnehmer die Fragen QBob4 bis QBob7 aus Bobs Perspektive zum jeweiligen Bezugszeitpunkt t_{in} beantwortet hat: Da QBob6 mit „can't tell", QBob7 aber positiv beantwortet und im Kommentar explizit Zweifel an der von Bob vorgebrachten Fehlerkorrektur angemeldet werden, ergibt die positive Antwort auf QBob7 nur aus Bobs Perspektive wirklich Sinn.

Deutung von Cluster 2: Cluster 2 habe ich bei der Beschreibung der numerischen Clusterprofile aufgrund der Dominanz des Profils (0 0 0 0) als das „can't tell"-Cluster bezeichnet. Die folgenden Kommentare weisen jedoch im Einzelfall auf unterschiedliche Motivationen für dieses Antwortverhalten hin:

> „I could perhaps have been a bit more generous [. . .] and allow an ‚almost surely yes' once the parties had demonstrated due diligence in chasing down the details of their proofs. But I don't know John or Bob, so I don't have a good feeling for how rigorously they work." (3.37)

> „A picture doesn't change anything." (3.38)

Kommentar (3.37) betont, dass zur (positiven) Beurteilung der Wissenszuschreibungen nicht genügend Information in Bezug auf *situative Faktoren* wie die Arbeitsgewohnheiten des jeweiligen epistemischen Subjektes vorhanden war. Kommentar (3.38) gibt Aufschluss über die Einschätzung des Kommentators bezüglich der epistemischen Funktion bildhafter Beweise. Dieser Ansicht zufolge haben Bilder in Beweisen keine epistemisch relevante Funktion. Der Kommentar lässt also vermuten, dass der Kommentierende deshalb stets mit „can't tell" antwortete, weil das Szenario zur Beurteilung der Korrektheit des *algebraischen* Beweises zu wenig Information preisgab.

Deutung von Cluster 3: Cluster 3 halte ich vor dem Hintergrund der Diskussion in Abschnitt 3.1.4 als besonders aufschlussreich hinsichtlich der epistemischen Rolle bildhafter mathematischer Argumente: Durch die explizit negative Beantwortung von QBob7 trotz eines bereits zum Bezugszeitpunkt t_{in} vor Bobs Einlenken vorliegenden, gemäß aller im Laufe des Szenarios preisgegebenen Informationen korrekten algebraischen Beweises wird Bob allein aufgrund des fehlerhaften Bildes kein Wissen zugeschrieben. Es gab allerdings zu wenige Freitextkommentare von Vertretern dieses Antwortprofils, um diese Deutung hier weiter untermauern oder vertiefen zu können.

Der folgende Kommentar (3.39) zeigt zwar, dass die Fragen QBob4 bis QBob7 vom Kommentator im Sinne des von mir verwendeten Standarddeutungsrahmens beantwortet wurden, liefert aber eine recht spezielle Begründung des Antwortverhaltens von Cluster 3, die nicht ohne Weiteres auf alle Teilnehmer mit diesem Antwortprofil verallgemeinerbar ist:

„[. . .] The truth of a theorem might change if you reinterprete the symbols in it.“ (3.39)

Der bildhafte Beweis ist diesem Kommentar gemäß insofern relevant für die Bewertung von QBob7, als er eine wahrheitswerterzeugende Interpretation des zu beweisenden Theorems liefert. Da Bobs ursprüngliches Bild einen Fehler enthält, steht zu vermuten, dass die entsprechende Interpretation das zu beweisende Theorem falsch macht – dies ist insbesondere kein Widerspruch zur algebraischen Beweisbarkeit, sondern würde nur zu der Folgerung führen, dass unter dieser Interpretation auch eines der dabei verwendeten Axiome falsch würde. Erst Bobs korrigiertes Bild liefert demnach eine Interpretation des Theorems, die dieses auch erfüllt. Entsprechend besitzt Bob zu dem Zeitpunkt, bevor er seinen Fehler eingesteht, kein Wissen, dass sein Theorem wahr ist.

Deutung von Cluster 4: Von den Cluster 4 zugeordneten Teilnehmern wurden unter anderem die folgenden Freitextkommentare abgegeben:

„Oral communication is not a means of checking proofs. A second person must go through the algebraic details; it is not sufficient if he just understands the high-level concept.“ (3.40)

„Pictures can give good ideas on how to prove something, but can unfortunately be very misleading, too. Since when building an algebraic proof based on a picture, one tends to assume unproven statements to be true, if they seem to be clear from the picture. After changing his picture, Bob should definitely have reviewed his algebraic proof, too.“ (3.41)

„Pictures do not take part in valid logical reasonings within the mathematical *Univers de Discours*. Recall that famous pic used to prove that any triangle is isosceles: drawing is inherently unreliable. Reasoning is much sharper than drawing.“ (3.42)

„Insufficent information of how the algebraic formula proved the theorem.“ (Numerisches Antwortprofil: -3 -3 0 0) (3.43)

In erster Linie betonen diese Kommentare, dass bildhafte Beweisideen und Intuitionen nicht *hinreichend* für positive Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis sind. Kommentare (3.41) und (3.42) deuten jedoch auch an, dass sie nicht notwendig sind, sondern sich im Gegenteil als irreführend herausstellen können. Das durchweg negative Antwortverhalten der Teilnehmer erklärt sich vielleicht aus Kommentar (3.43): Da die bildhafte Beweisskizze weder als hinreichend noch als notwendig für eine positive Beurteilung der infrage stehenden Wissenszuschreibung betrachtet wird, bliebe nur der algebraische Beweis als Beurteilungskriterium. Über dessen Korrektheit wird jedoch wenig explizit gesagt. Die Art seines Zustandekommens – Bob hat ihn über Nacht ausgearbeitet, er ist aber zu komplex, um ihn im Rahmen eines Vortrages vorstellen zu können – zieht diese sogar eher in Zweifel.

Clusteranalyse zu Szenario 3

Szenariogeschehen und Clustervariablen Im dritten Szenario spielt ein Mathematikstudent die Hauptrolle, der am Ende des Semesters eine mündliche Prüfung über eine Algebra-Vorlesung ablegen muss. Das Szenario beginnt wie folgt:

> „*Tom Jenkins is a student of mathematics and has to pass an oral exam at the end of the algebra lecture held by his professor Robin Smith. Tom did some oral exams before, so he is not too nervous, and is able to pay concentrated attention to the professor's questions during the whole exam. At some point of*

the exam, Smith asks Tom for the proof of a certain algebraic theorem T_1. The proof consists mainly of a tricky application of the fundamental theorem on homomorphisms and was conducted in one lecture on the blackboard. Tom is able to give a rather technical, but absolutely correct step-by-step proof in full detail.“

Im weiteren Verlauf der Szene wird der Student Tom von Professor Smith mit verschiedenen Fragen zur Beweisidee von T_1 konfrontiert. Tom kann keine dieser Fragen beantworten. Er scheitert zunächst an einer Transferfrage nach einer analogen Anwendung der Beweisidee für Theorem 1 auf ein anderes Theorem:

„*The exam continues with some questions about definitions, and after some minutes Smith asks Tom to explain why the general idea of how to apply the fundamental theorem on homomorphisms in the proof of the former theorem is also fruitful to prove a second algebraic theorem T_2. Tom completely fails in his answer.*“

Schließlich fragt Professor Smith seinen Studenten Tom nach der allgemeinen Beweisidee für den Beweis von T_1. Tom kann jedoch wieder keine korrekte Antwort geben. Im weiteren Verlauf des Szenarios kann Tom mithilfe von Professor Smiths Erklärungen zur Beweisidee von T_1 und unter dessen Anleitung zumindest die Transferfrage bewältigen.

Die im Folgenden betrachtete Teilszene beinhaltet drei Schlüsselfragen, die ich als Variablen für die Clusteranalyse verwendet habe:[242]

Variable	**Wortlaut der Frage**	t_{in}	t'_{in}
QTom1	*Does Tom know that T_1 is true?*	**nach** schrittweisem Beweis, **vor** Transferfrage und Frage nach Beweisidee	**nach** schrittweisem Beweis, **vor** Transferfrage und Frage nach Beweisidee
QTom3	*Does Tom know that T_1 is true?*	**nach** Transferfrage, **vor** Frage nach Beweisidee	**nach** Transferfrage, **vor** Frage nach Beweisidee
QTom5	*Does Tom know that T_1 is true?*	**nach** Frage nach Beweisidee	**nach** Frage nach Beweisidee

[242]Die Tabelle gibt in der dritten Spalte wieder den Zeitpunkt t_{in} im Szenariogeschehen, auf den sich die Frage bezieht, und in der vierten Spalte den Zeitpunkt t'_{in} im Szenariogeschehen, der erreicht ist, als die Frage – im konkreten Fall zu einem Zeitpunkt t_{out} außerhalb des Szenariogeschehens – gestellt wird, an (vgl. Abschnitt 3.1.4 S. 86).

Diese Teilszene von Szenario 3 ist besonders aufschlussreich in Bezug auf Hypothese (H2):[243] Hier geht es um die Frage, ob die Umfrageteilnehmer Tom allein aufgrund des vorgebrachten Schritt-für-Schritt-Beweises Wissen, dass T_1, zuschreiben, oder ob die Information, dass Tom weder einen analogen Beweis für T_2 produzieren noch die Beweisidee zu T_1 erklären kann, Einfluß auf die Bewertung der Wissenszuschreibungen hat.

Beschreibung der Clusterlösung Die Häufigkeitsergebnisse zu den Fragen QTom1 und QTom3 dieser Szene sind in Bezug auf die grobe Unterscheidung von positiven, unentschiedenen und negativen Wissenszuschreibungen mit durchgehend etwa 80 % einhelligen (positiven) Antworten (vgl. Anhang B) stark homogen. Auch im Falle von QTom5 gibt es immerhin noch knapp 70 % gleichlautende (positive) Antworten. Dieses homogene Antwortverhalten stellt den Sinn einer Clusteranalyse zunächst, wie im Falle der Ergebnisse aus Fragebogenteil II bereits angesprochen, in Frage. Dennoch lassen sich unter den zugrunde liegenden 54 Antworten drei Cluster ausfindig machen (vgl. das Dendrogramm in Abbildung 3.5); zwei davon, Cluster 1 und 2, unterscheiden sich bei gleichlautender Beantwortung von QTom1 und QTom3 nur in Bezug auf QTom5 (vgl. Abbildung 3.6).

In Worten können die Antwortprofile der drei Cluster wie folgt beschrieben werden (hier stimmen t_{in} und t'_{in}, also der Bezugszeitpunkt der Fragen QTom1, QTom3 und QTom5 und deren Stelle im Szenario, stets überein, d.h. der Informationsstand der Umfrageteilnehmer entspricht gemäß meiner Standarddeutung[244] dem Szenariogeschehen zum Bezugszeitpunkt der jeweiligen Frage):

- **Cluster 1** (38 Teilnehmer): In Bezug auf einen Zeitpunkt unmittelbar nach seiner schrittweisen Beweispräsentation wird Tom Wissen, dass T_1, zugeschrieben. In Bezug auf Zeitpunkte sowohl nach seinem späteren Scheitern an Professor Smiths Transferfrage als auch nach Smiths darauffolgender Frage nach der Beweisidee wird Tom jeweils weiterhin Wissen, dass T_1, zugeschrieben.

- **Cluster 2** (6 Teilnehmer): Hier zugeordnete Teilnehmer beurteilen im Unterschied zu Cluster 1 die Wissenszuschreibung bezogen auf den Zeitraum nach Toms Scheitern an der Frage nach der Beweisidee negativ.

- **Cluster 3** (10 Teilnehmer): In Bezug auf Zeitpunkte nach Toms technischem Schritt-für-Schritt-Beweis und vor seinem Scheitern an Smiths weiterführenden Fragen wird die Frage, ob Tom weiß, dass T_1, mit „can't tell" beantwortet. Bezogen

[243]Vgl. Abschnitt 3.1.1, S. 80.
[244]Vgl. Abschnitt 3.1.4.

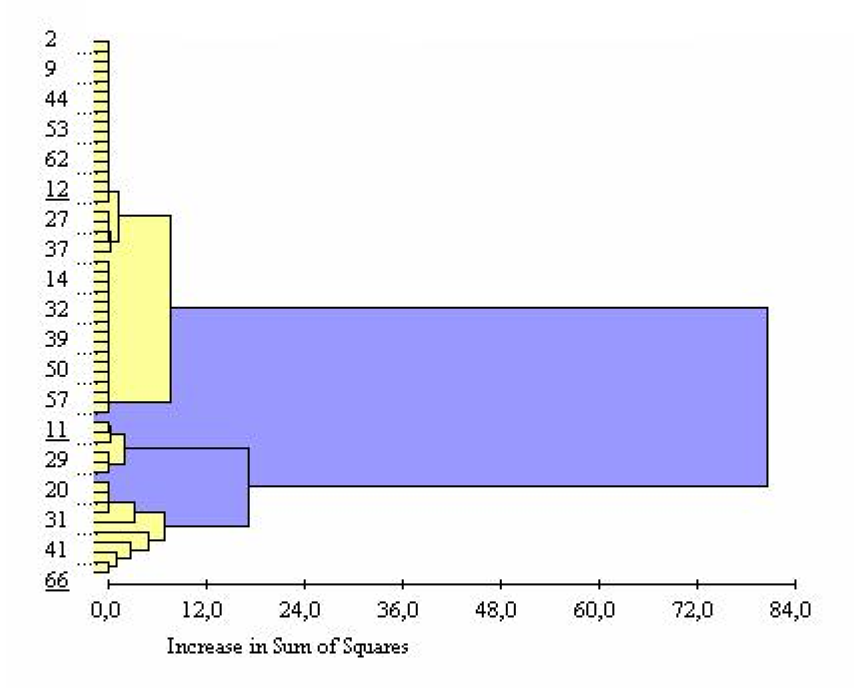


Abbildung 3.5: Fusionsbaum zu Szenario 3

auf den Zeitraum nach Toms Scheitern an Smiths Transferfrage liegt der Mittelwert der Antworten im negativen „can't tell"-Bereich, nach seinem darauffolgenden Scheitern an Smiths Frage nach der Beweisidee wird die Wissenszuschreibung dann explizit negativ beurteilt.[245]

Deutung der Antwortcluster Die Möglichkeit, Freitextkommentare abzugeben, haben nach Szenario 3 weniger Stichprobenteilnehmer als nach den Szenarien 1 und 2 genutzt; insbesondere sind die Kommentare von Teilnehmern mit anderen Antwortprofilen als dem von Cluster 1 nicht aufschlussreich in Bezug auf das jeweilige Antwortverhalten. Ich gebe deshalb hier nur eine beispielhafte Auswahl der dafür recht vielfältigen Kommentare aus Cluster 1 an. Da sich die ausgewählten Kommentare teilweise sogar untereinander wiedersprechen, habe ich sie in drei Untergruppen aufgeteilt, die ich einzeln diskutiere. Die Deutungen der Cluster 2 und 3 stützen sich allein auf den in Abschnitt 3.1.4 beschriebenen Standarddeutungsrahmen und ist entsprechend weniger differenziert.

[245] Cluster 3 umfasst aber auch die reinen „can't tell"-Fälle, also das numerische Antwortprofil (0 0 0).

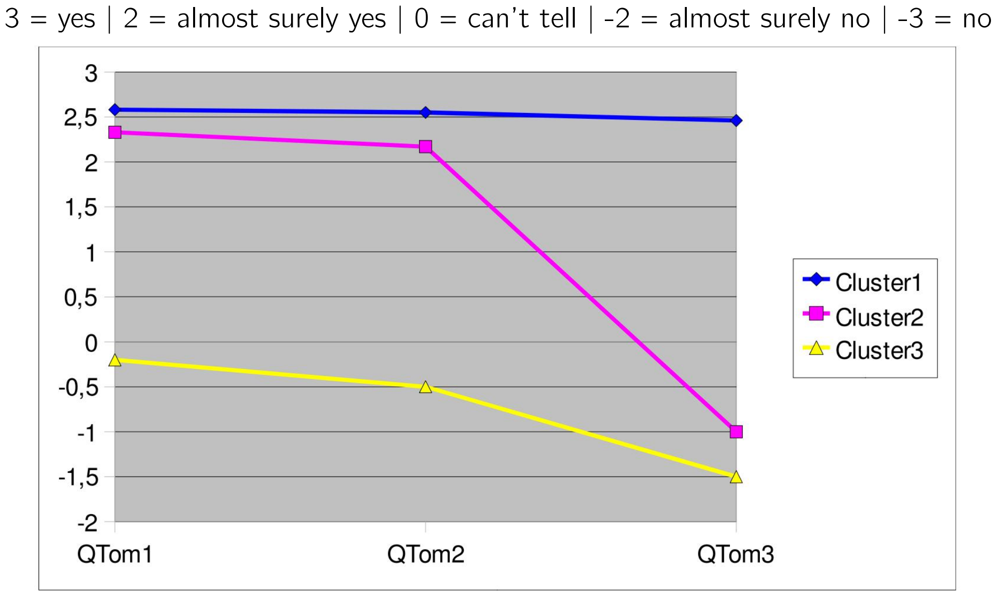


Abbildung 3.6: Antwortprofile der Cluster zu Szenario 3

Deutung von Cluster 1: Der erste Teil der ausgewählten Freitextkommentare aus Cluster 1 legt nahe, dass die dem Szenario-Design zugrundeliegende Hypothese (H2),[246] ein korrekter Schritt-für-Schritt-Beweis, den das epistemische Subjekt präsentieren kann, sei in der Regel hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung,[247] für das Antwortprofil von Cluster 1 zutrifft:

> „Tom knew all the time that T_1 was true. He could give a complete and correct proof, after all! What he did not know, however, is *why* T_1 holds. After understanding the overall idea, Tom got an idea why T_2 should probably hold, too, but wasn't able to give a detailed proof, so he couldn't be really sure. Knowing both *if* and *why* a certain mathematical theorem holds is equally important for the working mathematician. The latter may even be more important for teaching as well as research.“ (3.44)

[246] Vgl. auch Abschnitt 3.3.2.
[247] Vgl. die folgende Diskussion in Abschnitt 3.3.

„You don't need to understand the idea behind the proof of some theorem [...] and to some point the idea is not important at all–just as I said before: symbol processing.“ (3.45)

„Whether or not he knows T_1 has not changed, but his knowledge of it became much more useful and valuable once he understood the main idea that allows the construction of a technical proof.“ (3.46)

„There is a difference between knowing a theorem is true and being able to prove it in a particular manner.“ (3.47)

„Once you are sure that you gave a correct proof of theorem T_1, you need not revise your opinion on the truth of T_1.'" (3.48)

„A proof remains valid even if you can follow it step by step only and do not see a general idea.“ (3.49)

Der Einsicht in die Beweisidee, der Fähigkeit, einen Beweis eines bestimmten Typs zu führen und der Fähigkeit zum Transfer werden in den Kommentaren (3.44), (3.45) und (3.46) dabei explizit keine *notwendige* epistemische Relevanz für Wissen, *dass* T_1, zugesprochen. Die Kommentare (3.44) und (3.46) beschreiben diese Fähigkeiten, im Widerspruch zu Kommentar (3.45), der betont, dass die Beweisidee *überhaupt keine* Rolle spielt, aber als relevant und im Falle von Kommentar (3.44) sogar als notwendig für etwas, was hier als „Verständnis“ bzw. „Wissen-warum“ bezeichnet wird. Kommentar (3.44) beschreibt dieses „Wissen-warum“ als für die mathematische Praxis gleichwertig wie „Wissen-dass“.

Zwei weitere Kommentare zweifeln die Relevanz des Szenarios in Bezug auf die tatsächliche mathematische Praxis an:

„This seems unlikely.“ (3.50)

„So Tom had to learn something new during the exam? Quite unusual, AFAIK.“ (3.51)

Kommentar (3.50) lässt offen, worauf sich die angesprochene Unüblichkeit bzw. Unwahrscheinlichkeit bezieht: auf den *Szenarioverlauf*, gemäß dem ein Student in einer vergleichsweise sehr kurzen, mündlichen Prüfung etwas neues, nämlich einen ihm bisher unbekannten mathematischen Sachverhalt, einsehen lernt – denn Tom ist am Ende des Szenarios mit Professor Smiths Hilfe in der Lage, die Antworten, die er im Verlauf der hier untersuchten Teilszene noch schuldig bleibt, nachzuliefern –, oder auf die *Ausgangssituation des Szenarios*, in der das epistemische Subjekt zwar im engeren Sinne über einen nahezu formalen Beweis für ein mathematisches Theorem verfügt, ihn also Schritt für Schritt reproduzieren kann, allerdings weder die Beweisidee versteht noch zu einer Transferleistung in der Lage ist. Obwohl die zweite Deutung für die epistemische Rolle formaler Beweise interessant wäre, scheint sie hier nicht angemessen: Es gibt in der Praxis der mathematischen Lehre genügend Beispiele von Situationen, in denen Studenten auf Nachfrage einen auswendig gelernten Beweis für ein vergleichsweise einfaches mathematisches Theorem auch im formalen Detail schrittweise reproduzieren können, ohne von der Beweisidee eine Ahnung zu haben oder diese gar auf analoge Fälle anwenden zu können. Die erste Deutung scheint in diesem Sinne wesentlich angemessener und wird auch durch Kommentar (3.51) nahegelegt. Für die Interpretation meiner Analyseergebnisse wird diese Deutung jedoch keine Rolle spielen, da die der Clusteranalyse zugrundeliegende Teilszene bereits vor dem Eingreifen von Professor Smith endet.

Die letzten beiden ausgewählten Kommentare fügen sich schlecht in die bisherigen Deutungen ein; Kommentar (3.52) und Kommentar (3.49) widersprechen sich offenbar. Darüber hinaus sind die hier getroffenen Aussagen in gewissem Sinne mit dem Antwortprofil von Cluster 1 bzw. mit dem Inhalt des Szenarios selbst inkonsistent:

> „A step by step proof together with the general idea is the basis for correctness.“ (3.52)

> „He knows the truth of the theorems, because these are well known and proved theorems. But he wasn't able to reproduce the proof.“ (3.53)

Kommentar (3.52) gehört zum numerischen Antwortprofil (3 3 3); es ist aber unklar, was der Antwortende mit „*correctness*“ meint. Zumindest kann nichts damit gemeint sein, was eine notwendige Bedingung für positive Wissenszuschreibungen wäre, denn sonst hätte die Frage QTom5 negativ beantwortet werden müssen – Tom scheitert ja gerade daran, die Beweisidee zu erläutern. Auch die Eigenschaft der formalen Korrektheit eines Beweises kann nicht gemeint sein, denn dafür ist keine Beweisidee erforderlich. Kommentar (3.53) ist insofern interessant, als er zeigt, dass der Antwortende hier das Wissen, dass T_1, als eine Art Überlieferungswissen auffasst, also nicht gemäß meines Standarddeutungsrahmens[248] als durch den vom epistemischen Subjekt gegebenen Beweis gestützt. Es ist allerdings unklar, warum hier davon gesprochen wird, dass *Tom* nicht in der Lage war, einen Beweis für T_1 zu *reproduzieren*, denn genau dies tut er ja mit seinem Schritt-für-Schritt-Beweis. Die einzige konsistente Deutungsmöglichkeit scheint in der Folgerung zu bestehen, dass der Antwortende hier einen reicheren Begriff von Beweisreproduktion verwendet, als ich es in der bisherigen Deutung der Antwortcluster getan habe.

Deutung von Cluster 2: Das Antwortverhalten von Cluster 2 lässt sich so deuten, dass der von Tom vorgebrachte Schritt-für-Schritt-Beweis für T_1 zunächst als hinreichender Grund dafür angesehen wird, Tom in Bezug auf den Zeitpunkt t_{in} unmittelbar nachdem er diesen Beweis erbracht hat, Wissen, dass T_1, zuzuschreiben. Er wird auch dann noch als hinreichend angesehen, als Tom an Professor Smiths Transferfrage scheitert. Als die Teilnehmer die Information erhalten, dass Tom auch die Beweisidee zu seinem Schritt-für-Schritt-Beweis nicht näher erläutern kann, wird Tom jedoch Wissen, dass T_1, abgeschrieben: Der korrekte Schritt-für-Schritt-Beweis ist demgemäß allein nicht mehr ohne Weiteres hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung, wenn das epistemische Subjekt die Beweisidee nicht genügend gut verstanden hat. Darüber hinaus ist für die Teilnehmer in diesem Cluster, die QTom3 nicht nur mit „can't tell", sondern explizit negativ beantworten, ein gewisses Verständnis der Beweisidee eine notwendige Bedingung für eine positive Wissenszuschreibung.

Deutung von Cluster 3: Das Antwortverhalten von Cluster 3 lässt sich ähnlich deuten wie das von Cluster 2: Auch hier wird der korrekte Schritt-für-Schritt-Beweis allein nicht ohne Weiteres als hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung betrachtet, wenn das epistemische Subjekt die Beweisidee nicht genügend gut verstanden hat. Teilnehmer, die Cluster 3 zugeordnet sind, haben QTom3 in der Regel nicht mit „can't tell", sondern explizit negativ beantwortet. Auch hier wird also, wie in der Deutung zu Cluster 2 vorgeschlagen, ein gewisses Verständnis der Beweisidee zur notwendigen Bedingung für eine positive Wissenszuschreibung gemacht. Im Unterschied zu Cluster 2 wurde das alleinige Erbringen eines Schritt-für-Schritt-Beweises bereits nicht als hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung erachtet, als den Teilnehmern noch nicht bekannt war, dass Tom nicht in der Lage sein würde, eine Transferfrage bzgl. des Beweises von T_1 zu beantworten oder die Beweisidee seines Schritt-für-Schritt-Beweises zu erläutern. Hier mag also

[248] Vgl. Abschnitt 3.1.4.

von Beginn an die Vermutung bestanden haben, dass Tom den Schritt-für-Schritt-Beweis lediglich reproduziert, ohne die Beweisidee verstanden zu haben.

Clusteranalyse zu Szenario 4

Szenariogeschehen und Clustervariablen In Szenario 4 geht es um die für Hypothese (H3) relevante Frage,[249] ob eine vom epistemischen Subjekt vorgeführte Beweisskizze in bestimmten Kontexten allein hinreichend für positive Wissenzuschreibungen sein kann, oder ob das tatsächliche aktuelle Verfügen über einen technisch ausgearbeiteten Beweis in jedem Fall sogar notwendig für positive Wissenszuschreibungen ist. Der Protagonist des Szenarios ist ein weltberühmter Mathematikprofessor, der an einem Beweis einer von ihm selbst aufgestellten Vermutung arbeitet:

> „*Professor Martin Mates, one of the world's most famous mathematicians, has been working on the Mates conjecture for 15 years. He has proved his conjecture in many special cases, and also many technical lemmas for the general case, but a full proof for the general case is still not in sight. Then, shortly after his 60th birthday, suddenly the idea hits him of how to combine all his former results and prove his conjecture in the general case. After he has thought about it for a while, he is able to give a highly informal and sketchy version of a proof from his idea and is completely sure that it will work, but he also recognizes that it would take him one or two years to work everything out in a correct way. He knows that he is suffering from a serious heart disease and has only a few months left to live, so he will not be able to finish this task. Mates gives a couple of talks on mathematical conferences of high reputation and convinces his colleagues that his idea will be successful. Other mathematicians start working out his idea in detail. Half a year later, Mates dies. Five years later, his successors finally end up with a correctly worked out version of a proof for the Mates conjecture.*“

Beschreibung der Clusterlösung Dieses Szenario beinhaltete bereits im Fragebogen nur zwei Fragen, die ich als Clustervariablen für die folgende Clusteranalyse verwende:[250]

[249] Vgl. Abschnitt 3.1.1, S. 80.

[250] Die Tabelle gibt in der dritten Spalte wieder den Zeitpunkt t_{in} im Szenariogeschehen, auf den sich die Frage bezieht, und in der vierten Spalte den Zeitpunkt t'_{in} im Szenariogeschehen, der erreicht ist, als die Frage – im konkreten Fall zu einem Zeitpunkt t_{out} außerhalb des Szenariogeschehens – gestellt wird, an (vgl. Abschnitt 3.1.4 S. 86).

Variable	**Wortlaut der Frage**	t_{in}	t'_{in}
QMates1	*Does Martin Mates know that the Mates Conjecture (MC) is true?*	**vor** allgemeiner Beweisskizze	**vor** allgemeiner Beweisskizze
QMates2	*Did Martin Mates know that MC was true?*	**nach** allgemeiner Beweisskizze, **vor** Ausarbeitung durch Dritte	**nach** allgemeiner Beweisskizze und Ausarbeitung durch Dritte

Per Clusteranalyse der hier 52 zugrunde liegenden Antwortdatensätze konnten fünf charakteristische Antwortprofile ausgemacht werden, deren Umfang und Profilkurve den Abbildungen 3.7 und 3.8 zu entnehmen sind.[251]

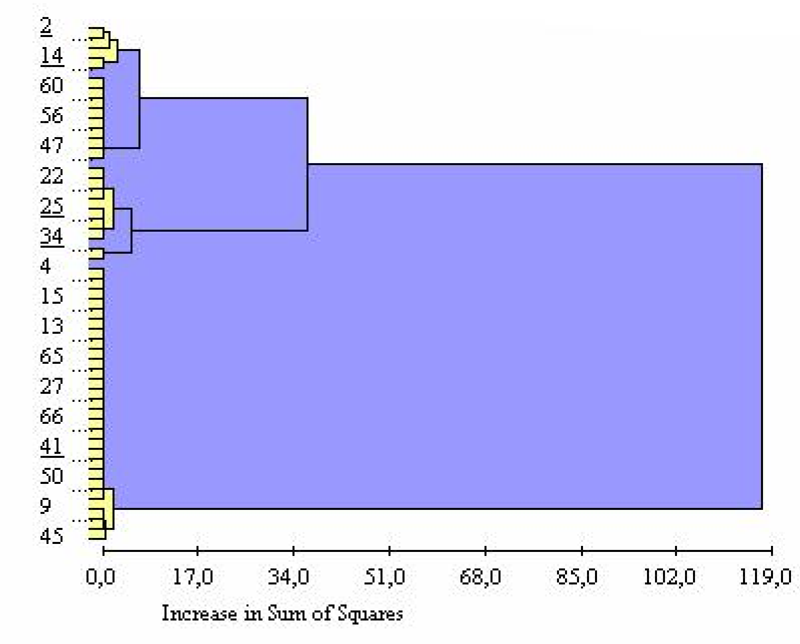


Abbildung 3.7: Fusionsbaum zu Szenario 4

[251]Dass die Aggregatbildung im Dendrogramm in auffällig wenigen Schritten beendet ist, liegt dabei an der geringen Anzahl von Clustervariablen.

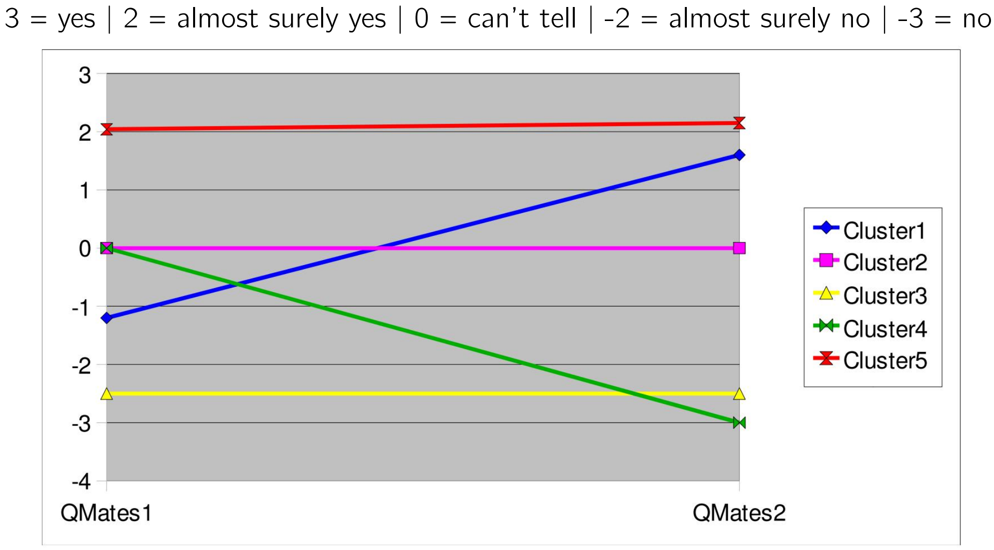


Abbildung 3.8: Antwortprofile der Cluster zu Szenario 4

Die Profilkurven lassen sich in Worten wie folgt beschreiben:

- **Cluster 1** (5 Teilnehmer): Mates weiß zu dem Zeitpunkt t_{in} von QMates1, zu dem er nur Einzelresultate zu MC vorweisen kann, (ziemlich sicher) nicht, dass MC wahr ist; einige der in diesem Cluster zusammengefassten Antwortprofile nehmen bei QMates 1 alternativ den Wert „can't tell" an. Zu t_{in} von QMates2, also nachdem Mates eine Gesamtbeweisskizze angeben kann, die sich posthum (zu t'_{in} von QMates2) als fruchtbare Grundlage für einen vollständigen Beweis erweist, wird die entsprechende Wissenszuschreibung positiv bewertet.

- **Cluster 2** (9 Teilnehmer) lässt sich als das „can't tell"-Cluster beschreiben: Die Teilnehmer mit dem entsprechenden Antwortprofil bewerten beide Wissenszuschreibungen mit „can't tell".

- Teilnehmer mit einem Antwortprofil wie von **Cluster 3** (8 Teilnehmer) bewerten beide Wissenszuschreibungen negativ: Mates weiß (ziemlich sicher) weder zu t_{in} von QMates1, als er nur Teilergebnisse zu MC vorweisen kann, noch zu t_{in} von QMates2, als er eine Gesamtbeweisskizze angeben kann, dass MC wahr ist.

- **Cluster 4** (2 Teilnehmer): Zu dem Zeitpunkt t_{in} von QMates1, zu dem Mates nur über viele Einzelresultate zu MC verfügt, aber noch keine umfassende Beweisskizze vorweisen kann, bewerten die Teilnehmer die Wissenszuschreibung unter QMates1 mit „can't tell". Nachdem sie die Information erhalten haben, dass Mates zu einem späteren Zeitpunkt eine Skizze des Gesamtbeweises entwickelt hat, die im Detail nicht mehr von ihm selbst, sondern erst zu t'_{in} von QMates2 durch seine Nachfolgern ausgearbeitet werden konnte, wird Mates in Bezug auf den Zeitpunkt t_{in} von QMates2, d.h. nach der Entwicklung der Gesamtbeweisskizze, Wissen, dass MC, abgesprochen.

- **Cluster 5** (28 Teilnehmer): Bereits zu t_{in} von QMates1, als Mates nur über viele Einzelresultate zu MC verfügt, aber noch keine umfassende Beweisskizze vorweisen kann, weiß er (ziemlich sicher), dass MC wahr ist. Dies trifft auch auf den Zeitpunkt t_{in} von QMates2 nach seiner Entwicklung einer Gesamtbeweisskizze, die von seinen Nachfolgern schließlich vervollständigt werden kann, zu.

Deutung der Antwortcluster Verwertbare Freitextkommentare wurden hier nur zu den Clustern 2 und 3 abgegeben; sämtliche dieser Kommentare führe ich im Folgenden an. Die Deutung der Cluster 1, 4 und 5 basiert dagegen, wie schon im Falle von Szenario 3, allein auf dem in Abschnitt 3.1.4 beschriebenen Standardinterpretationsrahmen.

Deutung von Cluster 1: Ich schlage eine Deutung dieses Antwortverhaltens vor, gemäß der Mates' Einzelresultate zu MC von den hier zugeordneten Teilnehmern allein noch nicht als hinreichend dafür angesehen werden, dass Mates weiß, dass MC. Erst als Mates auch eine Skizze des Gesamtbeweises vorweisen kann, die diese Einzelresultate verbindet, weiß er, dass MC, auch wenn er den Gesamtbeweis nicht mehr selbst im Detail ausführen kann.

Deutung von Cluster 2: Einige Kommentare aus dem „can't tell"-Cluster 2 legen die Deutung nahe, dass die Stichprobenteilnehmer mit einem entsprechenden numerischen Antwortprofil explizit von positiven Antworten auf die beiden Fragen QMates1 und QMates2 Abstand genommen haben, weil sie das Verfügen über Beweisteile und eine bloße Skizze des Gesamtbeweises für MC, die erst später durch Andere vervollständigt wird, weder einzeln noch in Kombination für hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung halten:

> „Sometimes the idea you see looks fine, but as soon as you start to lay it out there goes something terribly wrong." (3.54)

„But he probably knew *something*.“ (3.55)

Während ich Kommentar (3.55) so lese, dass dieser Teilnehmer im Sinne meines Standarddeutungsrahmens[252] geantwortet hat, verstehe ich Kommentar (3.54) jedoch anders: Hier wurde die bei QMates2 zu t_{out} bekannte Information, das Mates' Skizze später vervollständigt werden konnte und sich somit kein „schrecklicher Irrtum“ zwischen den Zeilen der Beweisskizze verbarg, offenbar nicht berücksichtigt. Eine Erklärung für Letzteres wäre, dass dieser Teilnehmer aus Mates' Perspektive geantwortet hat. Dennoch haben die Kommentatoren auch keine explizit negativen Antworten auf QMates1 und QMates2 gegeben, fordern also für eine positive Wissenszuschreibung (oder für die Überzeugung, zu wissen) nicht notwendigerweise einen Mates *aktuell* kognitiv zugänglichen ausgearbeiteten Beweis.

Einen anderen Grund für das Antwortverhalten von Cluster 2 nennt dieser Kommentar:

„Once again, in what sense can we ‚know‘ a mathematical statement to be ‚true‘? We can perhaps convince ourselves that it is true (but there may be an error in our reasoning), or we trust other mathematicians (but they may be wrong), or we trust a computer-checked proof (but there may have been a hardware or software failure). In this way, we can reduce the chance of an error–but we cannot eliminate it completely.“ (3.56)

Hier wird in skeptischer Tradition generell die Wissbarkeit mathematischer Sätze aufgrund von Beweisführungen in Zweifel gezogen, denn selbst computergestütze Beweise sind nicht frei von Irrtumsmöglichkeiten.

Die folgenden beiden Kommentare widersprechen sich zunächst:

„From beyond the grave?! Seriously, you need another possible answer here: with HIGH PROBABILITY, he knew the conjecture was true (‘high’ being anything $> 1/2$). And did from the moment he first realized the technique.“ (3.57)

[252] Also unter Berücksichtigung sämtlicher ihm zu t_{out} ohne Zurückblättern bekannten Informationen zum Szenariogeschehen, vgl. Abschnitt 3.1.4.

„Life and death per se play no role in the mathematical *Univers de Discours.* The truly hard-nosed skeptic will stick to his/her opinion on the knowledge of professor Mates.“ (3.58)

Kommentar (3.57) handelt jedoch eher von der Frage danach, welche Auswirkungen *andere Ereignisse*, die nach dem Ableben von Mates neue Informationen über Situationen vor dem Ableben preisgeben, auf epistemische Zuschreibungen haben; die in dem Kommentar suggerierte Antwort lautet, dass solche Ereignisse nur die Beurteilung der objektiven Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse, die zu Zeitpunkten vor dem Ableben bestanden, verändern können. Kommentar (3.58) dagegen behauptet, dass das Ereignis von Mates' Ableben *selbst* auf die epistemischen Zuschreibungen, die sich auf einen Zeitpunkt davor beziehen, keine Auswirkungen hat.

Deutung von Cluster 3: Das Antwortverhalten von Cluster 3 lässt sich unter Berücksichtigung meiner Standarddeutung (vgl. Fußnote 252) so deuten, dass die mathematischen Argumente für MC, die Mates zum Zeitpunkt t_{in} von QMates1 (die Einzelresultate) bzw. zum Zeitpunkt t_{in} von QMates2 (die Gesamtbeweisskizze) tatsächlich vorweisen kann, in den Augen der hier zugeordneten Teilnehmer nicht hinreichen, um aufgrund dieser zu wissen, dass MC.

Die folgenden beiden Kommentare legen darüber hinaus die Deutung nahe, dass Teilnehmer mit dem Antwortprofil von Cluster 3 den tatsächlichen, aktuellen kognitiven Zugriff auf einen bis ins technische Detail ausgearbeiteten Beweis durch das epistemische Subjekt als notwendig für eine positive Wissenszuschreibung erachten:

„Many ideas sound good, but difficulties become apparent when working out the details.“ (3.59)

„The details are important–even when I have a general idea, an overall sketch, and an idea of how it fits into a bigger picture, I am suspicious of technical problems until I work them all out.“ (3.60)

Dem steht dieser Kommentar allerdings indirekt entgegen:

",X knows Y' depends only on what sort of evidence *X* has for Y. It is immaterial whether Y finally turns out to be true or not.“ (3.61)

Die Aussage, dass es *unerheblich* für eine Wissenzuschreibung ist, ob p sich als wahr oder falsch herausstellt, ist nicht ohne Weiteres verträglich mit der Forderung, tatsächlich einen detailliert ausgearbeiteten Beweis für p vorlegen zu können. Ein solcher Beweis würde die Wahrheit von p (ggf. zumindest relativ zu bestimmten mathematischen Axiomen) in der Regel bereits logisch implizieren oder doch sehr wahrscheinlich machen.

Deutung von Cluster 4: Das Antwortverhalten von Cluster 4 lässt sich wie folgt deuten: Die Befragten haben QMates1 mit „can't tell" bewertet, weil das Szenariogeschehen, welches sich bis zum Zeitpunkt t'_{in} von QMates1 (der mit t_{in} zusammenfällt) entwickelt hat, noch zu wenig Information darüber bot, wie stark sich Mates' Einzelresultate zu MC von einem vollständigen Beweis für MC unterscheiden. Der weitere Verlauf des Szenarios bis zum Zeitpunkt t'_{in} von QMates2 lieferte diesbezüglich Informationen nach: Mates enwickelt zwar noch eine Gesamtbeweisskizze, mit Hilfe derer später Dritte einen ausgearbeiteten Beweis für MC produzieren können. Er kann diese Skizze jedoch aus Zeit- und Komplexitätsgründen nicht mehr selbst weiter ausführen. Aufgrund dessen bewerten die Befragten QMates2 negativ.

Damit ist noch nicht gesagt, dass die Befragten einen bis ins formale Detail vollständig ausgearbeiteten Beweis zur notwendigen Bedingung für eine positive Wissenszuschreibung machen: Wäre Mates doch noch selbst in der Lage gewesen, seine Skizze nach dem Bezugszeitpunkt t_{in} von QMates2 weiter auszuführen, hätten die Befragten QMates2 im Einklang mit der bisherigen Deutung positiv beantworten können. Mates hätte dann zu t_{in} nicht über einen bis ins formale Detail ausgearbeiteten, aber doch über einen in einem geeigneten Sinne formalisierbaren Beweis für MC verfügt, um zu wissen, dass MC. Wäre ihnen diese Zusatzinformation schon zum Zeitpunkt t_{out} von QMates1 bekannt gewesen, hätten sie unter Umständen auch schon diese Frage statt mit „can't tell" positiv beantwortet.

Deutung von Cluster 5: Das Antwortverhalten von Cluster 5 ist vor dem Hintergrund des allgemeinen Deutungsrahmens aus Abschnitt 3.1.4 schlicht so zu deuten, dass die Befragten Mates bei QMates1 bereits allein aufgrund seiner Einzelresultate Wissen, dass MC, zuschreiben. Dies tun sie dann bei QMates2 aufgrund der hinzutretenden, von Mates selbst entwickelten Gesamtbeweisskizze zur Zusammenführung der Einzelresultate erst recht, zumal diese sich zum Zeitpunkt t'_{in} von QMates2 (der einige Zeit nach t_{in} liegt) tatsächlich als fruchtbare Grundlage für den durch Mates' Nachfolger ausgearbeiteten Beweis erwiesen hat.

3.3 Vorläufige Interpretation der Umfrageergebnisse

In diesem Abschnitt soll eine vorläufige Interpretation der bisher vorgestellten Ergebnisse der Umfragestudie vorgeschlagen werden, die durch die nachfolgend vorgestellte Interviewstudie geprüft und vertieft werden soll. Zunächst diskutiere ich kurz eine vergleichende Interpretation der Häufigkeitsergebnisse aus Fragebogenteil II mit den Ergebnissen der Clusteranalyse zu Fragebogenteil III, die Aufschluss über das Verhältnis zwischen abstrakten Wissens- und Beweiskonzepten der Umfrageteilnehmer und den Bewertungen konkreter epistemischer Zuschreibungen geben soll. Im Anschluss erfolgt eine ausführliche Interpretation der Ergebnisse der Clusteranalyse hinsichtlich der in Abschnitt 3.1.1 diskutierten Arbeitshypothesen (H1) bis (H3).

3.3.1 Vergleich der Ergebnisse aus Fragebogenteil II und III

Der Vergleich der sehr homogenen Häufigkeitsergebnisse aus Fragebogenteil II mit den wesentlich heterogeneren Ergebnissen der Clusteranalyse von Teil III auf Grundlage der von mir vorgeschlagenen Deutung der Antwortcluster zeigt eine aus soziologischer Sicht erwartbare Spannung (vgl. Abschnitt 3.1.4) zwischen den Antworten auf Fragen nach den abstrakten Konzepten von „Wissen“ und „Beweis“ und dem tatsächlichen Gebrauch dieser Begriffe durch die Stichprobenteilnehmer:

Während die Mehrheit der Antworten auf die Freitext-Frage nach einer Definition von „mathematischer Beweis“ in Fragebogenteil II auf die Definition eines formalen Beweises Bezug nimmt und über 80 % der Stichprobenteilnehmer angeben, dass mathematisches Wissen objektiv sei,[253] deuten eine Reihe der Freitextkommentare aus Teil III darauf hin, dass die Zuschreibungsstandards für beweisbasiertes Wissen in Abhängigkeit von kontextuellen Faktoren wie den Arbeitsgewohnheiten des epistemischen Subjektes, dem Zeitrahmen, der Komplexität des rechtfertigenden Beweises, der Größe der bereichsspezifischen *community* oder der Wichtigkeit des betreffenden Theorems variieren.[254] Zudem sind als Rechtfertigung akzeptierte mathematische Beweise gemäß der vorgeschlagenen Deutung des Antwortverhaltens von Cluster 1 und 2 zu Szenario 1 fallibel, um Unterschied zu formalen Beweisen. Das Vorliegen einer formalen Ableitung ist gemäß der vor-

[253]Vgl. S. 91.

[254]Vgl. genauer die Diskussion zu (H1) im nachfolgenden Abschnitt 3.3.2, S. 132. Solche Faktoren wurden allerdings von einigen Teilnehmern auch in Fragebogenteil II in den Antworten auf die Freitextfrage nach einer geeigneten Definition von „mathematischer Beweis“ genannt – trotz der abstrakten Einstellung, dass man präzise definieren kann, was ein mathematischer Beweis ist (Abschnitt 3.2.1, S. 93 f.).

geschlagenen Deutung der Clusteranalyse zu Szenario 4 (S. 124) auch kein notwendiges Zuschreibungskriterium für Wissen in der mathematischen Praxis.[255]

Aus philosophischer Sicht ist es weiterhin fraglich, wie mathematisches Wissen von praktizierenden Mathematikern einerseits als objektiv bewertet werden kann, wenn der Ausdruck „wissen" andererseits im tatsächlichen Gebrauch die folgende Faktivitätsbedingung nicht erfüllt: Gewusst werden kann nur, was auch wahr ist. Die Wahrheit von p ist also notwendig für die Wahrheit jedweder Aussage der Form „X weiß, dass p".[256] Diese Faktivitätsbedingung scheint in Szenario 1 in Bezug auf die Wissenszuschreibungen der Stichprobenteilnehmer, die dem doch deutlich heraustretenden und großen Cluster 1 angehören, gerade nicht erfüllt zu sein: Falls sie diese Faktivität, also die Wahrheit von JC, für ihre positiven Wissenszuschreibungen gefordert hätten, so würden sie sich durch ihre positive Antwort auf QJones7 zu der Behauptung verpflichten, dass JC falsch ist. Durch ihre positive Antwort auf QJones8 würden sie sich dann aber gleichzeitig zu der widersprüchlichen Behauptung verpflichten, dass JC wahr und falsch ist. Darüber hinaus spricht etwa Kommentar (3.21) die verletzte Faktivitätsbedingung explizit an.

Eine mögliche Erklärung für die verletzte Faktivität bestand gemäß der Deutung von Cluster 1 darin,[257] dass die Teilnehmer mit diesem Antwortprofil die Fragen QJones6 bis QJones8 aus der Perspektive des Szenarioprotagonisten John im Sinne von „John ist fest überzeugt davon, zu wissen, dass JC" beantwortet haben. Unter dieser Deutung sind einerseits sämtliche möglichen Antworten auf QJones6 bis QJones8 sowohl damit verträglich, dass JC tatsächlich wahr ist als auch damit, dass JC tatsächlich falsch ist. Andererseits sind dann auch die Clusterergebnisse von Szenario 1 prinzipiell mit einer abstrakten Auffassung von objektivem mathematischen Wissen verträglich. Diese Erklärung trifft für die von den Umfrageteilnehmern in den Kommentaren (3.26), (3.27) und (3.33) explizit benannten kontextsensitiven Aspekte der Beurteilung von QJones6 bis QJones8 jedoch nicht zu: Diese Kommentare sind den Clustern 2 und 4 zuzuordnen, deren jeweiliges Antwortverhalten keine Deutung aus Johns Perspektive nahelegt.

Aufgrund dieser Überlegungen lässt sich vorerst festhalten, dass die normativen[258] Begriffe objektiven mathematischen Wissens und des formalen mathematischen Beweises, welche die Ergebnisse der abstrakten Einstellungsfragen aus Teil II des Fragebogens tatsächlich nahelegen, zumindest nicht die alleinige, direkte Bewertungsgrundlage für die

[255]Vgl. zu diesen beiden Punkten auch genauer die Diskussionen in Abschnitt 3.3.2 und 3.3.2.
[256]Diese Faktivitätsbedingung stellt eine erkenntnistheoretisch weithin anerkannte Adäquatheitsforderung für philosophische Analysen des Wissensbegriffes dar (vgl. die Bemerkungen zur klassischen Wissensanalyse in Abschnitt 2.3.1.
[257]Vgl. S. 100.
[258]Vgl. Fußnote 225.

konkreten Wissenszuschreibungen aus Teil III bilden. Diese Diagnose gilt zunächst unabhängig von der von den Umfrageteilnehmern gewählten Perspektive bei der Beantwortung der Szenariofragen. Die nun folgendene detailliertere Diskussion der Ergebnisse aus Teil III soll Ansätze für eine genauere philosophische Analyse zu der Frage liefern, ob und in welcher Weise die normativen Begriffe bei der Beurteilung konkreter epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis berücksichtigt werden.

3.3.2 Interpretation der Ergebnisse aus Fragebogenteil III

Hier sollen nun die Ergebnisse der Clusteranalyse auf Grundlage der jeweils vorgeschlagenen Deutung der unterschiedlichen Antwortcluster im Hinblick darauf interpretiert werden, ob sie die durch die philosophische Diskussion in Kapitel 2 motivierten Arbeitshypothesen (H1) bis (H3) (vgl. Abschnitt 3.1.1 S. 80) erfüllen oder nicht.[259] Besonderes Augenmerk gilt dabei zunächst den Szenarien, die speziell zur Prüfung der jeweiligen Hypothese entworfen wurden.[260] Relevante Deutungen von Clusterergebnissen aus anderen Szenarien werden gegebenenfalls hinzugezogen. Wie im Folgenden dargelegt, möchte ich an (H1) und (H3) in ihrer ursprünglichen Form weiterhin festhalten. Anstelle von (H2) in ihrer ursprünglichen Formulierung schlage ich aufgrund der empirischen Ergebnisse eine stärker präzisierte, aber insbesondere auch logisch schwächere Hypothese (H2') vor.

Zu (H1): Kontextabhängigkeit epistemischer Standards

Die Hypothese (H1) lautete:

> Die Wissenszuschreibungen der Stichprobenteilnehmer hängen systematisch von kontextuellen Änderungen ab.

Als Testszenario für (H1) war insbesondere Szenario 1 vorgesehen. Dieses diskutiere ich hier zuerst, beziehe aber anschließend auch Ergebnisse aus anderen Szenarien mit ein.

Hinsichtlich Cluster 1 und 2 von Szenario 1 kann (H1) eingeschränkt auf die Menge der Stichprobenteilnehmer mit dem Antwortverhalten von Cluster 1,[261] die QJones6 bis QJones8 im Sinne des in Abschnitt 3.1.4 diskutierten Standarddeutungsrahmens beantwortet haben, in folgendem Sinne als erfüllt interpretiert werden: Nachdem ein entsprechender Stichprobenteilnehmer zum Zeitpunkt t_{out} von QJones7 die Information erhalten hatte, dass John ein Gegenbeispiel zu JC entdeckt hat, beurteilt er die Frage, ob John zu einem

[259] Ein erster Interpretationsversuch der Clusteranalyse zu Szenario 1 wurde in Müller-Hill [98] unternommen. Die im Folgenden vorgeschlagene Interpretation stellt jedoch eine grundlegende Überarbeitung und Präzisierung dieser ersten Interpretation dar.
[260] Vgl. S. 81.
[261] Vgl. S. 100 ff.

Zeitpunkt nach dieser Entdeckung weiß, dass JC falsch ist, positiv oder mit „can't tell". Ebenfalls zu t_{out} urteilt er andererseits, dass John vor der Entdeckung des Gegenbeispiels wusste, dass JC wahr ist. Unter der Annahme, dass „John weiß, dass JC falsch ist" die Aussage „John weiß nicht, dass JC wahr ist" impliziert, und auch die Antwort „can't tell" auf QJones7 im Sinne von „John weiß nicht, dass JC wahr ist" interpretiert werden kann, legt dies nahe, dass die Standards, denen die Stichprobenteilnehmer zur Beurteilung von QJones6 bis QJones8 folgen, nicht situativ invariant, sondern zumindest zeitrelativ sind: Die Entdeckung des Gegenbeispiels lenkt die Aufmerksamkeit der Teilnehmer demnach auf einen übertrumpfenden Anfechtungsgrund für JC, den sie jedoch nur bei der Beurteilung der Wissenszuschreibung unter QJones7, also in Bezug auf Zeitpunkte nach dieser Entdeckung berücksichtigen; in Bezug auf den Zeitpunkt t_{in} von QJones8, der vor dieser Entdeckung liegt, wird er dagegen ignoriert.

Im Unterschied zu diesem Hinweis auf die Zeitrelativität und hier insbesondere auch Fallibilität von epistemischer Rechtfertigung durch mathematische Beweise ist folgender, bereits in Abschnitt 3.3.1 diskutierter Aspekt der Interpretation des Antwortverhaltens von Cluster 1 nicht ohne Weiteres mit einer erkenntnistheoretischen Wissensanalyse vereinbar: Cluster 1 verletzt die Faktivitätsbedingung für Wissen.

Eine philosophisch zufriedenstellende Lösung für dieses Problem bietet der in der Deutung von Cluster 1 (und auch 2) bereits angesprochene, den Freitextkommentaren entnommene Sprachgebrauch, nach dem der Ausdruck „know" von den Teilnehmern etwa im Sinne von „being reasonably sure to know" gebraucht wurde: Aus philosophischer Sicht handelt es sich bei einem solchen Gebrauch allein um die Rede von fallibler epistemischer Rechtfertigung, nicht von Wissen. Eine mögliche Erklärung für diesen Sprachgebrauch der Teilnehmer war jedoch gerade deren vom allgemeinen Deutungsrahmen abweichende Perspektivwahl bei der Beantwortung der Fragen QJones6 bis QJones8.[262] Unter dieser alternativen Deutung des Antwortverhaltens von Cluster 1 ist aber kein Rückschluss auf die Relevanz des durch das Szenariogeschehen bis zum Zeitpunkt t'_{in} offenbarten, übertrumpfenden Anfechtungsgrundes für die Bewertung von QJones8 mehr möglich, denn aus Johns Perspektive muss eine konsistente Beurteilung von QJones8 mit der von QJones6 zusammenfallen.

Die gerade angestellten Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Um Cluster 1 (und ggf. auch Cluster 2) hinsichtlich (H1) richtig zu interpretieren, ist zu klären,[263] ob bei der Beurteilung von epistemischen Zuschreibungen der Form „Does X know that p is true" ein Sprachgebrauch von „know" im Sinne von gerechtfertigter Überzeugung,

[262] Vergleiche, auch für die folgende Erläuterung, S. 101.
[263] Vgl. Ausgangsfrage 1 in Abschnitt 3.4.1.

wie ihn einige Freitextkommentare zu diesem Cluster nahelegen, systematisch erfolgt, und ob eine Beurteilung aus der Perspektive des epistemischen Subjekts zum Bezugszeitpunkt der Zuschreibung der einzige plausible Grund für diesen Sprachgebrauch ist. Die Freitextkommentare zu Cluster 2 (inklusive der „can't tell"-Fälle) etwa legen auch andere mögliche Gründe nahe, die sogar auf eine prinzipielle Kontextabhängigkeit epistemischer Standards in der mathematischen Praxis, über die Zeitrelativität der Bewertung von Wissenszuschreibungen im Hinblick auf hinzutretende Anfechtungsgründe hinaus, hindeuten (vgl. S. 102 f.).

Das Antwortverhalten von Cluster 3 und 4 zu Szenario 1 lässt (mit Ausnahme von Kommentar (3.33) zu Cluster 4) keinen Rückschluss hinsichtlich (H1) zu, das entsprechende Antwortverhalten dieser Cluster ist jeweils sowohl verträglich mit (H1) als auch mit ihrer Negation: Im Falle von Cluster 3 wurde das von John konstruierte Gegenbeispiel als hinreichender Nachweis für die Falschheit von JC angesehen, wodurch in Bezug auf QJones8 die Faktivitätsbedingung für Wissen verletzt war und diese Frage bereits deshalb, unabhängig von möglichen kontextsensitiven epistemischen Standards, im Unterschied zu Cluster 1 negativ beantwortet wurde. Das Antwortverhalten von Cluster 4 schließlich wurde als generelle Skepsis hinsichtlich des Szenariogeschehens gedeutet, die insbesondere ein Artefakt der Umfragesituation sein könnte.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erwähnt, sprechen außer dem gerade erwähnten Kommentar (3.33) zu Cluster 4 von Szenario 1 auch Freitextkommentare zu den Szenarien 1 und 2 andere kontextuelle Faktoren an, bezüglich derer die epistemischen Standards, nach denen die Stichprobenteilnehmer die in Frage stehenden Wissenszuschreibungen beurteilt haben, zu variieren scheinen. Im Falle von (3.33) sowie der Kommentare (3.26) und (3.27) zu Cluster 2 von Szenario 1 sind diese der Zeitrahmen, die Komplexität des rechtfertigenden Beweises, die Größe der bereichsspezifischen mathematischen *community* sowie die mathematische Relevanz der in Frage stehenden mathematischen Aussage p. Im Falle von Szenario 2 werden in den Kommentaren (3.35) und (3.37) zusätzlich das mathematische Themengebiet, in das p einzuordnen ist, sowie die Arbeitsgewohnheiten des epistemischen Subjektes genannt.

Auf Grundlage der vorangegangenen Überlegungen lässt sich zunächst an (H1) festhalten. Neben den bereits genannten offenen Fragen ist aber weiterhin zu präzisieren, welche Bedeutung den genannten sowie möglichen weiteren kontextuellen Faktoren bei der Beurteilung epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis zukommt, und ob diesen im Rahmen einer empirisch informierten Lesart von (FKE) bereits durch eine geeignete Konzeption fallibler formalisierbarer Beweise Rechnung getragen würde, oder ob eine Modellierung im Sinne des semantischen Kontextualismus adäquater wäre.[264]

Zu (H2): Formale Beweise als hinreichende Gründe für mathematisches Wissen

Die Hypothese (H2) lautete:

> Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung von p durch das epistemische Subjekt X ist hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung durch die Stichprobenteilnehmer.

Als Testszenarien für (H2) waren die Szenarien 2 und 3 vorgesehen.

Ich diskutiere hier zuerst die Erfülltheit von (H2) bezüglich Szenario 3 unter der vorgeschlagenen Deutung der Antwortcluster:[265] Die Hypothese ist eingeschränkt auf die Menge der Stichprobenteilnehmer mit dem Antwortverhalten von Cluster 1, dem mit Abstand größten Cluster zu Szenario 3, erfüllt. Dieses Cluster habe ich so gelesen, dass Tom allein aufgrund seines Schritt-für-Schritt-Beweises Wissen, dass T_1 wahr ist, zugeschrieben wird, und dass eine positive Wissenszuschreibung auch in Bezug auf spätere Zeitpunkte weiterhin aufgrund dieses Beweises getätigt wird, trotz Toms Scheitern an der Transferfrage und an der Frage nach der Beweisidee.[266]

Einem Teil der Kommentare aus Cluster 1, (3.44), (3.46) und (3.52), wird die ursprüngliche Formulierung von (H2) im Detail jedoch nicht ganz gerecht. Auf der Grundlage dieser Kommentare bietet sich eine Präzisierung von (H2) in Bezug auf die darin angedeuteten Unterscheidungen eines Wissen-dass („knowing that“) und eines Wissen-warum („knowing why“) oder auch „being able to prove (in a particular way)“ an:[267]

> Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung von p durch das epistemische Subjekt X ist hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung im Sinne eines reinen Wissen-dass (im Unterschied zu Wissen-warum).

Hier schließt sich die Frage an, ob es ein solches reines Wissen-dass tatsächlich ohne das entsprechende Wissen-warum geben kann. Die analytische Diskussion in Kapitel 2, Abschnitt 2.3.3 zu (FKE_4) motiviert die Vermutung, dass eine klare theoretische Trennung zwischen einem Wissen-dass und einem Wissen-warum für epistemische Subjekte mit

[264] Vgl. die Ausgangsfragen 1, 2 und 4 in den Abschnitten 3.4.1, 3.4.2 und 3.4.4.

[265] Vgl. S. 116 ff.

[266] Kommentar (3.45) nennt die Präsentation eines formalen Beweises (*symbol processing*) sogar hinreichend *und* notwendig für das Vorliegen von mathematischem Wissen.

[267] „Knowing that“ bzw. „Wissen-dass“ und „knowing why“ bzw. „Wissen-warum“ verwende ich an dieser Stelle nicht im Sinne der entsprechenden philosophischen Termini, sondern als eine aus den Freitextkommentaren der Umfrageteilnehmer *ad hoc* übernommene Sprechweise.

einer niedrigen mathematischen Professionsstufe,[268] wie den Grundstudiumsstudenten Tom in Szenario 3, möglich ist.

Gemäß der vorgeschlagenen Deutung von Cluster 2 ist (H2) dagegen falsch:[269] Ein korrekter Schritt-für-Schritt-Beweis ist allein nicht hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung, wenn das epistemische Subjekt nicht mindestens auch die Beweisidee verstanden hat. Auch Cluster 3 widerlegt (H2) gemäß der vorgeschlagenen Deutung[270] in diesem Sinne.

Bezüglich Szenario 2 wird (H2) in der ursprünglichen Formulierung von keinem der vier auftretenden Cluster ohne Weiteres erfüllt. Das Antwortverhalten von Cluster 1 sowie das von Cluster 3 (ersteres für den Spezialfall, dass QBob7 mit „can't tell" beantwortet wurde) wurden so gedeutet,[271] dass Bobs korrekter algebraischer Beweis allein nicht als hinreichendes Kriterium für eine positive Wissenzuschreibung betrachtet werden kann. Im Unterschied zu Szenario 3 ist dieser algebraische Beweis sehr komplex und unübersichtlich. Dies verdeutlicht die Relevanz eines in der ursprünglichen Formulierung von (H2) durch den Ausdruck „tatsächliches kognitives Erfassen einer formalen Ableitung" nur implizit angedeuteten situativen Aspekts: Hierin ist bereits eine Beschränkung des durch (H2) beanspruchten Gültigkeitsbereichs auf Fälle angelegt, in denen es sich um einen übersichtlichen, tatsächlich im Detail nachvollzieh*baren* formalen Beweis handelt.[272]

Das Antwortverhalten von „can't tell"-Cluster 2 lässt sich aufgrund des charakteristischen Antwortprofils (0 0 0 0) in Bezug auf (H2) nicht einheitlich interpretieren. Die Freitextkommentare deuten, wie in Abschnitt 3.2.2 (S.111) bereits diskutiert, auf ganz unterschiedliche Motivationen für dieses Antwortverhalten hin: Demnach kann Kommentar (3.38) zwar so gedeutet werden, dass der algebraische Beweis und nicht die bildliche Beweisidee aus Sicht des Kommentators die Grundlage für die Bewertung der Wissenszuschreibung unter QBob4 bis QBob7 darstellt. Ob ein formal korrekter algebraischer Beweis allein jedoch hinreichend für eine positive Bewertung gewesen wäre, und ob der Kommentator dem Szenariogeschehen lediglich zu wenig Informationen darüber entnehmen konnte, ob Bob ein solcher Beweis tatsächlich vorliegt, bleibt offen. Kommentar (3.37) deutet dagegen implizit an, dass der Kommentator die Szenariofragen positiv bewer-

[268] Vgl. S. 61.
[269] Vgl. S. 120.
[270] Vgl. S. 120.
[271] Vgl. S. 109 sowie 111 ff.
[272] In Toms Fall in Szenario 3 liegt ein solch übersichtlicher Schritt-für-Schritt-Beweis für das vergleichsweise einfache Theorem T_1 vor.

tet hätte, wenn Bob tatsächlich einen detaillierten, korrekten formalen Beweis geführt hätte.[273]

Eine Interpretation des Antwortverhaltens von Cluster 4 im Sinne von (H2) ist allein aufgrund der Bewertung von QBob4 bis QBob7, die durchweg negativ ausfällt, ebenfalls nicht plausibel, denn Bobs algebraischer Beweis ist, wie zumindest durch das Szenariogeschehen zum Zeitpunkt t'_{in} von QBob6 und QBob7 suggeriert, formal korrekt. Cluster 4 lässt sich aber dank der Freitextkommentare (3.40), (3.41) und (3.42) wie folgt im Sinne einer geeignet präzisierten Version von (H2) interpretieren: Ein formaler algebraischer Beweis kann hinreichend für die positive Bewertung der Fragen QBob4 bis QBob7 sein, wenn dieser Beweis übersichtlich genug ist. Die negative Bewertung erfolgt hier also deshalb, weil Bobs algebraischer Beweis sehr komplex und unübersichtlich ist. In Anbetracht dieser Komplexität liefert das Szenariogeschehen zu wenig Information darüber, wie genau Bob die Details seines Beweises geprüft hat. Die Information, dass er den Beweis über Nacht gefunden hat, und dass seine ursprüngliche Beweisidee den algebraischen Schritten nicht wie geplant entspricht, nährt im Gegenteil den Zweifel der Teilnehmer daran, dass Bob eine hinreichend genaue Prüfung durchgeführt hat. Diese Einschätzung ist unabhängig davon, ob eine spezielle Stelle im Beweis, die dem fehlerhaften Aspekt der bildlichen Beweisidee auf der algebraischen Seite entspricht, tatsächlich fehlerhaft ist oder nicht.

Eine geeignete vorläufige Präzisierung von (H2) lautet den vorangegangenen Überlegungen gemäß wie folgt:

(H2') Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung von p durch das epistemische Subjekt X ist nur dann hinreichend für eine positive Wissenszuschreibung im Sinne eines „Wissen-dass“, wenn die Ableitung entsprechend übersichtlich ist.

Insbesondere stellt (H2') eine Abschwächung von (H2) im logischen Sinne dar.

Zu (H3): Formale Beweise als nicht notwendig für mathematisches Wissen

Die Hypothese (H3) lautete:

> Das tatsächliche kognitive Erfassen einer formalen Ableitung für p durch das epistemische Subjekt X ist keine notwendige Forderung für eine positive Wissenszuschreibung durch die Stichprobenteilnehmer.

[273] Explizit wird nur gesagt, dass ein formaler Beweis dann keine notwendige Bedingung für eine positive Bewertung von Wissenszuschreibungen ist, wenn dass epistemische Subjekt X bekannterweise stets sehr sorgfältig mathematisch arbeitet. Diese Aussage ist für (H3) relevant; vgl. S. 135.

Als Testszenario für (H3) war insbesondere Szenario 4 vorgesehen. Zu jedem der fünf Antwortcluster dieses Szenarios gibt es eine plausible Deutung, gemäß der (H3) erfüllt oder zumindest nicht widerlegt wird.

Das jeweilige Antwortverhalten von Cluster 1 und Cluster 5 kann aufgrund der positiven Beurteilung von QMates2 gemäß der in Abschnitt 3.2.2 (vgl. S. 124 und 127 ff.) vorgeschlagenen Deutung im Sinne von (H3) verstanden werden: In beiden Clustern ist demnach das tatsächliche Verfügen über einen formalen Beweis zum Zeitpunkt t_{in} von QMates2 durch das epistemische Subjekt Mates nicht notwendig dafür, dass Mates weiß, dass MC. Für Cluster 1 gilt allerdings aufgrund der negativ oder mit „can't tell" beurteilten Frage QMates1, dass eine positive Wissenszuschreibung *ohne* einen vom epistemischen Subjekt erbrachten detaillierten Beweis erst erfolgt, nachdem Mates neben den Einzelresultaten eine Gesamtbeweisskizze liefern kann, die insofern in einer konstituierenden Beziehung zu einem detaillierten Beweis steht, als sie sich posthum (zum Zeitpunkt t'_{in} von QMates2) als fruchtbare Grundlage für einen im Detail ausgearbeiteten Beweis erweist.

Das Antwortverhalten von Cluster 2,[274] dem „can't tell"-Cluster von Szenario 4, einheitlich im Sinne von (H3) zu interpretieren, ist unter Berücksichtigung der sehr unterschiedlichen Freitextkommentare zu diesem Cluster kaum möglich. Wie in der Deutung von Cluster 2 in Abschnitt 3.2.2 diskutiert, lässt sich aber generell sagen, dass die Teilnehmer aufgrund dessen, dass sie keine explizit negative Bewertung von QMates1 und QMates2 vorgenommen haben, zumindest das tatsächliche Verfügen über eine formale Ableitung zum jeweiligen Bezugszeitpunkt t_{in} nicht zu einer notwendigen Bedingung für eine positive Bewertung gemacht haben.

Das Antwortverhalten von Cluster 3 widerlegt (H3) zumindest nicht direkt: Zwar reichen demnach, wie in Abschnitt 3.2.2 (S. 126 f.) diskutiert, die Mates zum jeweiligen Bezugszeitpunkt von QMates1 und QMates2 zur Verfügung stehenden Argumente für MC nicht hin, um zu wissen, dass MC. Die durch Kommentar (3.59) und (3.60) angedeutete Begründung für dieses Antwortverhalten, dass ein Mates aktuell zur Verfügung stehender formal ausgearbeiteter Beweis eine notwendige Bedingung dafür ist, zu wissen, dass MC, ist jedoch nicht zwingend. Eine plausible Alternative für Cluster 3 bietet eine Interpretation dieses Antwortverhaltens in Anlehnung an die in Abschnitt 3.2.2 vorgeschlagene Deutung von Cluster 4:[275] Für eine positive Wissenszuschreibung muss dem epistemischen Subjekt ein in einem geeigneten Sinne formalisierbarer Beweis aktuell kognitiv zur Verfügung stehen, es muss aber nicht über einen tatsächlich formal ausgearbeiteten Be-

[274] Vgl. S. 124 f.
[275] Vgl. S. 127 f.

weis verfügen. Mates' Einzelresultate bzw. die Gesamtbeweisskizze stellen jedoch keine im entsprechenden Sinne formalisierbaren Beweise für MC dar, weshalb QMates1 und QMates2 negativ beantwortet werden.

Das Antwortverhalten von Cluster 4 lässt sich in Bezug auf (H3) entsprechend wie folgt interpretieren: Die Antwort „can't tell" auf QMates1 legt nahe, dass diese Teilnehmer den aktuellen kognitiven Zugang zu einem formal ausgearbeiteten Beweis durch das epistemische Subjekt nicht als notwendige Bedingung dafür ansehen, zu wissen, dass MC. Aus ihrer Sicht lagen bei der Beantwortung von QMates1 jedoch noch nicht genug Informationen vor, um beurteilen zu können, ob Mates vermittels seiner Einzelresultate stattdessen über einen in einem für das Vorliegen von Wissen geeigneten Sinne formalisierbaren Beweis für MC verfügt. Bei der Beurteilung von QMates2 lagen dagegen hinreichende Informationen dafür vor: Da Mates seine Gesamtbeweisskizze nicht mehr selbst vollständig ausführen kann, verfügt er zu t_{in} von QMates2 nicht über einen in einem geeigneten Sinne formalisierbaren Beweis für MC und weiß entsprechend auch nicht, dass MC.

An (H3) werde ich aufgrund der vorangegangenen Überlegungen zunächst festhalten. Hier ist im Hinblick auf die Frage nach einer sozio-empirisch informierten Lesart von (FKE) genauer zu untersuchen, ob und wie der Parameter „formalisierbar" geeignet im Sinne von „durch X selbst formal ausarbeitbar" spezifiziert werden kann, um eine philosophisch befriedigende und genauere Analyse des Antwortverhaltens zu Szenario 4 zu erreichen. Eine entsprechende Analyse sollte auch klären, welche Rolle kontextuelle Faktoren wie die spezifischen mathematischen Fähigkeiten von X für eine solche Spezifikation spielen.[276]

3.4 Vier Ausgangsfragen für die Interviewstudie

In diesem Abschnitt sollen die offenen Fragen, die sich aus der gerade diskutierten vorläufigen Interpretation der empirischen Umfrageergebnisse ergeben haben und deren Weiterverfolgung für einen detaillierteren Vergleich mit den philosophischen Analyseergebnissen aus Kapitel 2 im Sinne des Programms DSP[277] relevant ist, zu vier theoretischen Ausgangsfragen (Schritt 1) für die in Kapitel 4 vorgestellte Vertiefungsstudie (Schritt 2) gebündelt werden. Der Formulierung jeder der vier Ausgangsfragen geht dabei eine kurze Motivation auf der Grundlage der konkreten empirischen Umfrageergebnisse voraus. Im Anschluss an die genaue Formulierung folgt jeweils eine Erläuterung zur interpretatorischen Bedeutung der entsprechenden Frage vor dem Hintergrund erkenntnistheoretischer

[276] Vgl. die Ausgangsfragen 3 und 4 in den Abschnitten 3.4.3 und 3.4.4.
[277] Vgl. Abschnitt 1.3.3.

Begrifflichkeiten, insbesondere hinsichtlich der Einbindung der empirischen Ergebnisse in DSP (Schritt 3).

Eine allgemeine philosophische Motivation, die alle vier der nachfolgend formulierten Ausgangsfragen betrifft, besteht in der in Abschnitt 3.3.1 aufgezeigten Spannung zwischen den Interpretationen der empirischen Resultate aus Fragebogenteil II und III, also der Deutung der abstrakten Vorstellungen praktizierender Mathematiker von mathematischem Wissen und mathematischen Beweisen sowie der Deutung des praktischen Gebrauchs epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis. In Abschnitt 3.1.4 habe ich vorgreifend eine soziologische Erklärung dieser Spannung vor dem Hintergrund eines kurzen Exkurses in die Theorie der empirischen Sozialforschung gegeben.[278] Diese liefert jedoch noch keine philosophisch zufriedenstellende Analyse. Wie am Ende von Abschnitt 3.3.1 gefordert, dienen die vier Ausgangsfragen daher unter anderem dazu, das Verhältnis zwischen stark normativen Auffassungen[279] des mathematischen Wissens und des mathematischen Beweises, die den abstrakten Einstellungen praktizierender Mathematiker entsprechen mögen, und davon verschiedenen Bedingungen für konkrete epistemische Zuschreibungen in der mathematischen Praxis genauer zu bestimmen.

3.4.1 Zu Ausgangsfrage 1: Wissen, Überzeugung und Rechtfertigung

Eine Reihe von Freitextkommentaren zu Cluster 1 und 2 zu Szenario 1 deuten an, dass die Befragten bewusst nicht Wissen im starken Sinne der traditionellen philosophischen Konzeption[280] oder im Sinne des normativen Konzepts objektiver mathematischer Gewißheit, welches die Umfrageergebnisse aus Fragebogenteil II nahelegen, sondern bestimmte Arten des Überzeugtseins zu- oder abgeschrieben haben. Diese Teilnehmer haben im Verlauf des Fragebogens die zu beurteilenden Zuschreibungen der Form: *X knows that p is true*, im Sinne von

X is reasonably sure that p is true (Kommentar (3.20)),

[278] Demnach vertreten die Befragten einerseits Auffassungen von mathematischem Wissen als absoluter Gewissheit und mathematischen Beweisen als korrekten formallogischen Ableitungen aus grundlegenden mathematischen Axiomen, die auch außerhalb der wissenschaftlichen Mathematik weit verbreitet sind. Als Kriterien für tatsächliche epistemische Zuschreibungen verwenden sie die Ausdrücke „Wissen“ und „Beweis“ jedoch nicht einheitlich im Sinne dieser normativ-idealen Begriffe, sondern häufig in einem viel schwächeren Sinne. Ein Teil der Stichprobenteilnehmer hat diese Abschwächung nicht explizit verbalisiert, etwa durch die Verwendung von Ausdrücken wie „glauben“, „gerechtfertigt sein“ oder „sicher sein“ statt „wissen“. Eine mögliche Erklärung dafür ist die folgende: Den betroffenen Befragten war bewusst, dass eine explizit schwächere Lesart der Begriffe „mathematisches Wissen“ und „mathematischer Beweis“ als die klassische, normativ-ideale der herrschenden Auffassung von Mathematik als epistemischem Sonderfall zuwiderläuft. Sie gaben daher „sozial erwünschte“ Antworten auf die abstrakten Einstellungsfragen aus Fragebogenteil II, auch wenn diese nicht der Realität der mathematischen Praxis entsprechen.

[279] Vgl. S. 129.

[280] Vgl. Kapitel 2 Abschnitt 2.3.1.

X considers the given proof of p to be correct (Kommentar (3.22)),

X is convinced that p is true by the claimed proof (Kommentar (3.24)),

X believes/claims to know that p is true (Kommentar (3.30)), oder

X is certain that the proof of p is correct (Kommentar (3.23)),

interpretiert. Dabei lässt sich die erste Formulierung aus erkenntnistheoretischer Sicht im Sinne von gerechtfertigtem Überzeugtsein, die übrigen vier eher im Sinne von bloßem Überzeugtsein lesen. Anderen Kommentaren wie (3.28) und (3.29) zum „can't tell"-Profil (unter Cluster 2 zusammengefasst) zufolge hätten derartige, aus philosophischer Sicht abgeschwächte Lesarten des Ausdrucks „know" eine positive oder negative Beurteilung der Wissenszuschreibungen in den Szenarien erst möglich gemacht. In diesem Sprachgebrauch liegt, wie in Abschnitt 3.3.1 (S. 129) diskutiert wurde, auch eine erkenntnistheoretisch tragbare Erklärung für die dort angesprochene, unter einer dem Standarddeutungsrahmen gemäßen Deutung des Antwortverhaltens von Cluster 1 zu Szenario 1 verletzte Faktivitätsbedingung für Wissen, denn Überzeugungen und auch epistemische Rechtfertigung werden im Allgemeinen gerade als nicht faktiv, sondern als prinzipiell fallibel angesehen. Wie in Abschnitt 3.3.2 (S. 130 f.) diskutiert, können Cluster 1 und 2 von Szenario 1, je nachdem, aus welchen Gründen dieser Sprachgebrauch gewählt wurde, als Hinweis auf eine prinzipiell fallible Rechtfertigung durch Beweise in der mathematischen Praxis oder auch als Hinweis auf eine prinzipielle Kontextabhängigkeit von Rechtfertigungsstandards aufgefasst werden. Die erste Ausgangsfrage lautet auf Grundlage dieser Überlegungen wie folgt:

Ausgangsfrage 1

> Interpretieren die Teilnehmer in den abgefragten Wissenszuschreibungen den Ausdruck „know" systematisch im erkenntnistheoretischen Sinne von Überzeugtsein oder gerechtfertigtem Überzeugtsein, und wenn ja, was sind die Gründe für diesen speziellen Sprachgebrauch? Deuten diese Gründe gegebenenfalls auf eine prinzipielle Fallibilität rechtfertigender mathematischer Beweise und eine prinzipielle Kontextabhängigkeit epistemischer Standards in der mathematischen Praxis hin, oder gibt es dort (auch) einen ausgezeichneten, kontextunabhängigen Standard für infallible Rechtfertigung durch Beweise?

Diese Fragestellung ist von besonderer Bedeutung für eine vertiefende erkenntnistheoretische Interpretation der Clusterergebnisse, weshalb ich hier zur Erläuterung ein wenig weiter aushole:

Zunächst ist zu klären, ob es sich im Falle einer aus erkenntnistheoretischer Sicht abgeschwächten Lesart des Ausdrucks „know“ bei der Bewertung der Wissenszuschreibungen durch die Teilnehmer um ein reines Artefakt der speziellen Umfragesituation handelt, oder ob sich daraus Schlüsse über die generelle Funktionsweise von epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis ziehen lassen. Wenn ein solcher Sprachgebrauch von „know“ allein aufgrund dessen stattfindet, dass sich die Teilnehmer in den jeweiligen Szenarioprotagonisten hineinversetzen und sämtliche Fragen aus seiner Perspektive zum Bezugszeitpunkt der jeweiligen Frage heraus beantworten, oder er allein dadurch begründet ist, dass die Teilnehmer dem Szenariogeschehen von vornherein mit einer gewissen Skepsis begegnen, die eine Beantwortung der Fragen unter einer anderen Lesart von „know“ erschwert, so handelt es sich um ein Artefakt der speziellen Umfragesituation. Rückschlüsse auf die generelle Funktionsweise von epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis sind dann kaum möglich.

Gibt es aber andere plausible, systematische Gründe, so können die empirischen Ergebnisse von Stichprobenteilnehmern aus den betroffenen Clustern für die Analyse des Rechtfertigungsbegriffs der mathematischen Praxis, und somit der tatsächlichen Anwendungsbedingungen für ein (FKE) als Kriterium für epistemische Rechtfertigung, prinzipiell herangezogen werden. Bestimmte Rückschlüsse auf Rechtfertigungsstandards, wie im Fall von Cluster 1 und 2 zu Szenario 1 auf die erlaubte Fallibilität von rechtfertigenden mathematischen Beweisen, lassen sich aber nur ziehen, wenn der Ausdruck „know“ durch den Antwortenden wenigstens im Sinne von „gerechtfertigt überzeugt sein, dass“ und nicht nur im Sinne von „überzeugt sein, dass“ interpretiert worden ist. In letzterem Fall würde durch die Beantwortung der Frage „Does X know that p is true?“ bezogen auf eine bestimmte Situation lediglich bewertet, ob die Umstände derart beschaffen sind, dass sie beim epistemischen Subjekt einen überzeugungsbildenden Prozess in Gang setzen, der bewirkt, dass X glaubt, dass p wahr ist. Später bekannt werdende, für den Status des *gerechtfertigten* Überzeugtseins relevante Aspekte, zu denen das epistemische Subjekt in der bewerteten Situation aber keinen Zugang hat, können diesen Prozess nicht rückwirkend aufhalten. Demnach wäre hier der in der Deutung von Cluster 1 und 2 vorgeschlagene Schluss von dem spezifischen Antwortverhalten auf Relevanz des Gegenbeispiels als übertrumpfendem Anfechtungsgrund nicht mehr zwingend.[281]

[281] Statt der Erklärung:

Eine möglicherweise über die Zeitrelativität und Fallibilität von Rechtfertigung durch mathematische Beweise hinausgehende, prinzipielle Kontextabhängigkeit der epistemischen Standards in der mathematischen Praxis würde dabei die bereits in Kapitel 2 aufgestellte und analytisch begründete These weiter empirisch stützen, dass eine naive internalistisch-invariantistische philosophische Theorie[282] epistemisch gerechtfertigter mathematischer Überzeugungen nicht dem in der mathematischen Praxis im Rahmen von epistemischen Zuschreibungen verwendeten Konzept mathematischer Rechtfertigung entspricht:[283] Demnach wäre zumindest der Rechtfertigungsbegriff entsprechend kontextsensitiv, etwa im Sinne einer semantisch-kontextualistischen Analyse, zu konzipieren.

3.4.2 Zu Ausgangsfrage 2: Wissen-dass und Wissen-warum

Die in einigen Freitextkommentaren zu Szenario 3 verwendete Unterscheidung von „Wissen-dass" und „Wissen-warum" deutet darauf hin,[284] dass es sich bei beweisbasiertem mathematischen Wissen, welches also aufgrund eines dem epistemischen Subjekt zugänglichen Beweises besteht, nicht nur um ein Wissen-dass, sondern in den meisten Fällen der mathematischen Forschungspraxis auch notwendigerweise um ein Wissen-warum handeln könnte. Einige dieser Kommentare weisen zudem Wissen-warum vor Wissen-dass als das eigentliche Ziel tatsächlicher mathematischer Forschung aus.

Die Frage nach der Bestätigung und Präzisierung der Vermutung, dass Wissen-warum einerseits eine notwendige Bedingung für beweisbasiertes mathematisches Wissen-dass bildet, und andererseits auch ein eigenständiges, über Wissen-dass hinausgehendes Erkenntnisziel darstellt, stellt die zweite konkrete Ausgangsfrage für die Interviewstudie dar. Gemäß den Überlegungen zu (H2) liefern dabei die im Rahmen von (FKE_4) diskutierten philosophischen Konzepte mathematischer Fähigkeiten und Professionsstufen[285] einen theoretisch-begrifflichen Hintergrund, um die Rede von „Wissen-warum" im Zu-

> QJones8 konnte *trotz einer positiven Antwort auf QJones7* wie QJones6 positiv beantwortet werden, weil John der übertrumpfende Anfechtungsgrund in Form des (vermeintlichen) Gegenbeispiels zum Bezugszeitpunkt t_{in} von QJones8 noch nicht bekannt war und sein zu diesem Zeitpunkt vorliegender Beweis für JC seine Überzeugung, dass JC, rechtfertigen kann, obwohl er vermutlich nicht korrekt ist,

müsste es in diesem Fall nämlich heißen:

> QJones8 musste *unabhängig von der Antwort auf QJones7* positiv beantwortet werden, *weil* QJones6 positiv beantwortet wurde.

[282] Vgl. Abschnitt 2.2.
[283] Vgl. Abschnitt 2.3.1.
[284] Vgl. die Interpretation der Clusterergebnisse in Bezug auf (H2), S. 133 f.
[285] Vgl. S. 61.

sammenhang mit epistemischen Zuschreibungen und beweisbasiertem mathematischem Wissen anhand vertiefender empirischer Ergebnisse genauer zu analysieren:[286]

Ausgangsfrage 2

> Welche Rolle spielt eine Unterscheidung eines reinen „Wissen-dass“ und eines „Wissen-warum“ in Bezug auf die Erkenntnisziele mathematischer Forschungspraxis, und schlägt sich dies gegebenenfalls in der Relevanz mathematischer Fähigkeiten des epistemischen Subjekts für die Bewertung epistemischer Zuschreibungen nieder?

Die Bedeutung dieser Frage wird besonders im Hinblick auf den Analysegegenstand der ursprünglichen Forschungsfrage der vorliegenden Arbeit ersichtlich: Eine philosophisch befriedigende Antwort darauf soll klären, ob eine geeignete Spezifikation der hier aus den Kommentaren der Umfrageteilnehmer *ad hoc* übernommenen Sprechweise von mathematischem Wissen-warum vs. Wissen-dass relevant für eine sozio-empirisch informierte Konzeption von mathematischem Wissen und epistemischer Rechtfertigung in erkenntnistheoretischem Sinne ist. Damit ist gegebenenfalls eine Begründung für die Einbindung epistemisch relevanter mathematischer Fähigkeiten und Professionsstufen des epistemischen Subjekts in die Formulierung einer sozio-empirisch informierten Lesart von (FKE) verbunden, die aufgrund der Tatsache, dass (FKE) ein Kriterium für propositionales Wissen und epistemische Rechtfertigung darstellt, nicht selbstverständlich ist.

3.4.3 Zu Ausgangsfrage 3: Formale Beweise und Formalisierbarkeit

Ich habe in der Umfragestudie nicht explizit untersucht, was praktizierende Mathematiker selbst unter einem formalisierbaren mathematischen Beweis verstehen, ob eine stabile Sprechweise von „formalisierbar“ in der mathematischen Praxis überhaupt existiert, und wie Mathematiker gegebenenfalls die Relevanz formalisierbarer Beweise für epistemische Zuschreibungen bewerten. Vor dem Hintergrund der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Interpretation der Umfrageergebnisse, nach der die in Fragebogenteil II geäußerten Definitionsvorschläge für „mathematischer Beweis“ in weiten Teilen mit dem normativen Ideal[287] einer korrekten formallogischen Ableitung aus grundlegenden mathematischen Axiomen übereinstimmen, positive Wissenszuschreibungen in Teil III aber auch aufgrund informeller, im Detail nicht korrekter oder bloß skizzenhafter Beweise getätigt wurden,

[286] In der Formulierung von Ausgangsfrage 2 wird „Wissen-dass“ und „Wissen-warum“ aber noch als aus den Freitextkommentaren der Umfrageteilnehmer *ad hoc* übernommene Sprechweise verwendet, vgl. Fußnote 267.

[287] Vgl. Abschnitt 3.3.1, S. 129.

führt dieser Fragenkomplex nun zur dritten theoretischen Ausgangsfrage für die vertiefende Interviewstudie:

Ausgangsfrage 3

> Was verstehen praktizierende Mathematiker unter formalen und formalisierbaren Beweisen, und wie bewerten sie deren Relevanz in Bezug auf epistemische Zuschreibungen in der mathematischen Praxis?

Die Interpretation der Clusterergebnisse in Bezug auf (H3)[288] sowie die Überlegungen zur Unterscheidung von Wissen-dass und Wissen-warum, die zu Ausgangsfrage 2 geführt haben, deuten an, dass gerade ein geeignet spezifizierter Formalisierbarkeitsbegriff eine philosophisch aufschlussreiche theoretische Verbindung zwischen der Deutung der Umfrageergebnisse zum Gebrauch epistemischer Zuschreibungen und der Deutung der Definitionsvorschläge zum abstrakten Beweisbegriff schaffen könnte.

Die Antwort auf Ausgangsfrage 3 sollte idealerweise konkretere Ansätze dafür liefern, wie im Rahmen einer empirisch informierten philosophischen Analyse der epistemischen Relevanz von Formalisierbarkeit ein Formalisierbarkeitsbegriff für mathematische Beweise spezifiziert werden kann, als dies bisher aufgrund der Umfrageergebnisse möglich ist. Einerseits sollte ein solcher Formalisierbarkeitsbegriff die Akzeptanzkriterien für Beweise, die die Grundlage positiver Bewertungen von Wissenszuschreibungen bilden, adäquat abbilden. Andererseits sollte auch das Verhältnis zwischen in diesem Sinne formalisierbaren mathematischen Beweisen und solchen, die abstrakt-normativen Auffassungen praktizierender Mathematiker von mathematischen Beweisen entsprechen, deutlich werden.

3.4.4 Zu Ausgangsfrage 4: Formalisierbarer Beweis und akzeptabler Beweis

In den Freitextkommentaren der Umfragesstudie wird der Ausdruck „formalisierbar“ tatsächlich nicht verwendet. Dies legt aufgrund der Erfahrungen aus Fragebogenteil II der Umfragestudie die Vermutung nahe, dass eine empirische Untersuchung zum Begriff des formalisierbaren mathematischen Beweises gegebenenfalls gewisse abstrakte, normative Auffassungen abbilden mag, aber nicht die tatsächlichen Akzeptanzkriterien für Beweise, die positiven epistemischen Zuschreibungen zugrunde liegen, erfassen wird. Ergänzend zu Ausgangsfrage 3 bezieht sich Ausgangsfrage 4 daher auf die für epistemische Zuschreibungen relevanten Charakteristika *akzeptabler* mathematischer Beweise. Dabei geht es insbesondere um Unterschiede zu formalen, zu gemäß den in Kapitel 2 diskutierten Lesarten von (FKE) formalisierbaren und gegebenenfalls auch zu gemäß den Ergebnissen

[288] Vgl. S. 135.

zu Ausgangsfrage 3 formalisierbaren Beweisen. Erste relevante Charakteristika wären gemäß der vorläufigen Interpretation der Umfrageergebnisse in Bezug auf (H1)[289] Fallibilität und Kontextabhängigkeit der Standards für akzeptable Beweise. Ich frage hier insbesondere nach der spezifischen Rolle einzelner, von den Teilnehmern der Umfragestudie benannter kontextueller Faktoren wie Zeitrahmen, Komplexität des Beweises, Größe der bereichsspezifischen mathematischen *community*, mathematische Relevanz der in Frage stehenden mathematischen Aussage p, mathematisches Themengebiet von p und Arbeitsgewohnheiten des epistemischen Subjektes:[290]

Ausgangsfrage 4

> Was sind die für epistemische Zuschreibungen relevanten Charakteristika akzeptabler informeller Beweise, und welche Rolle spielen dabei spezifische kontextuelle Faktoren?

Während in Ausgangsfrage 1 nach Gründen für eine möglicherweise vorliegende prinzipielle Fallibilität mathematischer Beweise und prinzipielle Kontextabhängigkeit epistemischer Standards der mathematischen Praxis gefragt wird, geht es hier also vor allem um die Rolle spezieller kontextueller Faktoren, die für die Bewertung von epistemischen Zuschreibungen aufgrund eines vom epistemischen Subjekt erbrachten Beweises berücksichtigt werden.

Die genauere Beantwortung dieser vier Ausgangsfragen auf Grundlage der Ergebnisse der im nachfolgenden Kapitel 4 vorgestellten Interviewstudie soll zu einem präziseren Verständnis der Kriterien für Zuschreibungen beweisbasierten Wissens und beweisbasierter Rechtfertigung in der mathematischen Praxis führen. Dieses wird die Basis für den in Kapitel 5 angestellten Vergleich der empirischen Ergebnisse mit den Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7) aus Kapitel 2 und die daraufhin vorgeschlagenen sozio-empirisch informierten Lesarten von (FKE) darstellen.

[289] Vgl. S. 130 f.
[290] Vgl. S. 132.

4 Eine Interviewstudie zur Verwendung epistemischer Begriffe in der mathematischen Praxis

In diesem Kapitel stelle ich eine qualitative Interviewstudie zum Wissens- und Beweisbegriff der mathematischen Praxis vor. Diese Studie wurde als Vertiefungsstudie vor dem Hintergrund der vier in Kapitel 3 Abschnitt 3.4 formulierten Ausgangsfragen konzipiert. Ihre Ergebnisse dienen also unter anderem dazu, die in Abschnitt 3.3 vorgeschlagene Interpretation der Umfrageergebnisse zu prüfen und gegebenenfalls weiter zu vertiefen. Das Kapitel ist wie folgt strukturiert: Analog zu Kapitel 3 beschreibe und diskutiere ich im erster Abschnitt 4.1 Methode und Forschungsdesign der Interviestudie, d.h. das Erhebungsverfahren, das Auswertungsverfahren, den Aufbau des Interviewleitfadens und die Auswahl der Interviewpartner. Im zweiten Abschnitt 4.2 analysiere und interpretiere ich ausgewählte Interviewsequenzen. Diese Analyse orientiert sich insofern systematisch an den vier theoretischen Ausgangsfragen aus Abschnitt 3.4 (die in den Interviews nicht explizit gestellt wurden, vgl. Abschnitt 4.1.2), als jeweils für eine Ausgangsfrage besonders relevanten Zitate zusammengestellt und in diesem Zusammenhang auch interpertiert werden. Dabei greifen Darstellung, philosophische Analyse und Interpretation der empirischen Ergebnisse stark ineinander (vgl. Abschnitt 4.1.4). Im dritten und letzten Abschnitt 4.3 des Kapitels schlage ich als Ergebnis der philosophischen Analyse der empirischen Ergebnisse aus Umfrage- und Interviewstudie eine abstrakte Charakterisierung beweisbasierter epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis anhand einer Reihe von Einzelaspekten vor. Diese Aspekte dienen in Kapitel 5 als Grundlage für einen Vergleich mit den analytisch diskutierten Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7) aus Kapitel 2 und den anschließend dargestellten Entwurf zweier sozio-empirisch informierter Lesarten von (FKE).

4.1 Methode und Forschungsdesign

4.1.1 Erhebungs- und Aufbereitungsverfahren

Die von mir durchgeführte Interviewstudie lässt sich in Bezug auf das verwendete Erhebungsverfahren als *problemzentrierte Interviewstudie* beschreiben. Dabei handelt es sich um ein Erhebungsverfahren der qualitativen Sozialforschung in Form einer „offenen, halbstrukturierten Befragung“,[291] das wie folgt genauer charakterisiert wird:

> „Das Interview lässt den Befragten möglichst frei zu Wort kommen, um einem offenen Gespräch nahe zu kommen. Es ist aber zentriert auf eine bestimmte Problemstellung, die der Interviewer einführt, auf die er immer wieder zurückkommt. Die Problemstellung wurde vom Interviewer bereits vorher analysiert; er hat bestimmte Aspekte erarbeitet, die in einem Interviewleitfaden zusammengestellt sind und im Gesprächsverlauf von ihm angesprochen werden.“[292]

Trotz der offenen Interviewsituation, die dem Interviewpartner die Möglichkeit zur freien Antwort ohne Antwortvorgaben sichert, was wiederum Grundlage für eine qualitative Analyse der Interviewergebnisse ist, ermöglicht die Verwendung eines Interviewleitfadens dabei eine gewisse Standardisierung, um die Vergleichbarkeit der verschiedenen Interviews zu sichern. Durch die Einbettung in das iterative Drei-Schritte-Programm DSP müssen meine empirischen Studien natürlicherweise stark theoriegeleitet durchgeführt werden.[293] Eine problemzentrierte Interviewstudie mit strukturierten Leitfadeninterviews bieten sich daher als theoriegeleitetes qualitatives Erhebungsverfahren besonders an, da das problemzentrierte Interview „keinen rein explorativen Charakter hat, sondern die Aspekte der vorrangigen Problemanalyse in das Interview Eingang finden“.[294]

Die Interviews wurden mithilfe einer geeigneten Audiosoftware aufgezeichnet, über relevante non-verbale Äußerungen der Interviewpartner wie Gestik und Mimik habe ich während der Interviews teilweise Protokoll geführt (in den Transkiptionen in eckigen Klammern notiert). Vor dem Start der eigentlichen Interviewserie wurde der Leitfaden in drei Probeinterviews getestet.[295]

Die Aufbereitung der Interviews erfolgte in einem ersten Schritt durch wörtliche Transkription ausgewählter Interviewabschnitte (vgl. zur Auswahl der transkribierten Interviewsequenzen die nachfolgenden Abschnitte 4.1.2 und 4.1.4) unter Verwendung der Stan-

[291] Mayring [92, S. 67].
[292] ebd.
[293] Vgl. Abschnitt 1.3.3, S. 20 ff.
[294] [92, S. 70].
[295] Die Probeinterviews habe ich mit Doktorandinnen und Doktoranden der Mathematik und mathematischen Physik aus Mainz und Köln durchgeführt.

dardorthographie des Englischen; die Transkriptionen sind im Anhang dieser Arbeit zu finden. Stellen, die in der Audioaufzeichnung nicht deutlich zu verstehen waren, habe ich in den Transkriptionen durch „(undeutlich)“ gekennzeichnet und, falls möglich, sinngemäß in eckigen Klammern ergänzt. Von den Interviewpartnern verwendete Eigennamen wurden durch geeignete anonyme Ausdrücke in eckigen Klammern ersetzt. Einzelne Stellen, die eventuelle Rückschlüsse auf die Identität der interviewten Person zuließen, wurden in der Transkription ausgelassen oder geeignet sinngemäß abgewandelt, um die Anonymität zu gewährleisten. Solche Auslassungen oder Abwandlungen sind dort durch eckige Klammern und den Zusatz „(anonymisiert)“ gekennzeichnet. Besonders betont gesprochene Stellen oder Worte wurden in der Transkription durch Kursivsatz hervorgehoben.

Eine Rückabstimmung mit den jeweiligen Interviewpartnern und eine anschließende Überarbeitung der zur Interpretation ausgewählten Zitate wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt. Die in der folgenden Analyse verwendeten Zitate aus den Interviews wurden in einem zweiten Aufbereitungsschritt lediglich ins normale Schriftenglisch übertragen und dabei in Bezug auf Flexion, Satzbau oder Vokabular teilweise korrigiert, um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten. Weiterhin wurden, wiederum in eckigen Klammern, Ergänzungen und Ersetzungen vorgenommen, die für das Verständnis der aus dem Gesamttext herausgeschnittenen Zitate wesentlich sind.[296] So wurden etwa Pronomina, z.B. „he“ oder „it“, durch das jeweilige Bezugswort, z.B. „John“ oder „formal proof“, ersetzt. Bereits in den Transkriptionen vorgenommene Ergänzungen und Ersetzungen wurden, ebenfalls in eckigen Klammern, übernommen.

Die einzelnen Zitate, die durch Anführungszeichen voneinander getrennt sind, behandle ich bei der Interpretation als Sinnabschnitte. So kommt es vor, dass in der Transkription direkt aufeinanderfolgende Textstellen in zwei Zitate aufgespalten sind, während in einem anderen Fall zwei entferntere Textstellen zu einem Zitat zusammengefügt wurden; Auslassungen habe ich dabei mit „[. . .]“ gekennzeichnet. Die den einzelnen Zitaten – unter Umständen mit einigem Abstand – jeweils vorangegangene Leitfadenfrage bzw. *Ad Hoc*-Zwischenfrage ist jeweils in Klammern und hervorgehoben durch Kursivsatz mit angegeben.[297] Im Falle von einfachen *Ad Hoc*-Nachfragen zu einer Leitfadenfrage, die sich im Gesprächsverlauf meinerseits zur direkten Klärung oder weiteren Ausführung der Antworten der Interviewpartner ergeben haben, gebe ich jedoch nur die vorangegangene Leitfadenfrage an. Es kommt vor, dass zu einer Leitfadenfrage mehrere Stellen aus der Antwort des Interviewpartners zitiert werden. Werden diese Zitate unmittelbar hinter-

[296] Ich verweise jeweils auf die entsprechende Stelle im transkribierten Volltext in Anhang C.
[297] Bei starken Abweichungen vom Wortlaut des Leitfadens gebe ich den Wortlaut der im Interview verwendeten Formulierung an.

einander aufgeführt, so weise ich darauf der Lesbarkeit halber durch den Vermerk „Weiter zu: *Frage*“ hin. Werden unterschiedliche Zitate aus einer Antwort jedoch in verschiedenen Abschnitten der Analyse verwendet, wiederhole ich die zugehörige Leitfadenfrage jeweils ohne weiteren Hinweis.[298]

Zur einfachen und systematischen Zitation wurden außerdem die Siglen Int 1 bis Int 6 für die sechs verschiedenen Interviews eingeführt. Jedem Zitat ist als Referenz die entsprechende Sigle sowie die Seitenzahl zu der (den) entsprechenden Stelle(n) der in Anhang C abgedruckten Transkription beigefügt. Im Unterschied zu Kapitel 3 wurden die einzelnen Zitate jedoch nicht fortlaufend durchnummeriert. Dies liegt unter anderem daran, dass eine Referenzierung auf einzelne Zitate aufgrund des speziellen Auswertungsverfahrens ohnehin nicht systematisch, sondern nur stellenweise bei Bedarf erfolgt. Darüber hinaus sollte eine Durchnummerierung nicht den falschen Eindruck entstehen lassen, dass es sich bei den Zitaten um in ähnlichem Maße voneinander unabhängige Kommentare handelt, wie dies bei den Freitextkommentaren aus der Umfragestudie der Fall ist: Auf der ersten Interpretationsebene wird im Folgenden jeweils eine thematische Auswahl von Zitaten aus nur einem Interview analysiert. Die einzelnen Zitate bilden dabei zwar gewisse Sinnabschnitte, sie sind aber dennoch inhaltlich aufeinander bezogen, und die thematischen Grenzen sind selten scharf; sie können daher meist nicht als eigenständige Interpretationseinheiten angesehen werden.

4.1.2 Aufbau des Interviewleitfadens

Die Interviews starteten mit einem geschlossenen Fragenteil, in dem die vier in der vorangegangenen Umfragestudie verwendeten Szenarien durchgespielt wurden. Die Interviewpartner beantworteten dabei dieselben Fragen wie die Teilnehmer der Umfragestudie, auch das Szenariogeschehen wurde ihnen in gleicher Weise sequentiell erzählt.[299] Dieser Teil diente der Einordnung der Interviewpartner in Bezug auf die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Cluster der Umfragestudie. Die Möglichkeit zu freien Kommentaren wurde den Interviewpartnern, anders als in der Umfragestudie, erst nach Abschluss aller vier Szenarien eingeräumt und gehörte bereits zum nachfolgenden offenen Interviewteil.

Der offene Interviewteil wurde durch einen dreigliedrigen Leitfaden strukturiert. Dieser Leitfaden orientierte sich thematisch an den in Kapitel 3 erarbeiteten vier theoretischen Ausgangsfragen für die Interviewstudie, ohne dass diese selbst explizit gestellt wurden:[300]

[298] Die Einbettung des jeweiligen Zitats in die gesamte Antwort auf die vorangegangene Leitfadenfrage kann dann bei Bedarf in Anhang C nachgelesen werden.

[299] Die Interviewpartner konnten im Unterschied zu den Umfrageteilnehmern jedoch nicht unbemerkt „zurückblättern“.

[300] Vgl. Abschnitt 3.4.

Der erste Teil enthielt Sondierungsfragen, um in das jeweilige Thema einzuführen und herauszufinden, welche subjektive Bedeutung das Thema für die interviewte Person besitzt. Der zweite Teil enthielt die allgemeinen Leitfadenfragen zu wesentlichen thematischen Aspekte, die in den Interviews angesprochen werden sollten. Sowohl Sondierungs- als auch Leitfadenfragen wiederholten sich in jedem Interview mehr oder weniger im gleichen Wortlaut. Je nach Gesprächsverlauf wurden die Fragen in unterschiedlicher Reihenfolge gestellt; in der Regel wurde jedoch keine Frage ausgelassen. Die Standardisierung der Fragen im allgemeinen Leitfaden sicherte wie schon erwähnt die Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Dazu gehörte auch ein Grundstock an vorformulierten *Ad Hoc*-Fragen, die optional einsetzbar waren, wenn bestimmte Themenbereiche, zu denen der allgemeine Leitfaden hinführen sollte, vom Interviewpartner selbst dennoch ganz ausgelassen wurden, oder wenn Themen, die nicht im Leitfaden sondern vom Interviewpartner selbst angesprochen wurden, mehr Strukturierung erfahren sollten. Darüber hinaus gab es in einem dritten Leitfadenteil einige personenspezifische Fragen zu speziellen Aspekten, die aufgrund der Auswahl der jeweiligen Interviewpartner interessant waren. Diese Fragen waren ebenfalls vom Interviewer optional einsetzbar, falls der Interviewpartner selbst die entsprechenden Punkte ganz ausließ.[301] Im Folgenden diskutiere ich die einzelnen Fragen aus dem ersten und zweiten Leitfadenteil und ihren Bezug zu den theoretischen Ausgangsfragen der Interviewstudie genauer.

Der erste Teil des Interviewleitfadens enthielt sechs Sondierungsfragen und drei *Ad Hoc*-Fragen. Die ersten beiden Sondierungsfragen

- Do you have any comments on the scenarios?
- Did you ever experience a similar scenario?

dienten einer Annäherung an die Themen von Ausgangsfrage 1 und 2,[302] da die Bemerkungen der Umfrageteilnehmer zu ihrer Lesart des Ausdrucks „know" in „Does X (at t) know that p is true?" sowie die Redeweise von „knowing that" und „knowing why" gerade in den Freitextkommentaren zu den vier Szenarien vorkamen. Die übrigen vier Sondierungsfragen (und auch die drei *Ad Hoc*-Fragen) sprechen zwei für die Ausgangsfragen 3 und 4 relevante Themen an,[303] die Bedeutung der Ausdrücke „formaler Beweis" und „formalisierbarer Beweis" und das Verhältnisses zwischen formalisierbaren und akzeptierten Beweisen in der mathematischen Praxis:

[301] Die Ergebnisse aus den Interviews sind anonymisiert; dennoch werde ich, sofern notwendig, an den entprechenden Stellen auf für die Analyse relevante personenspezifische Aspekte – wie etwa das spezielle Fachgebiet oder Besonderheiten zum Werdegang – hinweisen. Vgl. auch den folgenden Abschnitt 4.1.3.

[302] Vgl. für die genaue Formulierung der Ausgangsfragen S. 139 und 142.

[303] Vgl. für die genaue Formulierung der Ausgangsfragen S. 143 und 144.

- Is formal proving important in any of these scenarios?
- What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?
- What would you call a formalizable proof?
- Would you say that most or even all mathematical proofs are formalizable?
- *Ad Hoc*-Fragen dazu:
  - Would you call non-formalizable proofs still rigorous?
  - Do you know any examples of proofs that are not formalizable?
  - What do you think about the proof of the classification of finite simple groups in this context?

Der zweite Teil des Interviewleitfadens befasste sich einerseits mit dem Antwortverhalten des jeweiligen Interviewpartners in Bezug auf die zu Beginn des Interviews abgefragten Umfrageszenarien. Andererseits sollten die Interviewpartner einzelne Ergebnisse aus der Umfragestudie, die die vier theoretischen Ausgangsfragen für die Interviewstudie in besonderem Maße motiviert haben, kommentieren. Ich werde mich in meiner Analyse auf Interviewzitate zu den Leitfadenfragen beschränken, die sich auf Szenario 1 beziehen;[304] entsprechend stelle ich hier nur die Leitfadenfragen zu Szenario 1 vor.

Die Einstiegsfragen zu den einzelnen Szenario-Besprechungen zielten jeweils auf abstraktere, allgemeinere Fragestellungen im Zusammenhang mit den konkret geschilderten Situationen. Im Falle von Szenario 1 ging es um institutionalisierte, prinzipiell fallible Bewertungsmechanismen der wissenschaftlichen mathematischen Praxis, die im konkreten Fall über die Akzeptanz oder Zurückweisung eines Beweises entscheiden, wie z.B. der Begutachtungsprozess bei Zeitschriftenartikeln. Ein weiteres Thema des Szenarios waren die Rolle von Gegenbeispielen für die Begründung mathematischen Wissens:

- A more abstract issue behind scenario 1 is that of refereed proof and counterexamples as warrants for mathematical knowledge. What are your comments on this issue?
- Would your answers have changed for this scenario if the journal proof would have been a formal derivation, maybe computer-checked instead of peer reviewed?
- Would you say that a correct proof is not necessary for knowledge (maybe because one cannot be sure that a proof is correct, and refereed proof is the best one can get)?

[304] Vgl. zur Auswahl der ausgewerteten Interviewsequenzen Abschnitt 4.1.4.

- Would you say that a counter-example is a better warrant for knowledge than a direct proof?

Diese Fragen sind aufgrund des angesprochenen Fallibilitätsaspekts für Ausgangsfrage 1 und aufgrund des Vergleichs der Begutachtung informeller Beweise mit der computergestützten Überprüfung formaler Beweise für die Ausgangsfragen 3 und 4 relevant. Die Frage nach der Rolle von Gegenbeispielen im Unterschied zu deduktiven Beweisen ist dagegen vor allem für Ausgangsfrage 2 von Bedeutung.[305]

Die folgenden Fragen sind insbesondere in Bezug auf Ausgangsfrage 1 relevant. Die ersten drei Fragen betreffen die Deutung der Szenariofragen durch die Teilnehmer der Umfragestudie, insbesondere hinsichtlich der Perspektivwahl bei der Beantwortung.[306] Die vierte Frage spricht den durch das Antwortverhalten von Cluster 1 zu Szenario 1 vermeintlich verletzten Faktivitätsbegriff an:[307]

- A number of participants from the survey study answered in the following way:
  - John knows that JC is true (asked before the talk): positive
  - John knows that JC is false (asked after the talk): positive
  - John knew that JC was true before attending the talk (asked after the talk): positive

  But there was also a group of people who answered this way:
  - John knows that JC is true (asked before the talk): positive
  - John knows that JC is false (asked after the talk): positive
  - John knew that JC was true before attending the talk (asked after the talk): negative

  Would you say these answers are both consistent? Why, why not?

- Would you briefly explain your own answers?

- Whose point of view did you take while answering?

[305]Vgl. die Diskussion in Abschnitt 3.4.2. Gegenbeispiele zeigen zwar, dass eine bestimmte allgemeine mathematische Aussage falsch ist, sie klären jedoch in der Regel nicht, in welcher logischen Beziehung diese Aussage zu anderen mathematischen Theoremen in ihrem inhaltlichen Umfeld steht. Im Falle von Szenario 1 zeigt das Gegenbeispiel auch nicht, wo genau der Fehler in Johns ursprünglichem Beweis von JC liegt (vgl. für die genaue Szenariobeschreibung S. 96 f.). Ist also die von Ausgangsfrage 2 aufgegriffene Sprechweise der Umfrageteilnehmer von „Wissen-warum“ im Unterschied zu „Wissen-dass“ in diesem Sinne gemeint, so erzeugen Gegenbeispiele in der Regel kein „Wissen-warum“.

[306]In der ersten Frage wird das Antwortverhalten von Cluster 1 dem von Cluster 3 zu Szenario 1 gegenübergestellt, vgl. S. 98.

[307]Vgl. jeweils die Diskussion zu Ausgangsfrage 1 in Abschnitt 3.4.1.

- Would you say that truth is not necessary for knowledge?

Die letzte Frage des zweiten Leitfadenteils:

- One participant of the survey study gave the following comment: *How important is the Jones Conjecture? How large is the community?* What do you think about this?

betrifft spezifische, von den Teilnehmern der Umfragestudie genannte kontextuelle Faktoren für die Beurteilung der zu beurteilenden Wissenszuschreibungen, und damit insbesondere einen Aspekt von Ausgangsfrage 4.[308]

4.1.3 Auswahl der Interviewpartner

Die Auswahl der zu interviewenden Personen für strukturierte Leitfadeninterviews wird stets durch die zugrundeliegende Fragestellung und das dazugehörige theoretische Vorverständnis des Untersuchungsgegenstandes motiviert.[309] In meinem Fall, also der Untersuchung der Zuschreibungsbedingungen für beweisbasiertes Wissen und beweisbasierte Rechtfertigung in der mathematischen Praxis und der zugehörigen Rolle von Formalisierbarkeit als Eigenschaft informeller Beweise, war bei der Auswahl der Interviewpartner eine gewisse Breite der vertretenen mathematischen Spezialgebiete entscheidend. Die geforderte Breite betraf auch andere Faktoren wie das Land, in dem die Interviewpartner den Großteil ihrer universitären mathematischen Ausbildung genossen haben, ihre akademische Zugehörigkeit (Universität oder freie Forschungseinrichtung), ihr Alter, ihr Geschlecht[310] und das Land, in dem sie heute lehren und forschen. Hier liegt die Vermutung zugrunde, dass gerade Beweisstile und -standards von Fachgebiet zu Fachgebiet und von Land zu Land variieren.

4.1.4 Auswertungsverfahren

Hinsichtlich des für die Darstellung benötigten Raumes als auch des zeitlichen Aspekts der Auswertung war im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Eingrenzung der auszuwertenden Daten erforderlich: Die Dauer der Interviews lag jeweils zwischen eineinhalb und zweieinhalb Zeitstunden. Diese Datenmenge habe ich bereits bei der Aufbereitung

[308]Vgl. die Diskussion zu Ausgangsfrage 4 in Abschnitt 3.4.4.
[309]Vgl. Abschnitt 4.1.1.
[310]Der Lesbarkeit halber und um die Anonymität bestmöglich zu wahren, spreche ich im Folgenden aber immmer von *dem Mathematiker* bzw. *dem Interviewpartner*, auch wenn es sich dabei um eine Mathematikerin handelt.

durch Transkription auf ausgewählte, in Bezug auf die vier in Abschnitt 3.4 formulierten theoretischen Ausgangsfragen besonders relevante Interviewabschnitte eingegrenzt. Methodisch ist dabei von Bedeutung, dass die Interviewteilstücke nicht mitten aus den Interviews herausgegriffen wurden. Interviewteilstücke einzeln zu analysieren, die aus dem laufenden Interview herausgeschnitten sind, würde die Gefahr bergen, die Ergebnisse zu verfälschen. Die Analyse würde dann schließlich nur von dem ausgewählten Teilstück ausgehen und anhand dieses Teilergebnisses Rückschlüsse auf gewisse Einstellungen der Interviewpartner tätigen. Ist dem analysierten Teilstück aber schon ein anderer Interviewteil vorausgegangen, so ist es wahrscheinlich und kann in jedem Fall nicht ohne weiteres ausgeschlossen werden, dass sich die Einstellungen der interviewten Person im Laufe des Interviews bereits geändert haben. Im Extremfall hat die interviewte Person vor dem Interview noch nie explizit über das Interviewthema nachgedacht oder diskutiert, so dass ihre jeweiligen Einstellungen zu einem Zeitpunkt während des Interviews zumindest reflektierter sind als im ursprünglichen Zustand. Solche Einstellungsveränderungen sind zwar prinzipiell schwer zu kontrollieren, können aber durch die Betrachtung des vorangegangenen Interviewverlaufs genauer beobachtet werden. Aus diesem Grund berücksichtige ich bei der Auswertung und Analyse die Ergebnisse aus dem geschlossenen Fragebogenteil sowie die Antworten der Interviewpartner auf die Sondierungsfragen und die allgemeinen Leitfadenfragen (sowie ggf. die zugehörigen *Ad Hoc*-Fragen) zu Szenario 1.[311]

Als Auswertungsverfahren bieten sich aus der Fülle der möglichen Analysetechniken der Qualitativen Sozialforschung besonders die phänomenologische Analyse und die qualitative Inhaltsanalyse an. Eine phänomenologische Analyse als soziologische Methode will zum Wesen des untersuchten Gegenstandes durch Analyse subjektiver Sichtweisen und Bedeutungsstrukturen in Bezug auf eine hinreichende Variation einzelner Phänomene vordringen.[312] Diese Methode passt sich Gegenstand und Fragestellung meiner empirischen Studien dem Grundgedanken nach gut an, da es um eine Analyse epistemischer Begrifflichkeiten der mathematischen Praxis geht, zu denen der Zugang über die subjektive Verwendung epistemischer Zuschreibungen in verschiedenen Szenarien gewonnen werden soll. Dass die Kriterien für letzteres subjektiv und kontextuell variieren, jedoch einen invarianten Kern zu besitzen scheinen, zeigen die Ergebnisse der Clusteranalyse der quantitativen Umfragestudie; diese lassen auch erste Schlüsse auf Invarianten zu.

[311]Vgl. Abschnitt 4.1.2. Dies entspricht jeweils etwa den ersten 10 bis 15 Minuten der Interviews. Eine Ausnahme bildet Interview 4: Die Qualität der Audioaufnahme dieses Interviews ließ im Laufe der ersten zehn Minuten des freien Interviewteils so stark nach, dass eine Transkription nicht mehr möglich war. Daher beschränkt sich das auswertbare Material hier auf die ersten Minuten des Leitfadenteils.

[312]Vgl. Mayring [92, S. 107 ff.].

Die Interviewstudie sollte in diesem Sinne vor allem die Invarianten genauer herausarbeiten, etwa die in Abschnitt 2.3.3 diskutierten vereinheitlichenden Prinzipien situativ verschieden zu bestimmender epistemischer Parameter. Da die Auswertung meiner empirischen Studien, wie in Abschnitt 4.1.1 bereits erwähnt, theoriegeleitet erfolgen muss, läge wegen ihres für eine „theoriegeleitete Bearbeitung von Textmaterial“[313] gut geeigneten, stark systematisierten Vorgehens auch die Wahl der qualititativen Inhaltsanalyse als Analysewerkzeug nahe. Aufgrund der dafür notwendigen induktiven Entwicklung eines geeigneten Kategoriensystems zur systematischen Textanalyse stellt sie jedoch ein zwar ertragreiches, aber selbst für die Analyse der ausgewählten Anfangssequenzen der Interviews sehr aufwendiges Verfahren dar.[314] Ich habe mich daher am phänomenologischen Analyseverfahren orientiert.

Meine konkrete Umsetzung einer solchen phänomenologischen Analyse lässt sich dabei vielleicht nur als *phänomenologische Analyse im weiteren Sinne* beschreiben, die aber mit Verweis auf den philosophischen Schwerpunkt der Arbeit für eine fruchtbare Diskussion im Sinne von Schritt 3 meines Drei-Schritte-Programmes ausreichend ist. Sie orientiert sich an dem oben geschilderten phänomenologischen Grundgedanken, vereinfacht dabei aber einzelne Schritte im Ablaufplan des soziologischen Analyseverfahrens bzw. fasst Auswertungs- und (philosophische) Interpretationsschritte stärker zusammen. Eine phänomenologische Analyse im Sinne der Qualitativen Sozialforschung gliedert sich insbesondere explizit in folgende Schritte: 1.) „Diskrimination von Bedeutungseinheiten in Bezug auf das Phänomen“, 2.) „Interpretation der Bedeutungseinheiten“ und 3.) „Synthetisieren zu einer Gesamtaussage über das Phänomen“. Das „Arbeitsprinzip“ der beiden letztgenannten Schritte besteht in der „eidetischen Reduktion durch Variation“.[315] Die Auswertung und Interpretation der ausgewählten Interviewsequenzen gehen dabei Hand in Hand.[316]

Ich gehe bei meiner Analyse im Vergleich wie folgt vor: *In einem ersten Schritt* identifiziere ich die sogenannten Bedeutungseinheiten in den einzelnen Interviewtranskriptionen,

[313] [92, S. 121].
[314] Vgl. hierzu Mayring [92, S. 114 ff.] und [93].
[315] Übernommen aus Mayring [92, S. 110].
[316] Unter „eidetischer Reduktion“, ein Begriff der von Edmund Husserl entwickelten phänomenologischen Methode (vgl. z. B. Husserl [56]), wird ursprünglich eine Rückführung des faktisch Erlebten auf seinen Wesenskern, der dem Menschen durch sogenannte evidente Phänomene intuitiv zugänglich ist, verstanden. Bei der soziologischen Variante der eidetischen Reduktion geht es in erster Linie darum, einerseits den intuitiven subjektiven Zugang der Probanden zum Wesenskern des betrachteten soziologischen Phänomens zu nutzen, und durch die Variation von Fragen und Befragten andererseits offenbar nicht-wesentliche Aspekte wie die zufällige faktische Ausprägung des subjektiv Erlebten sowie Aspekte, die dem betrachteten Gegenstand nur in Bezug auf das betrachtende Subjekt zukommen, in der Analyse auszublenden.

also Textstellen, in denen der in der vorangegangenen Leitfadenfrage nachgefragte Untersuchungsgegenstand vom Interviewpartner direkt angesprochen wird und die diesbezüglich wichtige Schlüsselaussagen beinhalten.[317] Diese trage ich zunächst in entsprechend aufbereiteter Form[318] zusammen und schlage anschließend eine mögliche, philosophisch orientierte Interpretation der einzelnen Textstellen vor.

In einem zweiten Schritt strebe ich eine Reduktion subjektiv gefärbter Einzelergebnisse auf den Wesenskern des Untersuchungsgegenstandes an, indem ich von der spezifischen Interpretation verschiedener Ausschnitte jeweils eines Interviews zu allgemeineren Aussagen in Bezug auf die vier Ausgangsfragen der Interviewstudie übergehe. Hier wird von den Aussagen der Interviewpartner natürlicherweise bereits stark abstrahiert und ein größerer *philosophischer* Interpretationsspielraum ausgenutzt als im ersten Schritt.

Insbesondere den hier im Reduktionsschritt enthaltenen *Variationsschritt* habe ich aus Gründen der Aufwandreduzierung vereinfacht. Eine Variation geschieht hier in zweierlei Hinsicht: zum einen durch die bereits in dem von mir betrachteten Interviewabschnitt von einigen Interviewpartnern geleisteten Vergleich der unterschiedlichen Szenarien, zum anderen durch die spezielle Auswahl von Interviewpartnern mit verschiedenen professionellen Profilen. So werden in Bezug auf das Grundphänomen „konkrete Wissenszuschreibungen der Form 'Y schreibt X Wissen, dass p wahr ist, zu' in der mathematischen Praxis" Aspekte variiert, die unabhängig vom individuellen Wissenszuschreiber insbesondere das epistemische Subjekt X und den Zuschreibungskontext betreffen. Zusätzlich findet eine Variation in Bezug auf Aspekte, die ausschließlich den Wissenszuschreiber Y in seiner Rolle als praktizierender Forschungsmathematiker betreffen, statt.[319]

Trotz der Einhaltung einer Forderung nach objektiver Variation bleiben die reduzierten Gesamtaussagen letztlich Teil *meiner* speziellen Interpretation. Der Lesbarkeit halber werde ich dies an den entsprechenden Stellen nicht jedesmal erneut durch eine explizite Formulierung betonen.

[317] Vgl. auch hier [92, S. 109].
[318] Vgl. Abschnitt 4.1.1.
[319] Die mit letzterer Variationsdimension verbundene, vor allem für Ausgangsfrage 3 und 4 relevante Frage lautet, ob eine geeignet spezifizierte Formalisierbarkeitsbedingung für akzeptable Beweise einen über die Unterschiede zwischen den Interviewpartnern hinweg einheitsstiftenden Faktor, also eine Invariante im Sinne einer phänomenologischen Analyse darstellt. Eine ähnliche Behauptung wird etwa von Heintz vertreten, die die Formalisierung der Mathematik als einheitsstiftendes Kommunikationsmittel vor dem Hintergrund einer sich international immer stärker ausdifferenzierenden, institutionalisierten Mathematik versteht. Vgl. Heintz [53, Abschn. 7.3].

4.2 Analyse ausgewählter Interviewsequenzen

Wie in Abschnitt 4.1.4 diskutiert (S. 153), beschränke ich mich bei der Auswertung der Interviews auf die Ergebnisse zu den allgemeinen Sondierungsfragen sowie zu Szenario 1 aus Fragebogenteil III der Umfragestudie, welcher zu Beginn der Interviews mit den Interviewpartnern durchlaufen wurde.[320]

Im Folgenden stelle ich zunächst kurz die Antwortprofile der Interviewpartner zu Szenario 1 vor. Danach analysiere ich ausgewählte Zitate aus den gerade beschriebenen Interviewsequenzen ausführlich gemäß dem in Abschnitt 4.1.4 beschriebenen Vorgehen. Die Analyse wird anhand der vier in Abschnitt 3.4 formulierten theoretischen Ausgangsfragen der Interviewstudie, nicht anhand der Abfolge der Leitfadenfragen, in vier Abschnitte gegliedert: Jeweils zu Beginn eines solchen Analyseabschnittes wird die entsprechende Ausgangsfrage noch einmal explizit formuliert.[321] Anschließend werden für diese Frage besonders relevante und aussagekräftige Zitate aus den Interviews Int 1 bis Int 6 angeführt. Den ausgewählten Zitaten aus jeweils einem Interview Int i schließt sich unmittelbar eine kurze, philosophisch motivierte Interpretation an. Den Abschluss eines Analyseabschnittes bildet jeweils eine Synthese dieser einzelnen Interpretationen zu einer Gesamtaussage in Bezug auf die verhandelte Ausgangsfrage

Es sei hier auch noch einmal betont, dass sowohl der Auswahl der einzelnen Zitate als auch den Einzelanalysen und den reduzierten Gesamtaussagen jeweils eine spezielle, philosophische Interpretation der aufgeführten Zitate zugrundeliegt. Zugunsten der Lesbarkeit der Interpretationsvorschläge werde ich dies nicht stets explizit erwähnen. Es besteht zudem eine generelle Inhomogenität in Bezug auf die Anzahl und Länge der zu den einzelnen Ausgangsfragen ausgewählten Zitate aus den verschiedenen Interviews. Insbesondere gibt es nicht zu jeder Ausgangsfrage mindestens ein Zitat aus jedem Interview. Daran lässt sich erkennen, dass die einzelnen Interviews trotz des einheitlichen Leitfadens sehr unterschiedliche thematische Schwerpunkte hatten, die durch den jeweiligen Interviewpartner bestimmt wurden.

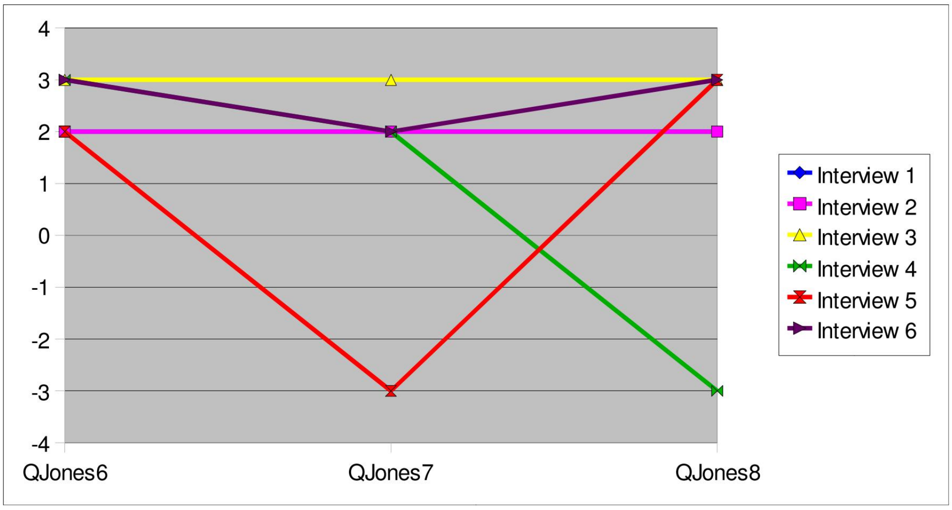
[320] Vgl. Abschnitt 4.1.2.

[321] Um Missverständnisse zu vermeiden, sei hier noch einmal betont, dass diese theoretischen Ausgangsfragen in den Interviews *nicht* gestellt wurden.

4.2.1 Antwortprofile der Interviewpartner zu Szenario 1

Wie Abbildung 4.1 zeigt,[322] sind unter den Antworten der Interviewpartner nur die Antwortprofile von Cluster 1, 2 und 3 aus der Clusteranalyse der Umfrageergebnisse zu Szenario 1 vertreten, das von Cluster 1 viermal durch Int 1, Int 2, Int 3 und Int 6, das von Cluster 2 durch Int 5 und von Cluster 3 durch Int 4 jeweils einmal.

3 = yes | 2 = almost surely yes | 0 = can't tell | -2 = almost surely no | -3 = no



	Interview 1	Interview 2	Interview 3	Interview 4	Interview 5	Interview 6
QJones6	2	2	3	3	2	3
QJones7	2	2	3	2	-3	2
QJones8	2	2	3	-3	3	3

Abbildung 4.1: Antwortprofile der Interviewpartner zu Szenario 1

4.2.2 Interviewanalyse in Bezug auf Ausgangsfrage 1

Ausgangsfrage 1 lautete:

> *Interpretieren die Teilnehmer in den abgefragten Wissenszuschreibungen den Ausdruck „know“ systematisch im erkenntnistheoretischen Sinne von Überzeugtsein oder gerechtfertigtem Überzeugtsein, und wenn ja, was sind die*

[322] Da einige Profillinien zumindest teilweise übereinander liegen (z. B. die zu den Interviews 1 und 2 gehörigen), sind die numerischen Werte zu den einzelnen Interviews zusätzlich in tabellarischer Form angegeben.

Gründe für diesen speziellen Sprachgebrauch? Deuten diese Gründe gegebenenfalls auf eine prinzipielle Fallibilität rechtfertigender mathematischer Beweise und eine prinzipielle Kontextabhängigkeit epistemischer Standards in der mathematischen Praxis hin, oder gibt es dort (auch) einen ausgezeichneten, kontextunabhängigen Standard für infallible Rechtfertigung durch Beweise?

Relevante Zitate aus Interview 1

(*Do you have any comments on the scenarios?*)

„I'm not sure that the questions are very precisely formulated. In a sense, when you say 'Does X know that this is true?' and the answers are 'yes', 'almost certainly yes', 'almost certainly' refers to the certainty that X thinks, or the certainty that you have about what X thinks? [...]

[Nach späterer Rückfrage zur oben genannten Leitfadenfrage:]

Here, I interpret it as the degree of certainty that John has at a given time. If he has that degree of certainty at a given time, these two questions [QJones6 and QJones8] are exactly the same. They refer to the same moment in time, something else changed afterwards, but it cannot affect what he was thinking before.“ (Int 1, S. 305 und S. 309)

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

„Anytime one is doing mathematics and proving a theorem, there is some degree of certainty or some degree of expectation about whether what one is doing is true, and at what point you can be reasonably certain that it's true. So, there's some degree of certainty at which we accept that something is proved.“ (Int 1, S. 305)

(*Would you say that truth is not necessary for knowledge?*)

„The degree of certainty that somebody has has absolutely nothing to do with whether the thing is true or not. It's just a measure for what this person is thinking, so, John was reasonably convinced that the argument was true. It's a question about what a certain person knows, and might as well be under the impression that something is true which has no ground in reality so to speak.“ (Int 1, S. 310)

Interviewpartner 1 (Antwortprofil zu Szenario 1 entspricht Cluster 1) beurteilt die Wissenszuschreibungen „X knows that p is true" in Szenario 1 aus der Perspektive des Szenarioprotagonisten zum Bezugszeitpunkt[323] t_{in}, d.h. im Sinne von „X has a degree of certainty that p is true" oder „X thinks that p is true". Das dritte Zitat scheint zudem zunächst eine erkenntnistheoretische Interpretation der hier verwendeten Lesart des Ausdrucks „know" im Sinne von bloßem Überzeugtsein nahezulegen. In Bezug auf die Szenariofragen spricht Interviewpartner 1 jedoch explizit von „reasonably convinced", was im Sinne von gerechtfertigtem Überzeugtsein interpertiert werden kann.

Diesem aus philosophischer Sicht ungenauen Umgang mit den Begriffen Überzeugung, Rechtfertigung und Wissen liegt jedoch nicht nur die Wahl der Perspektive bei der Beantwortung von QJones6 bis QJones8 zugrunde. Das zweite Zitat deutet darüber hinaus auf die allgemeinere Auffassung hin, dass Beweise in der mathematischen Praxis stets nur ein bestimmtes Maß an Sicherheit bezüglich der Wahrheit des bewiesenen Theorems vermitteln können. Liegt dieses über einem bestimmten Schwellenwert, wird das in Frage stehende Theorem als bewiesen akzeptiert, so dass in der mathematischen Praxis zwar gerechtfertigte Überzeugungen produziert werden, aber keine *nachweisbar* darüber hinausgehende Form von Wissen. Die Formulierung „anytime one is proving a theorem [...] there's *some* degree of certainty at which we accept" deutet aber darauf hin, dass dieser Schwellenwert nicht absolut und kontextunabhängig festgelegt ist, sondern situativ variieren kann.

Relevante Zitate aus Interview 2

(*Do you have any comments on the scenarios?*)

„The psychological relationship between a mathematician and the notion of belief in his or whosesoever proofs is more complicated than is suggested by the scenarios or by the questions. [...] There is always a shadow of doubt or a possibility of doubt." (Int 2, S. 312)

(*Ad Hoc*-Zwischenfrage: *You also mentioned that there is some ambiguity in understanding the questions.*)

„In order to make sense of the questions, I would practically everywere replace the word 'know' by the word 'believe' or something like that." (Int 2, S. 312)

(*Would say that there are some mathematical statements or theorems of which you* know *that they are true?*)

[323] Also abweichend vom in Kapitel 3 zugrundegelegten Standarddeutungsrahmen, vgl. Abschnitt 3.1.4.

„To me, knowledge is knowledge of a machinery of definitions, of proofs, and so on. [...] In mathematical contexts, I would say 'I'm convinced' or 'I believe that it is true because of such and such circumstances'. I would prefer not to say 'I know that it is true'. Beliefs and convictions are things that really can change with time, sometimes very fast. [...] For me, knowledge is not something that can drastically change in a minute because somebody produced a counter-example or something like that. It's not knowledge, it's beliefs, they can change, convictions can change, but not knowledge, knowledge is something more stable. [...]" (Int 2, S. 313)

(*A number of participants from the survey study answered in the following way: [Beschreibung des Antwortverhaltens von Cluster 3 zu Szenario 1]*

Would you say this answer is consistent? Would you briefly explain your own answers [entspricht Cluster 1]?)

„On the morning before the talk, of course, nothing changed after the publication and acceptance." (Int 2, S. 316)

Das klassische philosophische Ideal mathematischen Wissens ist Interviewpartner 2 bekannt und wird als solches auch akzeptiert. Ihm ist aber bewusst, dass es in konkreten Kontexten der mathematischen Praxis nicht um Wissen in diesem Sinne gehen kann, unter anderem, weil mathematische Rechtfertigung in der Praxis keine unfehlbare „machinery of definitions and proofs", sondern ein prinzipiell fallibles Unterfangen ist. Daher sind die epistemischen Zuschreibungen in der Praxis auf Überzeugungszuschreibungen zu reduzieren, Wissenszuschreibungen im klassischen philosophischen Sinne werden zurückgewiesen. Entsprechend interpretiert er den Ausdruck „know" bei der Beantwortung der Szenariofragen generell im Sinne von „believe" oder auch „standing in a psychological relationship with the notion of belief". Die im dritten Zitat verwendeten Formulierungen in der ersten Person: „*I'm* convinced" und „*I* believe" legen hier eher eine erkenntnistheoretische Interpretation dieser Lesart von „know" im Sinne von bloßem Überzeugtsein als im Sinne von gerechtfertigtem Überzeugtsein nahe.

Die Erläuterung des Antwortverhaltens zu Szenario 1 im vierten Zitat („nothing changed") deuten darüber hinaus darauf hin, dass die Fragen QJones6 bis QJones8 wie auch von Interviewpartner 1 aus Johns Perspektive zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage beantwortet wurden. Dies ist aber nicht der Grund für die gerade diskutierten Vorbehalte von Interviewpartner 2 gegenüber einer Verwendung von „know" im klassischen philosophischen Sinne in Bezug auf die mathematische Praxis: Sie sind unabhängig vom Antwortverhalten zu Szenario 1 dadurch begründet, dass ein stets prinzipiell verbleibender Zweifel auch an einem vermeintlich bewiesenem Theorem dazu führt, dass Wissenszuschreibungen im engeren Sinne in der mathematischen Praxis generell nicht nur unangebracht erscheinen, sondern sogar überhaupt keinen Sinn machen. Insbesondere fehlt im Allgemeinen eine für Wissen notwendige Stabilität mathematischer Überzeugungen.

Relevante Zitate aus Interview 3

> (*A more abstract issue behind scenario 1 is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this issue?*)
>
> „John is just a beginning graduate student and I think, John would really think 'yes', but I as an older [person] would think that there is a probability for each result if it is true." (Int 3, S. 321)
>
> (*Would you say that truth is not necessary for knowledge?*)
>
> „I believe that there is objective truth in mathematics, and as mathematicians we generally try to come as close to this objective truth as possible, but we may fail in this for a while, and then may correct or be corrected later, so there may be a tension between objective truth and subjective truth. Sometimes I say 'I know that this mathematical statement is true', and sometimes the statements have such easy proofs, and so many people have already checked these proofs that it is really almost absolutely certain that it is true, but it is also annoying to say everytime: 'I know almost surely that it is true'. Subjectively we are converging, or we try to converge, to the objective truth, and depending on the statement, we may be closer or less close." (Int 3, S. 322)

Das erste Zitat legt nahe, dass Interviewpartner 3 die Fragen QJones6 bis QJones8 in Szenario 1, die er mit „almost surely yes" bewertet hat, nicht aus Johns Perspektive, sondern aus seiner Perspektive als erfahrener Forschungsmathematiker beantwortet hat. Dennoch hat er den Ausdruck „know" dabei im Sinne von gerechtfertigter Überzeugung interpretiert; diese Deutung seines Antwortverhaltens wird durch die Wendung „trying to converge to the objective truth" gestützt. Die Möglichkeit von mathematischem Wissen im Sinne eines absolut ausgezeichneten Maßes an Gewissheit darüber, dass ein bestimmtes Theorem in einem objektiven Sinne wahr ist, wird für die mathematische Praxis dabei nicht generell zurückgewiesen. Die auch von Interviewpartner 3 thematisierte prinzipielle Irrtumsmöglichkeit selbst bei einer einfachen, häufig und gründlich überprüften Beweisführung verhindert generell nur, dass sich ein Mathematiker der Wahrheit des bewiesenen Theorems selbst vollständig sicher sein kann. Dahinter steht aber der Glaube an eine absolute, objektive mathematische Wahrheit, die das Streben praktizierender Mathematiker bestimmt, sich ihr so weit wie möglich anzunähern.

Die prinzipielle Fehlbarkeit mathematischer Beweise in der Praxis ist aber nicht jedem Mitglied der mathematischen Gemeinschaft gleichermaßen bewusst, sondern das Bewusstsein dafür entsteht erst durch langjährige Erfahrung als praktizierender Forschungsmathematiker.

Relevante Zitate aus Interview 5

> (*Do you have any comments on the scenarios?*)
>
> „I wasn't quite sure how to interpret these questions. What exactly was meant that someone did know or does know? I rather interpreted it as the level of belief that this person had about his work. So, the change of [hope] between the stages of the work on a mathematical problem." (Int 5, S. 327)
>
> (*Ad Hoc*-Zwischenfrage: *You mentioned before that you were not sure about how to interpret the questions. What interpretation did you choose? Did it change for some scenarios?*)
>
> „I replaced this verb 'know' by the word 'believe'. At various stages of the proof process and presentations of results you have this feeling that you believe–and some mathematicians just say 'I buy this statement or I do not'. I interpreted these questions as asking about John's point of view. That if I were in his place, and what my feeling might be in this stages of the process." (Int 5, S. 332)
>
> (*A number of participants from the survey study answered in the following way: [Beschreibung des Antwortverhaltens von Cluster 1 und 3 zu Szenario 1] Would you say this answer is consistent? Would you briefly explain your own answers [entspricht Cluster 2]?*)
>
> „What does it mean that John knows? That he falsely believed that he knows, but in fact, he didn't know. Because for mathematicians who answer this way, to know is to have a real proof. If the proof was incorrect, then John didn't know. But my interpretation was that John sincerely believes. I know of

> these mathematicians who firmly believe that if a mathematician worked on a theorem and finished the proof, and says 'That's the final point in the proof, and now I know that this is correct, because I finished the proof', this is the end of the process. I think it is very naïve to think so, it would never be true for human beings." (Int 5, S. 334)

Interviewpartner 5 beantwortet die Szenariofragen QJones6 bis QJones8 aus Johns Perspektive zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage und ersetzt dabei bewusst den Ausdruck „know" durch „believe". Dabei lässt sich „believe" gemäß der Formulierung „if I were in his place, and what my feeling might be" im zweiten Zitat im Sinne von bloßer, subjektiver Überzeugung, gemäß der Formulierung „sincerely believes" im dritten Zitat dagegen eher im Sinne von gerechtfertigter Überzeugung deuten.

Darüber hinaus deutet das dritte Zitat ungeachtet der Perspektivwahl bei der Beantwortung der Szenariofragen als eigentlichen Grund für eine solche Ersetzung von „know" durch „believe" an, dass die Rede von „know" im Sinne von „having a real proof" und im Unterschied zu „sincerely believe" im Allgemeinen zu naiv ist und nicht der Realität der mathematischen Praxis entspricht: Ein mathematischer Beweis wird hier allgemein als ein stufenweiser überzeugungsbildender Prozess beschrieben, der in der mathematischen Praxis jedoch keinen finalen Punkt erreicht. Das vorrangige epistemische Merkmal mathematischer Beweise ist demgemäß nicht die tatsächliche Detailkorrektheit des konkreten sprachlichen Argumentes im Sinne eines „real proof".

Relevante Zitate aus Interview 6

> (*Do you have any comments on the scenarios?*)
>
> „So, 'Does John know that the Jones conjecture is true?', and then there are two possibilities. He either knows that the conjecture is true, or he doesn't know that the conjecture is true, and this is giving like a probability distribution that I add to one of these two possibilities, and the other possibility is that there is like a continuum from knowing to not knowing, and that I'm sort of placing here at a point in this continuum. And I have interpreted it in the second way. But I realize that you might mean it in the other way, like knowing is something that is completely abstract, that it is a state that a person is in without maybe knowing that he is in, and that you ask me in what state is John here, and then I give like a probability of being in one state or the other. Anyway, my interpretation is that there is this sort

of a continuum from knowing something, whether it is true, to not knowing something.“ (Int 6, S. 337)

(*A number of participants from the survey study answered in the following way: [Beschreibung des Antwortverhaltens von Cluster 3 zu Szenario 1] Would you say this answer is consistent? Would you briefly explain your own answers [entspricht Cluster 1]?*)

„Everybody agrees that the answer is that John sort of knows, whatever you mean by knowing. If you ask John here ‘Is the conjecture true?’, then he will say ‘Yes, I proved this’, and he will even say this on the morning of this talk. That’s why I think that on the morning of the talk, nothing has changed. Something changes in the talk with John, but I would say that at this point, he still believes it. If you believe that you can only know something if it is true, then of course he never knew it. He thought he knew it, but he didn’t know it because it was not true. Maybe he doesn’t even know [that the conjecture is wrong] now, because it’s still possible that, eventually, the conjecture is true. He constructs a counterexample, but did he find the error in his proof? It’s more like what ‘knowing’ actually means: can you know something that is not true? If you put yourself in the position of this John, and you ask him, which is probably the only way to find out what he thinks, then he would say that he knows it. And, if you say ‘Well, but suppose now that in ten years, somebody finds out that there is an error’, then he’d say ‘Well, then I was wrong, but I think there’s no error and I know it’.“ (Int 6, S. 343)

Ad Hoc-Zwischenfrage: *So you put yourself in John’s position all the time when you were answering?*

„Yes, although, if I would have looked at the whole list in advance, then I would have put myself in the position of John at this moment of time, and then even John would say ‘I thought I knew it, but I never knew it’, and I would come up with ‘no’ all the time.“ (Int 6, S. 345)

Die Begründungen, die Interviewpartner 6 im zweiten Zitat für sein Anwortverhalten zur Schlüsselszene von Szenario 1 gibt: „On the morning of the talk, nothing has changed“, „if you ask John here“, „if you put yourself in the position of this John“ machen deutlich, dass auch er die Fragen QJones6 bis QJones8 aus Johns Perspektive beantwortet hat; das dritte Zitat legt nahe, dass damit Johns Perspektive zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage gemeint ist.[324] Hier lässt sich diese Perspektivwahl auch als vorrangigen Grund dafür auslegen, dass Interviewpartner 6 „John knows that JC is true“ dabei nur im Sinne von bloßem Überzeugtsein („at this point, he still believes it“) oder im Sinne von Glauben zu Wissen („even John would say ‘I thought I knew it, but I never knew it’“) im Unterschied zu „know“ im Sinne eines faktiven Wissensbegriffes gelesen hat.

Generell werden „knowing“ und „not knowing“ im ersten Zitat als die beiden Endpunkte einer kontinuierlichen Skala beschrieben. Dies lässt sich als Hinweis darauf deuten, dass es in der mathematischen Praxis Sinn macht, auch vor Erreichen eines ausgezeichneten Maßes an beweisbasierter Rechtfertigung in einem gewissen Sinne von mathematischem Wissen zu sprechen. Es bleibt aber unklar, ob sich diese Aussage speziell auf die Mathematik oder auf den allgemeinen Wissensbegriff bezieht; in letzterem Fall wird in Bezug auf die Mathematik jedenfalls keine Ausnahme gemacht.

Reduktion auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 1

Die Einzelinterpretationen zu den aufgeführten Zitate lassen sich im Hinblick auf Ausgangsfrage 1 auf die folgenden Kernaussagen reduzieren:

Die Interviewpartner interpretieren in den abgefragten Wissenszuschreibungen zu Szenario 1 den Ausdruck „know“ tatsächlich im erkenntnistheoretischen Sinne von Überzeugtsein oder gerechtfertigtem Überzeugtsein. Außerdem beantworten die meisten Interviewpartner zumindest die Fragen QJones6 bis QJones8 aus der Perspektive des Szenarioprotagonisten John zum Bezugszeitpunkt t_{in} der jeweiligen Frage. Letzteres ist aber nicht der eigentliche Grund für Ersteres: Die für die Ersetzung von „know“ durch „believe“ oder „is reasonably convinced“ angeführten Gründe sind prinzipieller Natur und deuten darauf hin, dass diese Ersetzungen oder Uminterpretationen auch kein Artefakt der Umfrage- oder Interviewstudie sind.[325]

Diese Gründe können wie folgt zusammengefasst werden: Im Falle von sehr einfachen oder sehr gut etablierten mathematischen Resultaten sind die zugehörigen Beweise mehrfach geprüft und ihre Korrektheit so gut wie sicher. Gerade im Falle von komplexen Forschungsresultaten ist die Differenz zwischen einem als objektiv korrekt nachweisbaren und einem in der Praxis tatsächlich zur Verfügung stehenden Beweis unter Umständen so groß, dass eine Wissenszuschreibung im Sinne eines faktiven, auf infallibler beweisba-

[324] Denn bei einem erneuten Durchlauf des Fragebogenteils würde sich Interviewpartner 6 in die Perspektive von John zum Zeitpunkt t'_{in} von QJones8 versetzen.

[325] Die Einzelfallbetrachtung von Interview 3 stützt diese Interpretation zusätzlich: Dieser Interviewpartner besitzt zwar in Bezug auf QJones6 bis QJones8 ein sehr ausgeprägtes Antwortprofil vom Typ wie Cluster 1 und hat die Fragen im Sinne von gerechtfertigtem Überzeugtsein, aber *nicht* aus Johns Perspektive beantwortet.

sierter Rechtfertigung begründeten Wissensbegriffes hier gar keinen Sinn machen würde. Den Beweisen fehlt es dazu unter anderem an der nötigen Stabilität hinsichtlich ihrer formalen Detailkorrektheit. Die Infallibilität mathematischer Beweise, die gegebenenfalls die Faktivität des dadurch begründeten Wissens sichern würde, ist damit zumindest kein essentielles epistemisches Merkmal.

Während faktives, sicheres Wissen als Endpunkt einer kontinuierlichen Skala von Überzeugtseinszuständen aufgefasst wird, entspricht dem kein finaler Endpunkt oder ein kontextunabhängig ausgezeichnetes Stadium des in der Praxis stufenweisen Beweisprozesses. Das Vorliegen eines konkreten mathematischen Beweises reicht streng genommen aufgrund stets bestehen bleibender Irrtumsmöglichkeiten nur dazu hin, eine gewisse Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des bewiesenen Theorems zu belegen. Diese Irrtumsmöglichkeiten sind epistemologisch signifikant, da sie im Rahmen der zugrundeliegenden Rechtfertigungsmethode prinzipiell nicht ausräumbar sind; insbesondere kann auch eine stärkere Formalisierung des konkret gegebenen mathematischen Argumentes diese prinzipielle Möglichkeit des Irrtums nicht generell ausschließen, sondern vergrößert im Gegenteil ihre Wahrscheinlichkeit noch durch die gegebenenfalls wachsende Unübersichtlichkeit und beweisstrategische Intransparenz, die formalisierten Argumenten innewohnt.[326]

Als pragmatische Konsequenz aus dieser im Allgemeinen nicht ausräumbaren Fallibilität existieren in der mathematischen Praxis sozial bestimmte Schwellenwerte für die Akzeptanz mathematischer Beweise, die in jedem Fall unterhalb von objektiver, also zum Beispiel formaler Korrektheit liegen. Im Rahmen einer philosophischen Analyse sind die Kriterien für das Erreichen eines solchen Schwellenwertes eher situativ, unter Anderem in Abhängigkeit vom Stadium des Gesamtbeweisprozesses zu konzipieren. Dazu bietet sich in Bezug auf individuelle epistemische Zuschreibungen eine Abhängigkeit der Rechtfertigungsstandards vom Zuschreibungskontext an. Darauf gehe ich, auch vor dem Hintergrund der Diskussion im noch folgenden Abschnitt 4.2.5, in Abschnitt 4.3 genauer ein.

4.2.3 Interviewanalyse in Bezug auf Ausgangsfrage 2

Ausgangsfrage 2 lautete:

> Welche Rolle spielt eine Unterscheidung eines reinen „Wissen-dass“ und eines „Wissen-warum“ in Bezug auf die Erkenntnisziele mathematischer Forschungspraxis, und schlägt sich dies gegebenenfalls in der Relevanz mathe-

[326] Vgl. hierzu auch die Analyse bzgl. Ausgangsfrage 3.

matischer Fähigkeiten des epistemischen Subjekts für die Bewertung epistemischer Zuschreibungen nieder?

Hier sind ein paar kurze allgemeinere Vorbemerkungen zu den im Folgenden vorgeschlagenen Interpretationen angebracht: Trotz der noch weitgehend unspezifizierten Redeweise von „Wissen-warum“[327] in Ausgangsfrage 2 zeigen die bisherigen Überlegungen in Abschnitt 3.4.2, dass es dabei um die Frage geht, warum eine mathematische Aussage p wahr ist, und nicht darum, warum ein epistemisches Subjekt X die Aussage p für wahr hält. Die Frage, warum p wahr ist, ist von der, warum X p für wahr hält, im Allgemeinen grundverschieden: X kann p sogar aus guten Gründen gerechtfertigt für wahr halten, die aber mit einer Erklärung dessen, warum p tatsächlich wahr ist, nichts zu tun haben.

Manche Formulierungen in den nachfolgend angeführten Zitaten (dies betrifft vor allem die Zitate aus den Interviews 2, 4, 5 und 6) lassen sich wörtlich zunächst im Sinne von „X hält p für wahr / bewiesen, weil / wenn A“ lesen. A kann an den entsprechenden Stellen also nur dann zur genaueren Analyse der Unterscheidung von „Wissen-dass“ und „Wissen-warum“ in der mathematischen Praxis herangezogen werden, wenn A selbst Eigenschaften von mathematischen Beweisen zum Ausdruck bringt, die als genauere Explikation von „warum p wahr ist“ gedeutet werden können. In diesen Fällen ließe sich „X hält p für wahr / bewiesen, weil A“ etwa im Sinne von „X hält p für wahr / bewiesen, weil X’ Beweis für p erklärt, warum p wahr ist“ lesen.

Das „weil“ oder „wenn“ in „X hält p für wahr / bewiesen, weil / wenn A“ spielt dagegen für die Relevanz von „Wissen-warum“ bei der Analyse epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis eine Rolle: Es zeigt an, dass A als subjektive Rechtfertigung für die Überzeugung, dass p, angeführt wird. Aufgrund der in Abschnitt 1.3.4 in Kapitel 1 diskutierten methodologischen Annahme, dass ein wesentlicher Teil der Bedeutung von epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis durch den tatsächlichen Gebrauch dieser Zuschreibungen unter praktizierenden Mathematikern bestimmt ist (vgl. S. 24), ist die Relevanz von Wissen-warum als Kriterium für die subjektive Rechtfertigung mathematischer Überzeugungen durch (redliche) Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft auch für die Relevanz von Wissen-warum für eine philosophische Analyse epistemischer Rechtfertigung in der mathematischen Praxis ausschlaggebend.

[327] Hier und im Folgenden verwende ich die Ausdrücke „Wissen-dass“ und „Wissen-warum“ zunächst wieder im Sinne der aus den Freitextkommentaren der Umfragestudie *ad hoc* übernommenen (vgl. Abschnitt 3.3.2, S. 133) oder im Sinne einer von den jeweiligen Interviewpartern selbst gebrauchten Sprechweise. Die Zusammenführung und genauere Spezifikation dieser Sprechweisen erfolgt im Rahmen der Reduktion der Einzelinterpretationen auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2.

Relevante Zitate aus Interview 1

> (*Ad Hoc*-Zwischenfrage: *Would you say computer generated proofs provide knowledge?*)
>
> „A computer generated proof tends to tell you just that the result is true or false. But it lacks that extra amount of information that you have in a traditional proof, which is something that you can use, for example, applying similar techniques to different kinds of problems or so.“ (Int 1, S. 307)

In diesem Zitat werden wichtige Eigenschaften beschrieben, die einem Computerbeweis gegenüber einem traditionellen mathematischen Beweis fehlen. Ein traditioneller Beweis vermittelt demnach nicht nur ein Wissen-dass, sondern auch eine Art übergeordnetes Anwendungswissen in Bezug auf die verwendeten Beweistechniken. Dieses Anwendungswissen lässt sich auch zur Lösung anderer mathematischer Probleme verwenden, was auf seine Relevanz in Bezug auf das Erkenntnisziel mathematischer Forschung hindeutet.

Relevante Zitate aus Interview 2

> (*Would you like to comment on the scenarios?*
>
> „When I'm saying 'I know that Fermat's Theorem is true' or something like that, this implies two very different possibilities. One, I have really worked on this first myself. [...] Now, I'm completely convinced, I sort of know or believe, I would say, that Fermat's Theorem is true for such and such reasons, roughly speaking my deep personal involvement with this proof. And the second meaning of the same word 'believe' or 'convinced' in this case is that I believe that Fermat Theorem is true because I just *know* the history of the story. I know how Wiles announced his proof, I know that then, a mistake was found, then Wiles and Taylor corrected it, and there were several seminars at various points of the world working on it, and all participants were established mathematicians who knew what they're doing. Now I am convinced because the proof has passed the general test: application, seminar studies, maybe generalizations of the theorems. I am totally outside of it, [but] I know how it was made, and I have a personal experience with some other results of the same kind, I'm sure that this people worked honestly and correctly, I believe that what we do is o.k. and Fermat's Theorem is true. That's approximately how it works.“ (Int 2, S. 313)

Hier wird eine Unterscheidung zwischen zwei Arten getroffen, die Überzeugung, dass p, mithilfe eines Beweises zu begründen: Im ersten Fall wird sie durch das aktive eigene Erarbeiten eines Beweises für p begründet. Damit ist, wie die Formulierung „deep personal involvement“ nahelegt, etwas anderes als ein bloßes aktives Mitwirken gemeint. Hier scheint es darum zu gehen, dass das epistemische Subjekt durch sein tiefes persönliches Eingebundensein in den inhaltlichen Beweisprozess, also das Fortschreiten der mathematischen Argumentation, die relevanten mathematischen Zusammenhänge (wenn auch nicht bis ins letzte Detail) kennt, in denen p zu anderen mathematischen Theoremen steht, und die die Wahrheit des bewiesenen Satzes erklären. Dazu muss das epistemische Subjekt insbesondere bei komplexen Forschungsresultaten auf dem entsprechenden Gebiet bereits spezialisiert sein.

Im zweiten Fall wird die Überzeugung, dass p, durch den detaillierten Nachvollzug der Testgeschichte des Beweises, also des sozialen Beweisprozesses, begründet. Dazu ist einerseits ein „knowing how“ im Sinne des zweiten Teil des Zitates gemeint, welches sich im Sinne eines soziologischen „Wissen-wie“ interpretieren lässt: Das epistemische Subjekt muss wissen, welche Stadien und „Tests“ ein mathematisches Argument im Laufe eines Beweisprozesses erfolgreich durchlaufen haben muss, um als akzeptabel zu gelten. Andererseits ist dafür eigene mathematische Erfahrung des epistemischen Subjektes mit verwandten, möglicherweise in Bezug auf Komplexität und verwendete Beweistechniken ähnlichen, Fragestellungen gefordert.

Relevante Zitate aus Interview 4

> (*Do you have any comments on the scenarios?*)
>
> „So one thing: math is in a sense something personal. I'm not really interested if other people understand something. So the questions of whether somebody understands something don't mean that much to me. Another question would be: when do I think I understand something? This will probably depend on lots of other things. [...] When I think or am enthusiastic that I proved something, I don't think that I proved something, or think that I understand it. Certainly if it's a relevant thing, during the next few weeks I would try to shoot holes in it, look at it from different directions, through different angles, ask questions why it is true, why it works this way, not that way. I would try to convince myself that it's actually true, that it has to be true, by looking at it from different sides. [...] I'm only convinced that something is true if I

look at it during a longer time, and half forget the thing, and reiterate the argument later.“ (Int 4, S. 324)

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

„I work a lot with intuition, the formulas and pictures combined together to work out something. You have to be very careful with intuition, I always need a longer time to check and work out the details. Often an intuition is somewhat correct, it turns out to be almost always correct, but that's not the same as giving a detailed proof that other mathematicians can check. And that is a more time consuming process.“ (Int 4, S. 325)

Subjektives mathematisches Verständnis wird als das Haupterkenntnisziel des forschenden Mathematikers und gleichzeitig als notwendige Voraussetzung für eine subjektiv gerechtfertigte mathematische Überzeugung beschrieben. Wissen, warum p wahr ist, ist Teil dieses mathematischen Verständnisses. Zu diesem Wissen-warum gehört die Klärung, warum ein Beweis für p in einer bestimmten und nicht in einer anderen, möglicherweise ebenfalls naheliegenden Weise funktioniert. Erst dadurch wird die Wahrheit von p und die Korrektheit des Beweises für das epistemische Subjekt möglichst zwingend einsichtig; es erlangt somit hinreichende (subjektive) Sicherheit, dass der Beweis keine schwerwiegenden Fehler enthält. Eine epistemisch relevante Fähigkeit des epistemischen Subjekts zur Erlangung von Wissen-warum besteht in der Fähigkeit zum Perspektivwechsel („look at it from different directions, through different angles“) in Bezug auf p und den vorliegenden Beweis für p. Ein solcher Perspektivwechsel kann konkret etwa darin bestehen, dass innerhalb eines speziellen mathematischen theoretischen Überbaus aus Definitionen, Lemmata und bestimmten Beweistechniken (im Folgenden verwende ich statt des etwas sperrigen Ausdrucks „theoretischer Überbau“ den auch im Deutschen geläufigen englischen Ausdruck „setting“) formulierte Resultate oder Beweise innerhalb eines anderen *settings* reformuliert werden, um zu prüfen, ob die Kernargumentation dort ebenfalls Bestand hat. Das zweite Zitat weist in Bezug auf mögliche kognitive Voraussetzungen und die konkrete Ausgestaltung der Fähigkeit zu einem solchen Perspektivwechsel auf den geübten Umgang mit bildlicher Intuition und die Fähigkeit zur Übersetzung bildlich-intuitiver in detaillierte, sprachlich verfasste Argumente hin.

Relevante Zitate aus Interview 5

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

„I used to envy mathematicians who can write down proofs they start to believe once these proofs are on paper. There is a skill that mathematicians have who do completely believe their written proofs.“ (Int 5, S. 327)

(*What do you mean by 'formal proof'?*)

„One of my recent graduate students is almost incapable of writing down proofs. But he really knows mathematical truths. He was my only student whom I could ask about things that I didn't know, and often he would come up with an answer, and I would know that this is really true. The problem is then to extract from him why it is true, which is the proof. If you can extract from the pictures that it is true, from a general idea why it must be true, you want to extract more and more detail. If you do this to the end, then you have a full proof, but often, such things are rather deceptive. [...] There are well respected mathematicians who are like this.“ (Int 5, S. 329)

(*Can you make any sense of the term 'formalizable proof'?*)

„A few years ago there was the millennium lecture by Michael Atiyah, where he expressed some of his ideas about different approaches of how to do mathematics, and how to get results which in the end are always called theorems in mathematics. He says that there are two opposite approaches to this. One is algebraic, and one is geometric. You do algebra when you need lot of time and almost no space. Which means, you do step by step calculations on a small piece of paper with the aim to finish at a certain figure or certain combination. And the opposite approach is the geometric one, which needs space, and no time. You need to see a picture, just once, as a whole. This just comes to you as a holistic picture, and you see that it is right. And then you know that there is the theorem behind this picture. But to work out this theorem, you would need algebra. So you would need time to put it in these details. Both approaches are present in every day mathematical work, but can be present in different people in different combinations.“ (Int 5, S. 330)

Auch hier wird von einem „Wissen-warum“ als Basis gerechtfertigter beweisbasierter mathematischer Überzeugung gesprochen. „Wissen, warum p wahr ist“ bedeutet dabei, einen Beweis oder – je nach Glaubwürdigkeit, Expertise des epistemischen Subjektes und der individueller Ausprägung seiner Art und Weise, mathematisch zu arbeiten – zumindest eine allgemeine Beweisidee für p anführen zu können, die den zwingenden Charakter der für das Resultat wesentlichen mathematischen Zusammenhänge darstellt und die Kernargumentation für einen ausgearbeiteten Beweis liefern kann.

Das dritte Zitat beschreibt explizit zwei duale Arten und Weisen, mathematisch zu arbeiten, die in der mathematischen Praxis besonders ausgeprägt sind: zum einen das geometrische Arbeiten unter Berufung auf die mathematische Anschauung, die eine holistische Einsicht mathematischer Zusammenhänge in einem einzigen Moment anhand von bildhaften Vorstellungen erlaubt, und zum anderen das rein algebraische Arbeiten, also das schrittweise Vollziehen regelgerechter Manipulationen von Symbolen.

Das Fallbeispiel des Studenten (der in diesem Sinne als Extremfall des „Voll-Geometers“ einzustufen wäre) illustriert einerseits, dass Wissen-warum in der Regel erst durch Kombination von algebraischem und geometrischem Arbeiten zustande kommt, und andererseits, dass explizites Wissen-warum-p des epistemischen Subjektes zumindest in einzelnen Fällen (wie etwa dem hier verhandelten eines glaubwürdigen „Voll-Geometers“) keine notwendige Bedingung für die positive Bewertung epistemischer Zuschreibungen bezüglich p darstellt.

Relevante Zitate aus Interview 6

> (*Do you have any comments on the scenarios?*)
>
> „I realize that I make quite a difference between knowing the mathematics that have been established, like we know that the moon is a big rocky ball, although I've never been there, and as far as I'm concerned it could be a cheese. It's sort of cultural heritage, and that's a kind of knowledge that makes it sure, while the more research kind of way is adding to this body of knowledge, which is a quite different aspect. Then you are really putting a brick on the building, and it's something else than knowing that the bricks are in the building. For instance, I know that certain theorems are true, although I certainly don't know the proof of them, like Fermat or something. If you say 'Is Fermat's Theorem true?', I say 'yes', if somebody sends me, as an editor of a journal or whatever, a paper that they found a simple counter-example, then I almost throw it away without looking at it, because I know this is going to be nonsense. On the other hand, I have a much more delicate opinion about knowing the things I've proved myself, because I know that we make errors, and that I made errors, and that we have to correct them, and

[sometimes] you cannot correct them, like with this counter-example to the Jones conjecture." (Int 6, S. 337)

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

„When doing my PhD thesis, I learned that I should be careful–of course, a second year student knows that he should be careful, but you learn something about the way to be careful, or rather the way that you have to understand something. There are several sorts of levels of understanding in mathematics, I think. If you see a proof then you start reading it, and say o.k., can I understand all the implications. This can be very clear, or can sometimes be a little bit blurred in that you are at the point of sort of believing it rather than actually seeing it. If you ever write a paper yourself, then all steps should be on the level of completely seeing it. So this picture story is a little bit shady, right. In some sense he sees it, but then, apparently, not really. Your own expertise, you sort of know at hopefully the deepest level, but even there, you sometimes see that you actually find out that you never looked at it in a right way. That's what progress comes from, you realize that you should look at it in a different way. And in the process of understanding it happens that you have a definition, and that you think you understand it, and that you come back to it for one reason, or somebody tells you something about it, and that you realize that you never understood it at all but now you understand it, at least that's what you think. This maybe happens three times with the same definition. I think that's what happens in your scenario with Tom, because apparently, he learned it pretty well, he knows the details, but he maybe learned it by heart rather than by really understanding what's going on. Although he maybe thought that he was understanding what is going on, but apparently he didn't, in the sense that he could not apply it to a theorem T_2. Now he has a better understanding of it, that's for sure. But, if you come up with theorem T_3, it's not clear that he can do now everything that can be done with it, or that his professor can do with it." (Int 6, S. 338)

Das erste Zitat lässt auf die Relevanz einer Differenzierung nach etablierten und noch nicht etablierten mathematischen Theoremen sowie nach Kollektivwissen und für individuelles Wissen notwendiger gerechtfertiger Überzeugung hinsichtlich der Frage nach unterschiedlichen Rollen von „Wissen-dass" und „Wissen-warum" schließen: Individuelles Wissen etablierter mathematischer Theoreme ist demnach oft ein tradiertes, über das soziale Vertrauen in die Zuverlässigkeit der Testgeschichte eines Beweises begründetes

Wissen-dass, für welches Wissen-warum nicht notwendig ist und gegebenenfalls (nämlich wenn es um Theoreme geht, die den eigenen Wirkungsbereich des epistemischen Subjektes nicht betreffen) auch keine Rolle spielt.[328]

Das zweite Zitat lässt sich so deuten, dass für individuelles Wissen nicht etablierter mathematischer Theoreme, insbesondere eigener Resultate, dagegen inhaltlich-argumentative beweisbasierte Rechtfertigung notwendig ist, die ein gewisses, der mathematischen Expertise im jeweiligen Fachbereich angemessenes mathematisches Verständnis voraussetzt. Dieses mathematische Verständnis wird als eine stufenweise Erkenntnisform beschrieben, der auf der niedrigsten Stufe das schrittweise Nachvollziehen der logischen Schlussschritte eines Beweises entspricht. Auf höheren Stufen beinhaltet mathematisches Verständnis eine Art Wissen-warum im Sinne des „Sehens“ der für den Beweis relevanten mathematischen Zusammenhänge. Das Ziel mathematischer Forschung bedeutet für den individuellen praktizierenden Mathematiker eine möglichst hohe Verständnisstufe hinsichtlich des eigenen Spezialgebiets und eigener Resultate.

Das Erreichen höherer Stufen mathematischen Verständnisses setzt, wie das Definitions-Beispiel andeutet, spezielle mathematische Fähigkeiten voraus: Um etwa eine mathematische Definition unter der „richtigen“ oder zumindest einer angemesseneren Perspektive zu betrachten, ist wieder eine Fähigkeit zum Perspektivwechsel vonnöten.[329]

Reduktion auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2

Die Einzelinterpretationen der Zitate lassen sich auf folgende Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2 reduzieren:

Individuelle, auf der Basis eines Beweises inhaltlich-argumentativ (und nicht nur durch die soziale Testgeschichte des Beweises) gerechtfertigte mathematische Überzeugung wird in der Praxis nur dann zugeschrieben, wenn das epistemische Subjekt, abhängig von seiner fachlichen Kompetenz und Reife, auch über ein gewisses mathematisches Verständnis verfügt. Mathematisches Verständnis besitzt dabei verschiedene Stufen. Auf der niedrigsten Stufe, die für einen Forschungsmathematiker jedoch unangemessen ist, steht das bloße deduktive Nachvollziehen der groben Argumentationsstruktur irgendeines Beweises für p. In Bezug auf noch nicht etablierte Theoreme, insbesondere eigene Resultate des epistemischen Subjektes, ist eine höhere Verständnisstufe für eine positive epistemische Zuschreibung notwendig. Eine möglichst hohe Verständnisstufe stellt ein wesentliches Erkenntnisziel mathematischer Forschung dar und ermöglicht die hinreichende Sicherheit

[328] Hier wird jedoch nichts über die Rollenverteilung von Wissen-dass und Wissen-warum für etabliertes mathematisches Kollektivwissen gesagt.

[329] Vgl. die Analyse der relevanten Zitate aus Interview 4, S. 169 f.

vor essentiellen Argumentationsfehlern im Beweis und die Nutzbarkeit der Resultate in anderen mathematischen Kontexten.

Höhere Verständnisstufen beinhalten ein „Wissen-warum" in folgendem Sinne: Zur Erlangung tieferen mathematischen Verständnisses von p reicht es in der Regel nicht aus, irgendeinen korrekten Beweis für p zu kennen. Das epistemische Subjekt benötigt dazu vielmehr direkten subjektiven Zugang zu einer bestimmten Art der Beweisführung, die die in Bezug auf p relevanten mathematischen Zusammenhänge aufzeigt und so die Wahrheit von p und die Korrektheit des Beweises erklärt und zwingend einsichtig macht. Darüber hinaus muss sie je nach Verständnisstufe einen *Perspektivwechsel*, d.h. die Neuformulierung des Problems und der Kernargumentation in anderen mathematischen *settings*[330] und die Übertragung der verwendeten Beweismethoden auf ähnliche mathematische Probleme möglich machen.[331]

Das Erreichen einer höheren Verständnisstufe und der damit verbundene Erwerb von Wissen-warum im obigen Sinne setzen somit aus erkenntnistheoretischer Sicht ein „Wissen-wie" im Sinne des Vorliegens bestimmter Fähigkeiten des epistemischen Subjektes

[330] Vgl. S. 170. An dieser Stelle lassen sich erste Rückschlüsse auf epistemisch relevante Eigenschaften mathematischer Beweise ziehen: Beweise, die dem mathematischen Verständnis förderlich sein sollen, müssen so formuliert sein, dass spezifische Beweismethoden sichtbar, abstrahierbar und auf andere mathematische Fragestellungen übertragbar werden. Hochgradig formalisierte Computerbeweise etwa können hier in der Regel nicht dienen, da diese häufig mit einer großen Menge von Fallunterscheidungen arbeiten, um in den einzelnen Fällen den Beweisaufwand auf bloßes „Rechnen" reduzieren zu können. Die Bedeutung des Perspektivwechsels zur weiteren Sicherung und Vertiefung des Verständnisses eines mathematischen Resultates wirft Zweifel an der vorrangigen epistemischen Relevanz formaler Beweise und der Formalisierbarkeit von Beweisen für die Praxis auf: Mit einem Perspektivwechsel ist gerade nicht die Rückführung auf ein für die gesamte Mathematik universelles Axiomensystem, etwa die ZFC-Axiome der Mengenlehre, gemeint. Ein Perspektivwechsel besteht nicht in der Formalisierung des Ausgangsbeweises, und die Möglichkeit zum Perspektivwechsel besteht nicht in dessen Formalisierbarkeit. Während die Formalisierung eine einheitliche Perspektive erzeugt, fordert man mit einem Perspektivwechsel das genaue Gegenteil: Es kommt darauf an, das bewiesene Theorem und den Beweis aus *verschiedenen* Perspektiven zu betrachten.

[331] Eine meiner Ansicht nach ganz ähnliche Sichtweise der Neugewinnung mathematischen Verständnisses wird – in Bezug auf Schulmathematik – in der Didaktik der Mathematik von Heinz Steinbring diskutiert (vgl. etwa Steinbring [118]). Für ihn setzt insbesondere die Vermittlung mathematischen Verständnisses, die ja auch eine Form des Neugewinns von Verständnis auf Seiten des Schülers darstellt, einen (alltags)gegenständlichen Bezugsrahmen, bestehend aus begrifflichem Hintergrund und einer zugehörige Handlungspraxis voraus, vor dem die abstrakten mathematischen Symbole und Schlussregeln verstanden werden können. Eine substantielle Ausweitung des bisherigen mathematischen Wissens des Schülers zieht einen *Wechsel* in einen umfassenderen oder auch einfach alternativen Bezugsrahmen nach sich. Auch wenn ein neues Resultat im Rahmen des alten Bezugsrahmens bewiesen werden kann oder als Grenzfall auftritt, heißt dies noch nicht, dass es (allein) darin auch wirklich verstanden werden kann. Erst der Bezugsrahmenwechsel ermöglicht ein Verständnis des neuen Resultates und dessen sinnvolle Einordnung in Bezug auf den alten Bezugsrahmen. In der mathematischen Forschungspraxis entsprechen die unterschiedlichen begrifflichen *settings* diesen Bezugsrahmen. Hier handelt es sich dann nicht mehr um (alltags)gegenständliche Bezugsrahmen, sondern um begrifflich-theoretische Bezugsrahmen aus Notation und Definitionen; anstelle der zugehörigen Handlungspraxis steht ein intuitiver, etwa geometrischer Zugang zu diesen Begrifflichkeiten.

voraus: Das epistemische Subjekt muss die in einem Beweis verwendeten Beweismethoden bereits in einem Maße beherrschen, das es ihm ermöglicht, sie auf ähnliche mathematische Probleme zu übertragen.[332] Es muss außerdem über die Fähigkeit zum Perspektivwechsel verfügen, d.h. wissen, wie sich mathematische Aussagen und Beweise generell von einem *setting* in ein anderes übertragen lassen, und welche Fallstricke dabei zu beachten sind. Grundlegend für die Entwicklung dieser Fähigkeiten könnte unter anderem die basalere Fähigkeit des wechselseitigen Zusammenspiels geometrisch-intuitiven und algebraischen Denkens sein.[333]

4.2.4 Interviewanalyse in Bezug auf Ausgangsfrage 3

Ausgangsfrage 3 lautete:

> Was verstehen praktizierende Mathematiker unter formalen und formalisierbaren Beweisen, und wie bewerten sie deren Relevanz in Bezug auf epistemische Zuschreibungen in der mathematischen Praxis?

Relevante Zitate aus Interview 1

> (*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)
>
> „A formal proof is something where every step of the argument is spelled out as much as possible in a mathematical language, and where each step of the argument can be checked by analyzing the formal language in which it's written. 'Formalizable proof' is not a term that I would use often. In a sense, there has to be a kind of way to write a formal argument for any kind of proof. Of course there are computer generated proofs, where it's not a mathematician who is writing a formal argument, so one might consider that an exception or not, depending on whether you consider the algorithm that produces the computer generated proof also as a kind of formal argument or not. One can sometimes compress part of the argument in writing [not the complete formal proof], but in principle, it should always be understood that everything can be sort of decompressed to make it as detailed as one wishes.

[332] Das Streben nach tieferem mathematischen Verständnis durch konkrete Versuche, die in einem Beweis verwendeten Methoden auf andere Problemfelder zu übertragen, erhöht dabei zugleich die Souveränität des epistemischen Subjekts im Umgang mit den verwendeten Beweismethoden.

[333] Solche grundlegenden Fähigkeiten erscheinen hinsichtlich der verschiedenen mathematischen Teildisziplinen universell; so hängt die fruchtbare Verbindung von geometrischen und algebraischen Denkweisen sicher nicht vom mathematischen Spezialgebiet ab.

[One must make a] distinction between computer generated proofs as opposed to proofs done in the more traditional way.“ (Int 1, S. 306)

(*Ad Hoc*-Zwischenfrage: *Do you really believe that every proof that is accepted by mathematicians, by the community, is decompressible?*)

„Normally, one only checks the final steps, or what is new in the argument, and not what is used that was already known. These limits, the extent to which you can really expand an argument completely–in principle one would say that any argument could be expanded out and reduced to basic axioms, and then constructed. But very often from basic axioms to an actual result, there are lots of intermediate steps that rely on previous results and so on, so, in terms of algorithmic time, if you want, it is certainly not feasible to completely expand it out. So, I don't think, realistically, one would really do that all the time. Only in special cases where there is a proof which is particularly controversial, one goes back and tries to check as many steps of the chain, and realistically, it doesn't really happen. Take a proof of a kind that really involves a lot of tools. The general assumption is that things which have been used in the literature, by a lot of people, and that are consistent with a lot of other results–even in the process of checking very delicate proofs, it's not really expected that one should go back to step zero. There are just too many things that are involved to do that. I don't think anybody would really feel that it's truly necessary to do that.“ (Int 1, S. 307)

(*What do you think about the proof of the classification of finite simple groups in this context?*)

„[The proof of the classification problem of finite simple groups is] an example where you have lots of parts that are computer generated. That's a proof which is much more difficult to check, because a lot of parts involve things which are algorithmic, and in fact every once in a while, somebody finds that there's a problem. Usually, the problem is fixed, or the proof seems to be robust, but it's not the same kind of robustness that you have [in] theoretical results which have been checked against a lot of other results, and where the logical structure of the proof is more transparent. This is the main problem with this kind of partly machine generated proofs: if you could be absolutely sure that the algorithm is faultless, then [it] would be o.k., but for something which involves a lot of different algorithms doing different things, checking special cases and so on, the possibility of an oversight or something is very high." (Int 1, S. 308)

Ein formaler Beweis[334] wird hier als ein gemäß syntaktischen Schlussregeln für eine formale mathematische Sprache korrektes Argument beschrieben, in dem jeder Schlussschritt explizit gemacht ist und das nur eine gewisse Menge von Basis-Axiomen voraussetzt. Darunter fallen computergenerierte Beweise, sofern man den zugrundeliegenden, den Computer-Beweis erzeugenden Algorithmus als ein formales Argument betrachtet.

Ein Beweis ist für Interviewpartner 1 formalisierbar, wenn er bis in beliebig kleine formale Details entfaltbar („decompressable") bzw. ausweitbar („expandable") ist. Diese Wortwahl lässt offen, ob ein formalisierbarer Beweis die formalen Details bereits im engeren Sinne implizit enthält, oder ob er nur – etwa von einem hinreichend befähigten mathematischen Logiker – entsprechend vervollständigt werden kann.

Formalisierbare Beweise werden als abstraktes Paradigma[335] beschrieben, mit dem jedoch keine konkreten, expliziten Handlungsanweisungen oder -maßstäbe für die mathematische Praxis verbunden sind: Im Prinzip sollte man davon ausgehen, dass jeder mathematische Beweis formalisierbar ist; dies wird zumindest als die übliche Sichtweise in der mathematischen Praxis ausgewiesen. Dabei wird der Ausdruck „formalisierbar" in der Praxis aber kaum explizit verwendet. Die Frage, ob ein Beweis formalisierbar ist oder nicht, ist nicht Teil des mathematischen Diskurses – es wird einfach implizit angenommen, dass die Antwort darauf positiv ist bzw. zu sein hat.

Die tatsächliche Formalisierung im traditionellen Stil formulierter Beweise wird als unrealistisch, d.h. aus Zeitgründen unmöglich, beschrieben; zudem wird sie aber auch als nicht notwendig erachtet, da sie keinen epistemischen Vorteil mit sich bringt. Hier lässt sich das explizit für computergenerierte Beweise Gesagte auf formale Argumente in gewissem Sinne übertragen: ein formalisiertes Argument ist schlecht überprüfbar. Die Länge und Unübersichtlichkeit eines formalen Argumentes erhöhen die Wahrscheinlichkeit, dass Detailfehler übersehen werden. Diese können aber, im Unterschied zu einem traditionellen mathematischen Beweis, bereits starke Auswirkungen auf die Korrektheit des formalen Beweises haben. Ein formales Argument ist in diesem Sinne nicht robust genug. Dagegen ist die logische Struktur von traditionellen Beweisen transparenter. Das macht sie einerseits gegenüber kleineren Detailfehlern robust, denn der strukturelle Argu-

[334]Im Folgenden verwende ich die Ausdrücke „formaler Beweis" und „formalisierbarer Beweis" stets im Sinne des jeweiligen Interviewpartners. Die verschiedenen Verwendungsweisen werden erst bei der Reduktion auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3 zusammengeführt.

[335]Hier verwende ich den Ausdruck „Paradigma" nicht in einem speziell wissenschaftstheoretischen Sinne, etwa in dem des kuhnschen wissenschaftlichen Paradigmas, sondern in seiner engeren Wortbedeutung als „Vor- oder Leitbild" oder „Muster".

mentationsverlauf wird dadurch in der Regel nicht beeinträchtigt. Andererseits verkürzt dies die Überprüfungsdauer, da sich neue Argumentationsschritte gut von verwendeten bereits bekannten Resultaten oder Beweismethoden unterscheiden lassen. Im Detail geprüft wird nur, was neu und noch nicht etabliert ist; Resultate oder Methoden, die durch häufige Anwendung in der Literatur als hinreichend bekannt gelten dürfen und mit genügend anderen Resultaten konsistent sind, werden ohne weitere Prüfung akzeptiert.

Relevante Zitate aus Interview 2

> (*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)
>
> „A formal proof is an ideal construct. You practically never see a formal proof of anything at all, because if anything is a little bit interesting, a formal proof would be so long that you would never be able to concoct it, to write it down, then to read it and so on. So formal proofs are abstractions, like an abstract group or a topological space or whatever, but it is an abstraction which is very essential for the self-consciousness of mathematicians. It is an abstraction to which we recede each time we ever present something that we think is a correct proof. Correctness means that somewhere at the bottom there exists a formal proof, which is a translation of my or somebody else's informal proof–there it leaks, there everything is explicit, all axioms, all logical steps, and there it is a text written. A formalizable proof is exactly a correct proof which is done in a more or less accepted context, and more or less accepted context means [any] account of set theory or category theory, or something like that, plus rules of logic of such and such form, or things like that. So a formalizable proof is an acceptable proof in one of these universes. If something is obviously non formalizable, then to me it will be obviously not an acceptable proof. That would be an intuitive reasoning, or a sketch of something that might become a proof some time, but it's not a proof." (Int 2, S. 314)
>
> (*Would you say that every proof that is accepted by the community is formalizable?*)
>
> „Of course, that's my belief, and one should say that this is a hygienic belief. That's more or less a definition of what we, as mathematicians, as a community, are thinking about or speaking about when we are talking about proofs." (Int 2, S. 314)

(*Would you say that formal proving played an important role in one of these scenarios?*)

„Yes, in so far as we are really speaking about mathematicians, or aspiring mathematicians, not just students that would like to pass this particular exam and then to become journalist or something like that, formal proof played a role, although in all of the situations, except for probably Mates' situation, it was in the background. Mates is a mathematician who knows what is a proof, he can estimate what time he needs to move from the stage when he has a convincing sketch to the full proof, so certainly, the notion of formal proof is somewhere in the background." (Int 2, S. 314)

Für Interviewpartner 2 sind in einem formalen Beweis alle verwendeten Axiome und logischen Schlussschritte explizit, das verwendete Axiomensytem muss dabei ein in der mathematischen Gemeinschaft weitestgehend akzeptiertes wie das der Mengen- oder Kategorientheorie sein. Ein formaler Beweis wird dabei als abstraktes Konzept im Sinne einer idealen Konstruktion beschrieben, die schon allein aus praktischen Gründen in der Praxis konkret nicht realisierbar ist, denn formale Beweise für Theoreme der höheren Mathematik wären in der Regel zu lang und komplex, um für den Menschen kognitiv zugänglich zu sein. Formale Beweise stellen in der mathematischen Praxis ein normatives Paradigma dar, welches insbesondere als essentiell für das Selbstverständnis praktizierender Mathematiker bewertet wird.

Ein formalisierbarer Beweis wird als informelles Argument beschrieben, von dem man unter Mathematikern so spricht, als ob eine Formalisierung, also eine Übersetzung in einen zugrundeliegenden korrekten formalen Beweis, existierte. So lässt sich sinnvoll von der „Korrektheit" eines informellen Beweises, eine Eigenschaft, die für informelle Argumente nicht streng definiert ist, sprechen. Ein Beweis wird von Mathematikern als offenbar *nicht* formalisierbares Argument beurteilt, wenn es sich in zu hohem Maße auf Intuitionen beruft oder zu skizzenhaft, also in zu geringem Maße detailliert ausgearbeitet ist. Ein Beweis, der in diesem Sinne offensichtlich nicht formalisierbar ist, gilt als nicht akzeptabel und würde von praktizierenden Mathematikern zurückgewiesen.

Relevante Zitate aus Interview 3

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

"I think that's the way mathematics works. On the one hand there is a kind of general agreement among mathematicians about truth in mathematics and correctness of proofs, but when you write down proofs yourself, you always write them down in an informal way and not in a completely formalized way, so you may have overlooked things. Only if other mathematicians look at the proof–as many as possible–the certainty that the proof is correct and the theorem is true will increase. [...] A way around is to write down completely formalized proofs, but that's usually too tedious to do, or to work with computerized proofs–well, that's a new development, I have no experience with this.“ (Int 3, S. 319)

(*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)

„That every logical step is inside the proof, so it must also be very phrased in logical terms.“ (Int 3, S. 320)

(*What would you call a formalizable proof?*)

„I tend to believe that every correct mathematical proof is also formalizable, but say for the proof of Fermat's Last Theorem, it may be a very long job to do that.“ (Int 3, ebd.)

(*Would you say that the proof about the classification of finite simple groups is a formalizable proof?*)

„I may distinguish between formalizable and correct. While you are formalizing it may turn out that it's not correct, but I think in principle, it's formalizable, this classification of finite simple groups.“ (Int 3, ebd.)

(*What does 'in principle' mean?*)

„With the present technology, or just by hand, it may not be doable for one person in a lifetime and maybe even for the group of people who have been working on this it may not be doable, but with advanced future computer technology it may be doable.“ (Int 3, ebd.)

(*Would you call non-formalizable proofs still rigorous?*)

„I believe–but that's maybe somewhat naïve–that every proof is formalizable, every correct proof.“ (Int 3, S. 321)“ (Int 3, S. 321)

Ein formaler Beweis ist laut Interviewpartner 3 ein Argument, das in einer formallogischen Sprache verfasst ist, und in dem jeder logische Schlussschritt explizit gemacht wurde. Eine Definition von „formalisierbarer Beweis“ wird nicht angegeben, es werden jedoch drei Punkte bezüglich der epistemischen Relevanz von Formalisierbarkeit angesprochen.

Zunächst wird die zugleich als naiv entschuldigte Einstellung geäußert, dass jeder korrekte und auch jeder akzeptable mathematische Beweis in gewissem Sinne formalisiert werden kann, wenn auch nicht unbedingt innerhalb eines überschaubaren Zeitrahmens. Diese Einstellung basiert auf dem Glauben, dass ein generelles Einvernehmen innerhalb der mathematischen Gemeinschaft darüber herrscht, dass ein als korrekt oder akzeptabel ausgewählter Beweis zumindest im Prinzip formalisisierbar sein sollte. Die Naivität der Einstellung besteht darin, dass unklar bleibt, wie und warum sich eine solche zwar einvernehmliche, aber doch abstrakte Formalisierbarkeitsforderung in der konkreten Auswahl der akzeptierten Beweise tatsächlich niederschlägt, obwohl diese Beweise *de facto* nie (vollständig) formalisiert und häufig gänzlich informell präsentiert werden.

In Bezug auf das Begriffspaar „formalisierbar“ und „korrekt“ wird, leicht unterschiedlich zu Interview 2, zwischen Formalisierbarkeit und Korrektheit in folgendem Sinne unterschieden: Ein akzeptables informelles mathematisches Argument muss *im Prinzip* formalisierbar sein. Damit wird konkret etwas weniger als die Übersetzbarkeit in ein korrektes formales Argument gefordert: Während des Formalisierungsprozesses dürfen Fehler im Ursprungsargument aufgedeckt werden, ohne dessen Akzeptanz zu beeinträchtigen, solange diese durch hinreichend kleine argumentative Abweichungen prinzipiell „wegformalisiert“ werden könnten; hierbei wird noch nicht einmal gefordert, dass dieses Wegformalisieren mit den aktuellen Mitteln der mathematischen Forschung bereits möglich ist. Die Beziehung zwischen dem informellen Argument und seiner (potentiellen) Formalisierung wird hier also nicht so eng geknüpft wie im Fall von Interviewpartner 2.

Relevante Zitate aus Interview 4

> (*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)
>
> „In a sense, I don't know what a [formal proof is]. I'm happy when I'm convinced that something is true. No mathematician works from axioms, and clearly indicates what at each step goes into it, and what's the conclusion to the next step, it no longer works that way. The 'formal proof' is probably different for different mathematicians, you asked what it means for me, I think. It's a bit hard to tell. [...] In practice, you don't always write down every tiny detail, because that takes too much paper.“ (Int 4, S. 325)

Nur als negative Formulierung findet man hier eine der üblichen Definitionen von „formaler Beweis“ als Schritt-für-Schritt-Beweis, in dem jedes logische Detail explizit gemacht wurde. Diese Charakterisierung wird aber direkt mit der Aussage verbunden, dass formale Beweise in diesem Sinne keine Rolle für die heutige mathematische Beweispraxis spielen, und dass man die genaue Definition von „formaler Beweis“ nicht einmal kennen muss, um Mathematik erfolgreich praktizieren und andere Mathematiker von den eigenen Resultaten überzeugen zu können. Es wird dennoch indirekt angesprochen, dass die intendierte Rolle formaler Beweise für die mathematische Praxis die eines Leitbildes für das gute Führen von Beweisen sein mag. In der Praxis spielt „formaler Beweis“ diesbezüglich tatsächlich allenfalls die Rolle einer Bezeichnung. Dies hat zwei Gründe: Zum einen sind formale Beweise unökonomisch, sie verbrauchen „zuviel Papier“, also zuviel Zeit zum Aufschreiben, Begutachten und lesendem Nachvollziehen. Zum anderen sollten Richtlinien für eine gute Beweisführung zumindest im Detail subjekt-sensitiv aufgefasst werden, sie werden von Mathematiker zu Mathematiker verschieden ausformuliert.

Relevante Zitate aus Interview 5

> (*Did you ever experience a similar scenario?*)
>
> „I personally don’t really believe in written proofs because it is only theoretically possible to check a proof line by line, and so get confident that it is correct. [...] I don’t believe that it is possible to have a really big theorem checked line by line.“ (Int 5, S. 327)

> (*You said that a mathematical proof is not a formal proof, and that a mathematical proof does not work in a formal way–what do you mean by ‘formal proof’?*)
>
> „Well, you see, [...] I even teach students what formal proof is, we are supposed to know what proof is. And the definition as such is that you have some sort of well written system of axioms that are in the foundations of your theory, or are given to you, and you have sort of fixed or well understood inference rules, and you work within this framework, and step by step produce the facts, and end up with a theorem. It is a grossly simplified definition of what happens in practice. Of course in practice, we know that there are now proofs that are ten thousand pages long. It is now a kind of matter of belief that people really believe that basically it is correct.“ (Int 5, S. 329)

> (*Would you say that, in principle at least, all mathematical proofs that are accepted are formalizable?*)
>
> „I don’t expect proofs of real mathematics, mathematics that are of interest to people, that people work on to extract knowledge, and not just test examples or highschool examples, to be formalizable–in real terms. Even if it is possible

in theory, but even this I doubt, it is clearly impossible in practice to put anything real in a formal proof. In practice, there is always room for small errors, because many people are working on this, because it is a multi-layer system. Even if you are hundred percent sure in these last steps that you yourself have done, you used someone's previous small blocks and statements. [In the end, you have to clarify] whether you understood the meaning of this in the same way, or whether there was a slight difference in understanding. So, there is always some room for your system having a probability of some error inside. Each of this errors could be corrected, and basically it is a correct system. But correct in the same way as a complex system written down by maybe hundreds of people: It is written down as a formal system, one by one, and each of this can be checked and understood. But altogether it is above of our ability to understand." (Int 5, S. 331)

[In einem Nachtrag nach Beendigung dieses Interviewabschnittes:]

„I think that we still do believe–maybe I shouldn't think of myself as a mathematician if I don't–that the proofs are formalizable. I think we act on the assumption that the proofs we produce are formalizable. Although, of course, formalizable not in real time." (Int 5, S. 332)

(*A number of participants from the survey study answered in the following way: [Beschreibung des Antwortverhaltens von Cluster 1 und 3 zu Szenario 1] Would you say these answers are consistent? Would you briefly explain your own answers [entspricht Cluster 2]?*)

„Some statements can be false in their formal interpretation, but in the way of what you really want to know about the things they can be and should be corrected; in this form they're right. If the theorem has some history, if it is not just some superficial statement which has answers 'yes' or 'no', and that actually nobody worked with, then of course the right answer would be that once you have shown a counter-example, then you give up and say 'that's it'. But if it is really a deep statement, then it often can be a case that it can be salvaged from an existing proof." (Int 5, S. 333)

Ein formaler Beweis wird im Sinne der mathematischen Logik definiert, eine explizite Definition von „formalisierbar" wird nicht gegeben. Die weiteren Ausführungen lassen aber Schlüsse auf notwendige Bedingungen für die Formalisierbarkeit eines Beweises zu.

Die epistemische Bedeutung formaler Beweise wird hauptsächlich in Bezug auf die Ausbildung von Mathematikstudenten hin betont – der formale Beweis dient hier als Lehr- und Lernvorlage dafür, „was ein Beweis ist“. In Bezug auf die reale mathematische Praxis wird das Konzept des formalen Beweises aber als eine zu grobe Vereinfachung des dort verwendeten Beweiskonzeptes angesehen.

Die Eigenschaft der Formalisierbarkeit im Sinne einer Schritt-für-Schritt-Übertragbarkeit in ein formales Argument wird als ein abstraktes, aber eigentlich überholtes Paradigma der mathematischen Beweisführung beschrieben, welches kein direktes Prüfkriterium für akzeptable informelle Beweise liefert. Interessante mathematische Beweise der aktuellen Forschungspraxis, die von epistemischer Bedeutung sind, werden sogar als nicht formalisierbar angesehen, ohne dass deshalb die Stabilität des mathematischen Wissenskorpus angezweifelt würde.

Es werden zwei verschiedene Arten des „Nicht-formalisierbar-Seins“ angesprochen: erstens die epistemisch-temporale Unmöglichkeit, umfangreiche Beweise der aktuellen mathematischen Forschung innerhalb des Wirkungszeitraums eines Mathematikers oder einer Forschungsgruppe zu formalisieren. Zweitens wird aber auch die epistemische Unmöglichkeit betont, die Komplexität der Verwebung von alten mit neuen Techniken und Resultaten innerhalb eines Beweises tief genug zu durchdringen, wie es für eine vollständige Formalisierung nötig wäre. Für eine vollständige Formalisierung eines informellen Beweises reicht die Formalisierung aller verwendeten Resultate und Techniken für sich und, davon unabhängig, die Formalisierung der neu hinzugefügten Beweisschritte nicht aus. Darüber hinaus müsste jede verwendete Definition sowie jeder anderweitig bereits bewiesene Satz und dessen Beweis im *setting*[336] des in Frage stehenden neuen Beweises hinreichend gut und ggf. sogar äquivalent reformuliert bzw. rekonstruiert werden. Die Möglichkeit dazu wird im dritten Zitat aber mit Verweis auf die gewachsene Komplexität und Ausdifferenzierung des mathematischen Wissenskorpus allgemein in Frage gestellt.

Im Nachtrag wird die soeben dargestellte Einschätzung der Relevanz von Formalisierbarkeit leicht revidiert: Die mathematische Gemeinschaft beruft sich im Kern ihres Selbstverständnisses immer noch auf die *prinzipielle* Formalisierbarkeit ihrer Beweise; die Einschränkung „prinzipiell“ wird gemeinhin nur als epistemisch (im Sinne eines für das epistemische Subjekt unüberschaubaren Zeitrahmens) aufgefasst. Die Annahme, dass alle akzeptierten Beweise zumindest prinzipiell formalisierbar sind, bildet einen theoretischen Ausgangs- und Zielpunkt der handelnden mathematischen Forschungspraxis.

[336]Vgl. S. 170.

Relevante Zitate aus Interview 6

(*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)

„Huh, formal proof. Actually, I don't think I ever used that phrase. Let me explain what I would not consider a formal proof. A proof where there is somewhere the sentence 'it is easy to see that' or 'it is left as an exercise to the reader that' is not a formal proof. A formal proof is a proof that everyone working in the field from graduate students–or maybe even master students–would recognize as a correct proof. I mean, this is probably not a definition that you can really do something with. I think a proof tries to explain why the theorem is true, or why the author thinks the theorem is true, and so, I would rather say what is a *good proof* than what is a formal proof. I know about this sort of computer aided proofs that are terrible, and they're probably quite formal. I think that is a formal proof, and first of all I know nothing about this kind of things, and second I think that it is completely useless for serious mathematics." (Int 6, S. 339)

(*Can you make any sense of the term 'formalizable proof'?*)

„That is maybe my good proof. That would mean a proof that could be made into a formal proof, for which you could figure out an algorithm to make it a formal proof. I think about what I learned about computer programming long time ago, that a computer language, as these rules, can be something or something else. [...] The correctness of the programme comes from the fact that these rules eventually end up with sort of the empty set, and in some sense that is maybe also mathematics, that if you really understand it, it turns out to be nothing at all. [...] The formalized proof would be the whole reduction of the statement of the theorem, through all these rules, and bringing in the axioms et cetera, to something that would be empty set in the end. Of course nobody does that, and then a formalizable proof would be sort of a proof that would help ordinary people to do this process, sort of a set of rules that would enable you to get at this formal things in finite time, in the sense of years or something." (Int 6, S. 340)

(*Would you say formal proving played a role in any of these scenarios?*)

„No. Certainly not. Otherwise they would have known it for sure all the time, if they had been able to give a formal proof. I think actually that if you

> take any theorem here it's impossible to write down a formal proof, humanly speaking. Maybe it's possible to write a programme." (Int 6, S. 341)
>
> (*Would you say that all accepted proofs in mathematics are formalizable?*)
>
> „It cannot be that all [accepted] proofs are formalizable. If formalizable actually assumes that the theorem is true, then it can't be true. But I think they look like formalizable proofs. I don't know how they do that, but I think that all the people who have looked at these proofs think they are formalizable." (Int 6, S. 341)

Interviewpartner 6 betont, dass der Ausdruck „formaler Beweis" in der mathematischen Praxis in dem Sinne ungebräuchlich ist, dass die Unterscheidung zwischen formalen und informellen Beweisen nicht dazu verwendet wird, eine der beiden Beweisarten vor der anderen als besonders nützlich oder wertvoll auszuzeichnen. Stattdessen wird von *guten Beweisen* als einer ausgezeichneten Klasse von informellen Beweisen gesprochen, deren besonderes Merkmal ihre Erklärungsleistung hinsichtlich des bewiesenen Theorems ist. Diese Erklärungsleistung lässt sich im Sinne der in den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2 (vgl. S. 174) spezifizierten Redeweise von „Wissen-warum" deuten.

Ein formaler Beweis wird zunächst als ein mathematisches Argument beschrieben, dass keine substantiellen Lücken enthält, und das von hinreichend hoch qualifizierten Mathematikern des zugehörigen mathematischen Spezialgebiets als korrekt erkannt wird. Diese Beschreibung wird später durch Rückgriff auf die Terminologie formaler Sprachen und Ableitungssysteme verschärft: Ein formaler Beweis reduziert das zu beweisende Theorem auf die zugrundeliegenden Schlußregeln und Axiome, indem er dieses als regelgerechte formale Ableitung aus einer leeren Prämissenmenge[337] ausweist. Tatsächliche Formalisierungen komplexerer mathematischer Resultate werden als außerhalb menschlicher Möglichkeiten eingeschätzt, und liegen, obwohl sie sicheres Wissen garantieren könnten, nicht im Fokus des mathematischen Interesses. Im Gegenteil werden etwa computergestützte Beweise, die auch komplexe Formalisierungsprojekte verwirklichen können, als für eine seriöse mathematische Praxis nutzlos bewertet. Ein formaler Beweis ist zwar eine objektiv hinreichende Rechtfertigung für das, was auch ein guter Beweis vermitteln soll, nämlich die zwingende Wahrheit des bewiesenen Theorems in Bezug auf die zugrundegelegten Axiome. Konkrete formale Beweise rechtfertigen dies einfach durch ihre Existenz, die zeigt, dass das Theorem ohne weitere Annahmen allein aus den zugrundegelegten

[337] Mit Prämissen sind hier Annahmen gemeint, die zusätzlich zu den verwendeten mathematischen Axiomen gemacht werden.

Axiomen logisch folgt. Im Unterschied zu einem guten Beweis machen sie für einen praktizierenden Mathematiker in der Regel jedoch nicht subjektiv einsichtig, warum das so (und nicht anders) ist.

Ein formalisierbarer Beweis wird als ein von einem einzelnen Mathematiker dem Umfang nach prinzipiell nachvollziehbares Argument definiert, das durch einen Algorithmus – also mechanisch – in einen formalen Beweis überführt werden kann. Ein formalisierbarer Beweis stellt selbst eine Art Ableitung in einem spezifischen, auf ein formales axiomatisches Basissystem reduzierbaren Regelsystem dar. In diesem Sinne hat ein formalisierbarer Beweis stets eine wahre Konklusion, was als Begründung dafür angeführt wird, dass nicht alle akzeptierten Beweise in der mathematischen Praxis tatsächlich formalisierbar sein können. Im Rückschluss werden also auch Beweise akzeptiert, die eine falsche Konklusion besitzen und daher fehlerhaft sein müssen. Eine zuverlässige direkte Prüfung der Formalisierbarkeit eines Beweises scheint jedoch für die Beurteilung von mathematischen Beweisen in der Praxis gar nicht relevant zu sein. Formalisierbarkeit spielt eher implizit eine Rolle für die Akzeptanz mathematischer Beweise in der Praxis, indem akzeptable mathematische Beweise in gewisser Hinsicht, also vermittels anderer Gütekriterien, auf im engeren Sinne formalisierbare Beweise verweisen, ohne dass *ad hoc* explizit beschrieben werden könnte, wie dies von Statten geht. Bildlich gesprochen „sehen akzeptable Beweise formalisierbar aus“, und überzeugen so Mathematiker von ihrer Formalisierbarkeit.

Reduktion auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3

Die Einzelinterpretationen der Zitate lassen sich auf folgende Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3 reduzieren:

Ein *formaler Beweis* wird im allgemeinen als korrekte Ableitung in einem von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierten formalen Axiomen- und Regelsystem, etwa einem gebräuchlichen formalen System der Mengenlehre, beschrieben.[338] Formale Beweise werden auch mit Computerbeweisen oder computergestützten Beweisen in Verbindung gebracht: Mit diesen teilen sie, einen fehlerfreien Computeralgorithmus vorausgesetzt, die Eigenschaft, lückenlose formal korrekte Argumente zu sein, die in einem mathematisch präzisen Sinne für ihre Konklusion garantieren. In erkenntnistheoretischer Terminologie sind sie damit als mögliche Kandidaten für die epistemische Rechtfertigung mathematischer Aussagen in zweierlei Hinsicht infallibel: Sie sind vor dem Hintergrund des gewählten formalen Systems unangreifbar und haben stets, die Wahrheit der Axiome vorausge-

[338] Also im Sinne der bisherigen Verwendung des Ausdrucks „formaler Beweis“ im Rahmen dieser Arbeit, vgl. S. vii.

setzt, wahre Konklusion. In der Regel sind formale Beweise jedoch unübersichtlich, ihre logisch-argumentative Struktur ist als Ganze nicht transparent, und ihre systemrelative formale Korrektheit ist wenig robust gegenüber Detailfehlern.

Auf der einen Seite wird der formale Beweis als ideale Form des mathematischen Beweisens beschrieben, als ein abstraktes Leitbild, das in gewisser Hinsicht jedem konkreten mathematischen Beweis zugrunde liegt. Dieses Idealbild des mathematischen Beweises wird auch als Lehr- und Lernvorlage zu Beginn des Mathematikstudiums verwendet; ein Forschungsmathematiker arbeitet damit jedoch nicht im Sinne einer von außen vorgegebenen Vorlage, sondern hat das Konzept des formalen Beweises in der Regel internalisiert. Die intendierte epistemische Funktion des formalen Beweises besteht dabei darin, das ungenaue Konzept der Korrektheit informeller Beweise zu schärfen und so die Kohärenz oder sogar Konsistenz des *de facto* auf informellen Beweisen aufbauenden mathematischen Wissenskorpus zu sichern.[339] Dieser intendierten Funktion steht aber die bereits erwähnte epistemische Unzulänglichkeit komplexer formaler Beweise entgegen, die je nach Komplexität sowohl einzelne epistemische Subjekte als auch ganze Forschungsgruppen oder Mathematikergenerationen betrifft. Sie besteht zum einen in dem Mangel an struktureller Transparenz, welche die argumentative Gesamtstruktur eines komplexen formalen Beweises schwer erfassbar macht, und in einem Mangel an Robustheit formaler Beweise gegenüber Detailfehlern. Zum anderen besteht diese epistemische Unzulänglichkeit darin, dass eine konkrete Formalisierung der meisten Beweise, die in der mathematischen Forschungspraxis tatsächlich als akzeptabel gelten, aus Zeit- und Komplexitätsgründen zumindest epistemisch unmöglich ist.

Auf der anderen Seite wird der Ausdruck „formaler Beweis“ (in der oben beschriebenen Bedeutung) in der mathematischen Praxis daher eher als eine *Bezeichnung* für das Leitbild guter mathematischer Beweisführung gebraucht. Diese Bezeichnung wird im aktuellen mathematischen Forschungsdiskurs kaum noch verwendet, taucht jedoch immer wieder in Aussagen zum Selbstverständnis der mathematischen Gemeinschaft auf.[340]

[339] Die vage Formulierung „Kohärenz oder sogar Konsistenz“ wurde von mir mit Bedacht gewählt. Die Interviewpartner haben keinen der beiden Ausdrücke explizit verwendet, und wären wörtlich vielleicht besser durch die Wendung „ein gewisser Zusammenhalt“ wiedergegeben. Eine Spezifizierung der Art dieses Zusammenhalts wirft aber sofort die Frage nach Kohärenz versus Konsistenz auf. Nun ist historisch die besonders von David Hilbert starkgemachte Konsistenzsicherung durch Formalisierung aber prominent an den Gödelschen Sätzen gescheitert, weshalb man hier besser von Kohärenz statt Konsistenz sprechen sollte. Andererseits scheinen Mathematiker eher eine pragmatisch abgeschwächte Konsistenzkonzeption, etwa im Sinne von „konsistent auf Widerruf“, im Sinn zu haben, wenn sie von Konsistenzsicherung durch Formalisierbarkeit sprechen. Ich möchte diese Debatte jedoch weder hier noch an anderer Stelle vertiefen, und die entsprechende Einordnung der an dieser Stelle angestellten Überlegungen explizit offen lassen.

[340] In Bezug auf die in Kapitel 3 behandelten Umfrageergebnisse passt diese Diagnose zu den in 3.1.4 und 3.3.1 diskutierten Spannungen zwischen den Antworten auf Fragen zum abstrakten Beweisbegriff und der Interpretation der Antwortcluster zu den Szenarien .

In Bezug auf die Frage nach der Bedeutung von „formalisierbarer Beweis“ erweisen sich die Aussagen der einzelnen Interviewpartner auf der zweiten Interpretationsebene als besonders spannungsreich: Der Ausdruck „*formalisierbarer Beweis*“ tritt in zwei unterschiedliche Sprechweisen auf, für die ich im Folgenden eine Unterscheidung zwischen *ontischer Formalisierbarkeit* und *epistemischer Formalisierbarkeit* vorschlage. Diese beiden unterschiedlichen Formalisierbarkeitskonzepte werde ich im Rahmen der hier angestrebten Reduktion der einzelnen Interviewanalysen auf Kernaussagen nur umschreiben, eine explizite Definition erfolgt unter Aspekt (VII) in Abschnitt 4.3.

Ein *ontisch formalisierbarer Beweis* ist ein informelles mathematisches Argument, dessen implizite Argumentationsschritte durch sprachliche Verfeinerung der Argumentation, also z. B. durch Trennung von sprachlichen Argumentationsebenen, hinreichend explizit gemacht werden können, so dass das gesamte Argument anschließend rein mechanisch in einen im obigen Sinne formalen Beweis überführbar ist. Ontische Formalisierbarkeit kann als spezielle Variante der in Abschnitt 2.3.1 eingeführten Formalisierbarkeit$_{\text{inv}}$ verstanden werden, die einen Formalisierungsalgorithmus voraussetzt, der geeignete Meta-Routinen für die unterschiedlichen Argumentationsebenen enthält.[341] Ein ontisch formalisierbarer Beweis ist in jedem Fall ein deduktiv korrekter Beweis, d.h. die Wahrheit seiner Prämissen erzwingt gemäß den erlaubten Schlussregeln logisch die Wahrheit seiner Konklusion. In der mathematischen Praxis wird implizit gefordert, dass ein informeller Beweis zumindest im Prinzip ontisch formalisierbar ist. Die tatsächliche ontische Formalisierbarkeit wird hingegen in der Regel nicht gefordert, und könnte bei komplexeren Beweisen in angemessener Zeit auch nicht überprüft werden.[342] Die Bedeutung von „im Prinzip ontisch formalisierbar“ kann im Sinne einer epistemischen Modalisierung von „ontisch formalisierbar“ analysiert werden. Dies erzeugt eine eigenständige Sprechweise von Formalisierbarkeit:

Ein *epistemisch formalisierbarer Beweis* soll ein geeignetes Mitglied der mathematischen Gemeinschaft davon überzeugen können, dass er durch angemessene Modifikation in einen ontisch formalisierbaren Beweis überführt werden kann. Er soll also für ein geeignetes Mitglied der mathematischen Gemeinschaft so aussehen, als ob er ontisch formalisierbar wäre. Ein epistemisch formalisierbarer Beweis ist prinzipiell fallibel: So können etwa lokal[343] inkorrekte Beweise als epistemisch formalisierbar gelten.

Das Verhältnis dieser beiden Formalisierbarkeitskonzeptionen im Hinblick auf die Frage nach der Relevanz formalisierbarer Beweise für epistemische Zuschreibungen in der

[341] Vgl. insbesondere das zweite Zitat aus Interview 6.

[342] Dies schließt nicht aus, dass ein Beweis, der sich offenbar als prinzipiell nicht formalisierbar herausstellt, allein aus diesem Grund zurückgewiesen werden kann.

[343] „Lokal“ ist hier in Bezug auf einzelne Detailschritte des Beweises, im Unterschied zur globalen Argumentationsstruktur, gemeint.

mathematischen Praxis kann unter Berücksichtigung der empirischen Ergebnisse zu den anderen drei Ausgangsfragen, insbesondere der im folgenden Abschnitt 4.2.5 dargestellten Analyse zu Ausgangsfrage 4, philosophisch genauer analysiert werden (vgl. Aspekt (VII) in Abschnitt 4.3). Den bisherigen Überlegungen könnte man im Rahmen einer rein semantischen philosophischen Analyse zunächst dadurch gerecht werden, dass die ontische Formalisierbarkeit eines Beweises ein notwendiges Kriterium für die Bedeutung von „akzeptabler Beweis“ und damit auch ein notwendiges Kriterium für beweisbasierte epistemische Zuschreibungen darstellt. In Bezug auf die Akzeptanzmechanismen für informelle Beweise in der mathematischen Praxis spielt ontische Formalisierbarkeit jedoch eher die Rolle eines abstrakten normativen Paradigmas: Eine Explikation von „ontisch formalisierbar“ liefert weder direkte Prüfkriterien im Sinne des evaluatorischen Projekts einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik, noch gibt sie im Sinne des explanatorischen Projekts hinreichenden Aufschluss über die tatsächlichen Bedingungen für das Vorliegen beweisbasierten Wissens oder beweisbasierter Rechtfertigung in der mathematischen Praxis. Ein geeigneteres notwendiges Kriterium für die Akzeptanz informeller Beweise und darauf basierte positive epistemische Zuschreibungen im Rahmen einer sozio-empirisch informierten philosophischen Analyse stellt dagegen epistemische Formalisierbarkeit dar.

4.2.5 Interviewanalyse in Bezug auf Ausgangsfrage 4

Ausgangsfrage 4 lautete:

> Was sind die für epistemische Zuschreibungen relevanten Charakteristika akzeptabler informeller Beweise, und welche Rolle spielen dabei spezifische kontextuelle Faktoren?

Relevante Zitate aus Interview 1

> (*Did you ever experience a similar scenario?*)
>
> „There's some degree of certainty with which we accept that something is proved. And of course this goes in various stages. Sometimes one convinces oneself, you convince yourself that you have an argument for something, that's the first step. Then, you check details in writing it up, that's the second step. Then you communicate it to other mathematicians, maybe in talks or in some [other] ways, and this is another step in gaining some more degrees of confidence about whether something is true. And there's the peer reviewing

process, getting something published, that's another step and then, even after something is published, there's continuous checking by people who use that result, and so on, so there are a lot of different stages or degrees of certainty that one has about whether something is true." (Int 1, S. 305)

(*Would you say that a counter-example is a better warrant for knowledge than a direct proof?*)

„A proof typically has to give a very general argument that covers a large number of cases." (Int 1, S. 311)

(*One participant of the survey study gave the following comment:* How important is the Jones Conjecture? How large is the community? *What do you think about this?*)

„If there are a lot of people who are interested in whether a certain statement is true or false there will be a lot more people checking the proof that is given, because a lot more people be interested in using the result. So, the likelihood that if there is a problem, it will be spotted, is much more likely. So, I think this is the reason why it may be relevant to ask this question." (Int 1, S. 311)

Das erste Zitat legt nahe, dass informelle Beweise in der mathematischen Praxis einen graduellen Rechtfertigungsstatus besitzen. Dieser lässt sich in grobe, relativ universelle Stufen einteilen, etwa: „Beweisidee ist subjektiv überzeugend", „Beweisidee hält genauerer Prüfung beim detaillierteren Aufschreiben stand", „Beweis wurde in Vortragsform präsentiert und angenommen", „Beweis wurde in Publikationsform präsentiert und angenommen" und „Kernargumentation und bewiesenes Resultat bewähren sich in unterschiedlichen Anwendungen". Innerhalb dieser Stufen ist die Sicherheit, die ein Beweis für die Wahrheit seiner Konklusion bietet, gemäß dem dritten Zitat jedoch von situativen Parametern abhängig, etwa von der Größe der Fachgemeinschaft des jeweiligen Teilgebiets der Mathematik, dem der Beweis thematisch zuzuordnen ist, oder von der Stärke des Interesses daran, das bewiesene Resultat in unterschiedlichen Kontexten zu nutzen. Ein Beweis gilt allgemein als akzeptiert, wenn er einen bestimmten Schwellenwert an Sicherheit bezüglich der Wahrheit der bewiesenen Aussage erreicht.[344] In diesem Sinne ist in Bezug auf beweisbasierte epistemische Zuschreibungen weniger ein einzelnes, konkretes sprachlich verfasstes Argument als vielmehr der Beweis*prozess* relevant. Ein wesentlicher

[344] Anhand der zu Ausgangsfrage 1 betrachteten Zitate aus Interview 1 wurde bereits diskutiert, dass dieser Schwellenwert nicht global festgelegt ist, sondern situativ variieren kann.

Teil dieses Prozesses wird durch kommunikativen Austausch zwischen Mathematikern bestimmt.

Weiterhin deutet das zweite Zitat an, dass die in typischen Beweisen der mathematischen Praxis geführten Argumentationen sich durch möglichst allgemeingültige Schlüsse auf hoher begrifflicher Ebene auszeichnen, um möglichst viele formal unterschiedliche Fälle inhaltlich und argumentativ in einem Argumentationsschritt zu bündeln. Dies unterscheidet die typischen Beweise von formalen oder weitgehend formalisierten Beweisen, insbesondere wenn letztere aufgrund ihrer hohen Komplexität computergestützt entwickelt wurden: Formale Beweise beruhen in der Regel auf vielen, einzeln betrachtet sehr einfachen Schlüssen auf niedriger begrifflicher Ebene, nämlich der Ebene der Grunddefinitionen und Axiome. Im Falle computergestützter Beweise wird die Komplexität der formalen Argumentation darüber hinaus in der Regel durch eine große Anzahl von betrachteten Fällen reduziert.

Relevante Zitate aus Interview 2

> (*Would you like to comment on the scenarios?*)
>
> „You're trying to be sociologically precise about the procedure of acceptance of the proof. You're considering the game between two players, in which the notion of truth is kind of thrown like a ball, and your asking for changes of the psychological attitudes of one of the players after each set. To me, that's not an appropriate context for studying the social acceptance of proof. In real life, there are more than two players. The attitudes do not change as fast as you assume. At almost no moment, the attitudes are crystallized. [. . .] So my general comment is that the situation is much more complicated, involves more players and more time, and involves more complex psychological attitudes.“ (Int 2, S. 312)
>
> (Weiter zu: *Would you like to comment on the scenarios?*)
>
> „For example, a proof can prove the right thing but contain mistakes. They can be serious, and nevertheless, the basic [idea] can be sound. Or, the mistake can be serious, but the proof when corrected might prove something less general than the author initially conceived. Actually, they would discover new things that were not known before this alleged proof appeared or things like that.“ (Int 2, S. 312)

(*Did you ever experience a similar scenario?*)

„In my published papers were a couple of mistakes and one mistake, which was found very late after the publication and the general acceptance of the proof, fifteen years or something like that. Fortunately, already the person who found it was able to sketch a roundabout way to sort of not correct this mistake, but sort of bypass it by slightly changing the intermediate statement. Then another person was able to prove that this intermediate statement is still correct although my proof was wrong, so even the whole issue was correct, so I was very much relieved about it. And one paper contained the most stupid mistake one can imagine. I used [some false elementary identity]. But it was found not in this way, not that somebody found that I used this stupid identity. My statement said that for [a set of cases], something is correct. And [a graduate student of mine] found out that [for some cases], everything seems o.k., but for [one case], something is wrong, geometrically. It was some geometric picture. I was totally astounded, I looked through the paper and didn't find the mistake, and I looked through again, and then found the place. And when I had corrected it, then really [the cases for which everything seemed o.k. were the only cases] for which the statement was true. By general disposition, I'm very tolerant to honest mistakes. That's not a problem that a person made a mistake in his or her published work. The problem is how a person reacts on this mistakes, the problem is how serious it is in the sense that it can be avoided or corrected or things like that.“ (Int 2, S. 315)

(*A more abstract issue behind scenario 1 is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this issue?*)

„In all scenarios, what you describe is kind of the first steps of a newborn proof, and working on this first steps you usually don't know whether it's a proof or not. It was in the case of the exam: something quite standard, something that has been written down, checked, explained to students many, many times, so the professor knows, is convinced, believes, everything, that this theorem is true, whereas the student himself probably is very unsure about it. What he knows is that he must explain this proof at the test in a convincing way. Hardly he knows more about it unless he is a born mathematician, then he can have stronger convictions.“ (Int 2, S. 316)

(*One participant of the survey study gave the following comment:* How important is the Jones Conjecture? How large is the community? *What do you think about this?*)

„The process by which a statement is verified is a certain collective verification process. The size of the collective, and in particular the fact whether there are good, honest professionals in the [community]–it depends on the importance of something. If just one person asked the question, another proved it and a third one checked it, probably the community is not big enough in order to convince everybody else that everything is o.k.. So, the importance of the question is a parameter which influences the [number] of people.“ (Int 2, S. 317)

Auch hier wird der Entwicklungs- („first steps of a newborn proof“) und Prozesscharakter von in der mathematischen Praxis als akzeptabel geltenden Beweisen im Sinne eines kollektiven sozialen Verifikationsprozesses mathematischer Aussagen sowie die Fallibilität akzeptabler Beweise betont. Beweisbasierte epistemische Zuschreibungen werden sehr feinkörnig auf einer kontinuierlichen Bewertungsskala bewertet, entsprechend finden kaum sprunghafte, plötzliche Veränderung dieser Urteile statt (auch wenn sich der Informationsstand des Urteilenden abrupt ändert).

Die Äußerungen zur epistemischen Relevanz von Fehlern, Lücken oder Ungenauigkeiten in Beweisen und das im dritten Zitat erläuterte Beispiel lassen sich als Gütekriterien für die Fehlerrobustheit akzeptabler informeller Beweise interpretieren:

1. Die Argumentationsschritte sollten auf einer geeignet hohen begrifflichen Ebene formuliert sein, und

2. der Argumentationsgang sollte nicht nur in voneinander unabhängige Teilschritte, sondern durch geeignete Lemmata (Zwischenresultate) auch in *Sinnabschnitte* eingeteilt sein,

damit neue Beweistechniken unabhängig vom vorliegenden Argument in anderen Kontexten verwendet werden können, damit die Kernargumentation kleineren Ausführungsfehlern besser standhält, und damit das Argument bei schwereren auftretenden Fehlern durch geeignete Modifikationen repariert werden oder auch dann neue Erkenntnisse liefern kann, wenn sich die Beweisstrategie als nicht zielführend erweist. Selbst ein Beweis, der ernsthafte Fehler enthält, kann also epistemischen Wert besitzen.[345]

[345] Aus diesem Grund werden tatsächlich auch bekannterweise fehlerhafte mathematische Beweise, die im Rahmen des in der mathematischen Gemeinschaft üblichen Begutachtungsprozesses abgelehnt wur-

Auch deuten die Zitate darauf hin, dass die in der mathematischen Praxis tatsächlich angewendeten Kriterien für die Akzeptanz von Beweisen und für darauf basierte epistemische Zuschreibungen durch eine Vielzahl von kontextuellen Faktoren beeinflusst sind. Dazu gehören Zeitrahmen, komplexe psychologische Einstellungen der einzelnen Beteiligten, die Größe der themenspezifischen mathematischen *community*, die Wichtigkeit und Tiefe des zu beweisenden Theorems, das Maß an Expertise und wissenschaftlicher Redlichkeit der einzelnen Beteiligten und vor allem eine ganze Reihe von Beteiligten. Das erste Zitat legt insbesondere nahe, Beweisprozesse als Abfolge von kommunikativen Handlungen zu betrachten, an denen unterschiedliche Subjekte beteiligt sind. In einer konkreten Situation, in der eine epistemische Zuschreibung aufgrund eines präsentierten Beweises getätigt oder bewertet wird, spielen mehrere Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft eine Rolle: Diejenigen, die an dem Beweis oder Teilen des Beweises mitgearbeitet haben, diejenigen, die Teile davon bereits überprüft haben, etwa Gutachter einer Zeitschrift, sofern es sich um einen zur Publikation eingereichten Beweis handelt.

Relevante Zitate aus Interview 3

> (*Did you ever experience a similar scenario?*)
>
> „If it is a theorem which has been used often, then if the theorem is wrong, the chance is big that by using the theorem some contradiction has come up, but if the theorem has not been used often then it may have remained like this until someone is wanting to use it and checks the proof.“ (Int 3, S. 320)
>
> (*A more abstract issue behind scenario 1 is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this issue?*)
>
> „A theorem is true if the proof is correct, and the probability that the proof is correct increases as more people have looked at a proof, not [only] more but also better mathematicians, so maybe the better journals [work with] better referees. For a very important result there is a whole team of referees, and if the referees agree, such a big high level team, then the probability is very high that it is true. But, on the other hand, if the proof is very long and complicated and technical, of course then there is again more chance that something has been overlooked.“ (Int 3, S. 321)

Diese Zitate aus Interview 3 weisen auf eine Korrektheits*wahrscheinlichkeit* als Charakteristikum akzeptabler informeller Beweise hin; obwohl der formale Korrektheitsbegriffs

den, über spezielle Medien wie die Online-Zeitschrift *Rejecta Mathematica* veröffentlicht; vgl. Wakin, Rozell, Davenport & Laska [126].

für informelle Argumente nicht zur Verfügung steht, existiert also ein Maß für seine Richtigkeit. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist abhängig von kontextuellen Faktoren wie der Anzahl und Güte der Gutachter eines zur Publikation eingereicheten Beweises oder dem Ausmaß der Verbreitung des bewiesenen Theorems nach der Publikation. Dennoch steht etwa die Relevanz des bewiesenen Theorems in keinem allgemeinen proportionalen Verhältnis zur Korrektheitswahrscheinlichkeit eines Beweises. Dies ist dadurch begründet, dass bei der Begutachtung zwei konfligierende Prozesse stattfinden: Einerseits werden Beweise von besonders relevanten, interessanten Theoremen von besonders vielen und hoch qualifizierten Mathematikern nachvollzogen, was ihre Korrektheitswahrscheinlichkeit erhöht. Je komplizierter der Beweis, desto schwieriger wird es andererseits, ihn zu verstehen und mögliche Fehler darin zu entdecken.

Relevante Zitate aus Interview 4

> (*What is a formal proof or a formal derivation–what does it mean to you?*)
>
> „You ask what it means for me–it's a bit hard to tell. I have to be convinced that it's true, I have to be able to look at it at a later time, and still be able to reproduce the arguments, I have to be able to understand both the global picture, to have an overview of the proof, explain to myself what the global idea is and why it works like this, and also to be able, and that's the details, to follow the proof from step to step, the logical consequences." (Int 4, S. 326)

Die zitierte Aussage lässt folgende Deutung zu: Interviewpartner 4 spricht hier nicht allgemein von formalen, sondern von *akzeptablen oder überzeugenden formalen* Beweisen. Dabei liegt der Schwerpunkt der aufgezählten Charakteristika jedoch eher auf „akzeptabel" und „überzeugend" als auf „formal". Ein akzeptabler mathematischer Beweis muss demnach einen überzeugungsbildenden Prozess hinsichtlich der Konklusion in Gang setzen. Dazu muss er einerseits als ganzer übersichtlich sein, andererseits aber auch ein detaillierteres schrittweises Nachvollziehen ermöglichen. Um eine positive epistemische Zuschreibung zu rechtfertigen, muss ein akzeptabler Beweis mathematisches Verständnis der Kernargumentation vermitteln[346] und so den globalen Argumentationsgang nachhaltig erfassbar machen.

Eine kontextuelle Abhängigkeit der Standards für akzeptable Beweise wird nicht explizit angesprochen, die Betonung der „Ich-Perspektive" sowie die Formulierungen „*be able* to reproduce the arguments / to follow the proof from step to step" und „*explain*

[346] Dieses mathematische Verständnis lässt sich im Sinne der Interviewanalyse zu Ausgangsfrage 2 zur Bedeutung des Ausdrucks „Wissen-warum" in der mathematischen Praxis verstehen.

to myself what the global idea is", deuten jedoch auf eine (aus allgemeiner erkenntnistheoretischer Sicht für epistemische Rechtfertigung charakteristische) Personenrelativität dieser Standards hin.[347]

Relevante Zitate aus Interview 5

> (*Did you ever experience a similar scenario?*)
>
> „The right way of understanding the contribution that a new proof brings is to ask yourself and ask the person who delivers the proof the question of why this time, there is a successful solution to the problem, [while] in the previous five or fifteen years, nobody succeeded in proving this. What is really new, what is the new idea that has been brought with this proof?" (Int 5, S. 327)

> (Weiter zu: *Did you ever experience a similar scenario?*)
>
> „It is a huge problem in mathematics of how you check proofs. All working mathematicians have experience with this, say in capacities of referees of papers and so on. For me, for example, the methodology of how to referee a paper–and a question of correctness–[is] that I would sort of start to read the introduction first, start trying to understand what exactly is the statement that is promised to be proved in the paper. And once I do understand this, I go in the back of the paper where the proof ends, and try to find the key argument that made the proof work. And if at this stage, I don't see exactly why this argument works, then I go one step back to see what the proof of this key argument is based on. So, what was the previous step. And if I still don't quite believe the argument given there, if it looks quite suspicious, I go a step back again to the beginning of the proof, and in this way, in this chain of proof I'm trying to find where it breaks. Or, if it's non-breaking, I would see the sparkling of the new idea that finally makes it work and makes me believe that it works. And then, I can check for example the quality of writing of intermediate lines, I can confirm that I can believe general technical details. But the crucial thing is to see whether there is an idea, and so, for me mathematical proofs are not what they mean in formal sense. [. . .] This process that I tried to describe is only part of what I believe is a true test of correctness of mathematical statements. It is more or less through digesting the theorem in mathematical practice. It is like a complex

[347] Vgl. auch die Deutung des ersten Teils der Antwort auf diese Leitfadenfrage im Rahmen der Analyse zu Ausgangsfrage 3.

thing that people try to use in this position and in that position, and in this regime and in a harder regime, like a car that you take with you in desert or wilderness and ride it. And if it's wrong, than you will spot that somehow it doesn't fit into some of your non-mathematical contexts. And this is basically how things are being really tested, and errors are discovered. [...] Sometimes, it might be a kind of a finite statement, which sort of ends the line of inquiry into a mathematical problem. And there is the proof that has been accepted, and after that, nobody cares about using this. This would be a suspicious situation. After few years even people who worked on this theorem would loose their confidence in the fact that the theorem has been proved, if it hasn't been in use. That's just my experience, and that's how I do mathematics and teach my graduate students and also help them out in situations when they fall into this sort of trap. [...] When people claim they have proved something, they often just found some–maybe even crucial–steps towards the proof, and on the level of writing down this proof, or on the level of refereeing or something it could be that a gap or just an error in the proof would be found, which doesn't necessarily mean that this destroys completely the existing proof or the existing argument. It quite often means that something has been done half way, but it was too quick to announce the full proof. So what just deceptively looked like a full proof was only part of the proof, which nevertheless means some problems. So, often unsuccessful proofs are just the beginning of something more successful." (Int 5, S. 327 f.)

(*You said that a mathematical proof is not a formal proof, and that a mathematical proof does not work in a formal way–what do you mean by 'formal proof'?*)

„It is a work in progress that polishes the proof. Personally, I like to use this expression that some proofs are locally everywhere wrong, but globally correct. So, you can even have a proof consisting of a hundred lemmas, and thirty of them are wrong, as written, but that's not the point. It is just the errors in writing down. There is a big picture, there is the real understanding of why it is true, and then, it is the process of writing down these details, and not all people are good in this." (Int 5, S. 329)

(*Can you make any sense of the term 'formalizable proof'?*)

„It very much depends on the style of a mathematician, on a personal temper maybe, the attitude of particular mathematicians, but it depends also on the

> field of mathematics. In some fields, proofs are very close to be formal proofs, this would be a field where you can do calculations from the beginning to the end, usually algebraic calculations. And there are much less formalizable fields, usually you would think of geometry, where you really have to operate with very complex shapes, and rely on your geometric imagination. [...] For example mathematical physicists, who are very close to mathematicians. Mathematicians often sort of wander into these areas where physicist work. And what is a proof for a physicist is not a proof for a mathematician. There is a similar scale inside the mathematical community. But somewhere, on the very bottom or very top of this scale, there are proofs which are hundred percent correct, and hundred percent formal proofs. But I suppose that these would be proofs of very simple statements.“ (Int 5, S. 330)
>
> (*One participant of the survey study gave the following comment:* How important is the Jones Conjecture? How large is the community? *What do you think about this?*)
>
> „The real process of checking the validity of a theorem is not just that is has been accepted for publication, that it went through a process of refereeing, but how many people really used it, really looked into it and adapted it for their purposes.“ (Int 5, S. 336)

Interview 5 lässt in Bezug auf Ausgangsfrage 4 eine recht detaillierte Interpretation zu: Ein wesentliches Charakteristikum akzeptabler Beweise besteht darin, dass sie eine ausgezeichnete Kernargumentation beinhalten. Diese muss im Rahmen der Gesamtargumentation gut identifizierbar sein, was insbesondere das Nachvollziehen des Beweises vereinfacht oder gar erst ermöglicht. Im Falle von nicht etablierten Theoremen sollte das Kernargument in Bezug auf den bisherigen Beweisprozess neu und originell sein. Auch „falsche“ Beweise können diese Akzeptanzbedingung erfüllen, denn die Güte der Kernargumentation ist nicht zwingend an dessen Detailkorrektheit gebunden. Im Gegenteil ist ein weiteres Akzeptanzkriterium für Beweis gerade die Fehlerrobustheit ihrer Kernargumentation. Diese Fehlerrobustheit zeigt sich unter anderem darin, dass sich die bewiesene mathematische Aussage unabhängig von ihrer spezifischen, unter anderem vom für den Beweis gewählten *setting* abhängigen Formulierung in Bezug auf andere, inner- oder außermathematische Problemstellungen bewährt. Die Akzeptanz des Beweises steigt mit jeder neuen erfolgreichen Anwendung der bewiesenen Aussage. Diese Akzeptanzbedingung der Fehlerrobustheit lässt sich nicht sinnvoll in der Terminologie der formalen Logik formulieren.

Das für die Akzeptanz eines konkreten informellen Beweises erforderliche Maß an Detailkorrektheit läßt sich auch als Nähe zu einem formalen Beweis interpretieren; ein algebraischer Beweis mit in hohem Maße detailkorrekten algebraischen Umformungen etwa ist demgemäß einem formalen Beweis sehr „nahe". Das erforderliche Maß hängt von einer Reihe von kontextuellen Faktoren ab: Dazu gehören persönlicher Stil der am Beweisprozess beteiligten Mathematiker oder Forschungsgruppen und das mathematische Spezialgebiet, dem das bewiesene Theorem und die im Beweis verwendeten Definitionen, Techniken und Resultate entstammen; je nach dem werden dort standardmäßig bestimmte Beweistechniken verwendet, die in hohem Maße nicht formal, sondern geometrisch-anschaulich sind, und deren formale Detailkorrektheit schwer nachprüfbar ist. Weiterhin sind die mathematische Tiefe und Komplexität des bewiesenen Theorems, das Interesse der mathematischen Gemeinschaft an dem bewiesenen Theorem und das erreichte Stadium des Beweisprozesses für die erforderliche Detailkorrektheit ausschlaggebend. Als übliche Stadien werden hier die Stufe des Aufschreibens, die Stufe der Begutachtung und die Stufe der Anwendung in verschiedenen mathematischen und außermathematischen Kontexten genannt. Im Laufe dieses Beweisprozesses kann sich ein konkretes Argument in seiner ursprünglichen Form im Detail also gegebenenfalls stark verändern – im Extremfall von einem fehlerhaften in ein fehlerfreies Argument – ohne dabei den Status eines kontextuell akzeptablen Beweises zu verlieren.

Auch die für die Akzeptanz eines Beweises in einem bestimmten Stadium des Beweisprozesses erforderliche Prüfung und Begutachtung ist, zumindest in Teilen, subjektiv durch den jeweiligen Gutachter geprägt. Es gibt keine einheitliche Begutachtungsmethode: der eigene mathematische Stil, die persönlichen Stärken und Schwächen sowie die Auslastung einzelner Gutachter beeinflussen die Art, Genauigkeit und Sorgfalt der Begutachtung.

Relevante Zitate aus Interview 6

> (*A more abstract issue behind scenario 1 is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this issue?*)
>
> „Refereed proof does not say everything, it just means that somebody has seen the paper, and if it is done correctly, he actually went through the proofs and he believes that it is true, and this is very much biased by the human factor. Let's say, [a famous mathematician] comes up with a paper, and I have to referee it. [. . .] I'm sort of at the border of this subject. [. . .] Then I'm already preoccupied with the fact that [he] is a very well known mathematician, and

so that it probably will be o.k.. And I also know that sometimes it goes outside of my expertise. And then there's the time pressure, you have all this stuff that you have to do, and then they ask you to review this 50 pages paper, which you are sure that if you are really going to check all the details that you are sort of 'That's probably o.k.'. So you have a tendency of believing that, and besides you always think 'Well, you know, he's publishing it, not I, so it's his responsibility that it is o.k.'. Ideally, the referee has nothing else to do, he knows the subject better than the guy who wrote about it, and he will study it, and say 'Yes, this is all correct'. Now we are only discussing the correctness part, right? Not whether it is worth publishing the paper in this particular journal, which is a quite different question. The referee is at best similar like the author there. So, if the author thinks it's o.k., well, let's be pessimistic, it has a probability of 95 % to be o.k.. If then the referee goes over, then he thinks it's also o.k., then this is also generally speaking a probability of 95 %, so, altogether you have a big chance that it is fine. And that is basically how it works, it's never going to be full proof. I don't think it does exist, actually. Although there are many things that are full proof." (Int 6, S. 342)

(*One participant of the survey study gave the following comment:* How important is the Jones Conjecture? How large is the community? *What do you think about this?*)

„First, Jones is a world famous expert, so it means she's teaching in Harvard or something, that's what you think of, and then you write that it is send to a mathematical journal of high reputation, so it's send to *Acta Mathematica* or something like that. So, this describes something about the size [of the community]. You cannot be a world famous expert on something that nobody else does. I believe that there is this probability going on, so that it went to a good journal means that the journal thought of looking for good referees, maybe sent it not to one, but to three referees, so it was established more surely than that it would have been sent to some journal of [a tiny mathematical society with very few members]. So, that puts the scenario in a framework." (Int 6, S. 345)

Hier werden Charakteristika des vor der Publikation eines neuen Beweises zu durchlaufenden Begutachtungsprozesses in der mathematischen Praxis beschrieben, die auf entsprechende Charakteristika von zur Publikation akzeptierten Beweisen hindeuten. So ist der Begutachtungsprozess generell in starkem Maße durch pragmatische Beschränkungen, darunter Zeitdruck sowie Auslastung und Kompetenz der Gutachter, beeinflusst. Auch ein positiv begutachteter Beweis erreicht damit in der Regel nicht den Status eines sicheren Garanten seiner Konklusion. Soziale Hilfsmechanismen fangen diesen Sicherheitsverlust soweit auf, dass der Beweis in der Regel eine hohe Korrektheitswahrscheinlichkeit besitzt. Die Höhe dieser Wahrscheinlichkeit variiert aber in Abhängigkeit von kontextuellen Faktoren, insbesondere von der Größe der Fachgemeinschaft und der damit verbundenen Anzahl hinreichend qualifizierter potentieller Gutachter sowie von der mathematischen Expertise des Beweisautors.

Reduktion auf Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4

Die Einzelinterpretationen der Zitate lassen sich auf folgende Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4 reduzieren:

Die Akzeptanz von Beweisen in der mathematischen Praxis ist, wie es auch für die Forschungspraxis in anderen Wissenschaften der Fall ist, in starkem Maße durch soziale Mechanismen geprägt. Um die für epistemische Zuschreibungen relevanten Eigenschaften akzeptabler informeller Beweise angemessen beschreiben zu können, sollten solche Beweise nicht nur als einzelne, konkrete sprachlich verfasste Argumente, sondern eingebettet in kommunikative Handlungen im Rahmen eines umfassenden Beweisprozesses aufgefasst werden, während dessen sich ein konkretes Argument gegebenenfalls stark verändern kann. Insbesondere die Fallibilität und die Rolle tatsächlich fehlerhafter, aber dennoch akzeptabler Beweise lässt sich so erst zufriedenstellend analysieren.

Der Gesamtprozess dient der kollektiven Verifikation bzw. Rechtfertigung des zu beweisenden Theorems. Begutachtung und Publikation stellen dabei ein wichtiges, jedoch kein abschließendes Stadium dar. Obwohl sich pragmatische Störfaktoren wie die zeitliche Aus- bzw. Überlastung oder ein Mangel an spezifische Kompetenzen der Gutachter in der Regel nicht vermeiden lassen, wird durch Hilfsmechanismen wie die Erhöhung der Anzahl voneinander unabhängiger Gutachten zumindest eine hohe Korrektheitswahrscheinlichkeit der Kernargumentation positiv begutachteter Beweise erreicht. Dies liefert eine dem Stadium des Beweisprozesses angemessene Sicherheit bezüglich der Wahrheit des bewiesenen Theorems, ohne die Notwendigkeit aufzuheben, Beweis und Resultat weiterhin einer kontinuierlichen Prüfung durch eine möglichst hohe Zahl unterschiedlicher Anwendungen auf inner- und außermathematischen Problemstellungen zu unterziehen.[348]

[348]Mir kommt es an dieser Stelle nicht auf eine feinkörnigere Aufschlüsselung des tatsächlichen Begutachtungsprozesses in der mathematischen Praxis an; vgl. dazu genauer Geist, Löwe & Van Kerkhove [40] (die in ihren Ausführungen auch auf einzelne Zitate der hier vorgestellten Interviewstudie zurückgreifen,

Für individuelle Zuschreibungen beweisbasierten Wissens oder beweisbasierter Rechtfertigung zu einem beweisführenden epistemischen Subjekt ist zwar die Akzeptanz des konkret vorgebrachten Argumentes entscheidend. Die zugehörigen Akzeptanzbedingungen sind aber auch auf die konkrete kommunikative „Beweishandlung“, durch die das Argument vorgebracht wird, sowie das zugehörige Stadium im Gesamtbeweisprozess bezogen: Akzeptanzkriterien, die in den verschiedenen Stadien des Beweisprozesses für die Akzeptanz eines konkreten Beweises als Rechtfertigung für mathematisches Wissen oder mathematische Überzeugungen eine unterschiedlich große Rolle spielen, sind Fehlerrobustheit (diesen Ausdruck verwende ich im Folgenden im Sinne der Interpretation von Interview 2, die auch die Verwendungsweise in der Interpretation von Interview 5 beschreibt, vgl. S. 195), Detailkorrektheit bzw. „Nähe“ zu einem formalen Argument, Übertragbarkeit auf andere mathematische *settings*[349] und Problemstellungen, Übersichtlichkeit und inhaltliche Klarheit, d.h. insbesondere Ersichtlichkeit der Kernargumentation.[350]

Einige dieser Kriterien scheinen bereits durch eine geeignete, dem aktuellen Stadium des Beweisprozesses angemessene Formulierung des sprachlichen Argumentes erfüllt werden zu können: Um die erforderliche Übersichlichkeit, Klarheit und Fehlerrobustheit des Argumentes bzw. die Ersichtlichkeit der Kernargumentation und die Fruchtbarkeit für andere Problemstellungen zu sichern, muss das Argument auf einer geeignet hohen inhaltlich-begrifflichen Ebene formuliert sein. Außerdem ist eine geeignete Unterteilung des Argumentationsganges in gut identifizierbare Sinnabschnitte, etwa durch die Formulierung wesentlicher Zwischenergebnisse in Form von Lemmata, vonnöten. Um das erforderliche Maß an Detailkorrektheit aufzuweisen, müssen einzelne Argumentationsschritte oder -teile hinreichend detailliert und formal korrekt ausformuliert sein, z. B. die für die Kernargumentation wesentlichen Beweisteile oder Teilargumentationen für noch nicht etablierte Zwischenergebnisse, die für den Gesamtbeweis benötigt werden.[351]

---

siehe [40, S. 162 f.]) oder auch Krantz [64]. Mein Schwerpunkt liegt hier stärker auf den substantiellen als den pragmatischen Charakteristika akzeptabler Beweise.

[349] Vgl. S. 170.

[350] Hier besteht eine interessante Querverbindung zum Begriff mathematischer Schönheit und dem Gebrauch ästhetischer Urteile in der mathematischen Praxis. Viele der hier genannten Charakteristika akzeptabler mathematischer Beweise werden auch als ästhetisch relevante Qualitäten schöner Beweise angeführt (vgl. hierzu Müller-Hill & Spies [100]). Es stellt sich daher die Frage, der ich hier aber nicht nachgehen werde, inwiefern die genannten Kriterien genuin epistemische oder genuin ästhetische sind. Im ersten Fall würde es sich bei mathematischer Schönheit unter Umständen gar nicht um eine ästhetische Kategorie handeln, im zweiten Fall hätten nur schöne Beweise in der mathematischen Praxis epistemische Relevanz.

[351] Im Allgemeinen liegt sicherlich keine strenge Ordnung von mathematischen Argumenten nach dem Maß ihrer Detailkorrektheit oder Nähe zu einem formalen Beweis vor; man könnte im gerade beschriebenen Sinne eher von gewissen allgemeinen Formalisiertheitsstufen sprechen.

Die Standards für die einzelnen Kriterien variieren jedoch auch abhängig von der „Ausgangssituation“ der konkreten Beweishandlung: Für einen Adressatenkreis, der sich aus gestandenen Geometern einer Forschungsgruppe zusammensetzt, kann ein geometrisch motivierter, in einem bestimmten Stil abgefasster Beweis als hinreichend übersichtlich und klar gelten, der für einen Adressatenkreis mit stark unterschiedlichen Expertisestufen und einer stark ausgeprägten algebraischen Denkweise der einzelnen Mitglieder des Kreises unübersichtlich und unklar erscheint. Auch die Ersichtlichkeit der Kernargumentaion variiert situativ, sie hängt von der mathematischen Expertise und unter Umständen auch von spezifischen mathematischen Fähigkeiten des den Beweis nachvollziehenden Subjektes ab. Die erforderliche Detailkorrektheit des vorgebrachten Argumentes[352] ist unter anderem abhängig vom mathematischen Spezialgebiet, dem der entsprechende Beweis entstammt, sowie die mathematische Expertise des Beweisführenden und gegebenenfalls auch der Beweisadressaten.

Eine Möglichkeit, die beschriebene kontextuelle Variation von Akzeptanzstandards in einer empirisch informierten Erkenntnisttheorie der Mathematik umzusetzen, bietet, wie in den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 1 bereits erwähnt,[353] eine Modellierung der kontextuellen Abhängigkeiten in Bezug auf den Zuschreibungskontext der epistemischen Zuschreibung (also im Sinne des semantischen Kontextualismus). Darauf komme ich im nachfolgenden Abschnitt 4.3 nun genauer zu sprechen.

4.3 Zusammenführende philosophische Charakterisierung beweisbasierter epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis

Im Folgenden stelle ich eine gemeinsame philosophische Analyse der Auswertungsergebnisse zur Umfrage- und Interviewstudie vor. Diese dient als Vorbereitung und Grundlage für die im nachfolgenden, abschließenden Kapitel 5 meiner Arbeit verfolgte Frage nach der Vereinbarkeit formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen mit den tatsächlichen epistemischen Standards der mathematischen Praxis und für den Entwurf einer sozio-empirisch informierten Lesart von (FKE). Um im Rahmen von Schritt 3 des Programms DSP[354] mit den empirischen Resultaten aus Schritt 2 philosophisch fruchtbar arbeiten zu können, wird also die bisherige Interpretation in einen breiteren theoretischen Zusammenhang gestellt. Die durch die Orientierung an den vier

[352] Oder seine „Formalisiertheitsstufe“, vgl. Fußnote 351.
[353] Vgl. S. 165 f.
[354] Vgl. Abschnitt 1.3.3.

aufgrund der Ergebnisse der Umfragestudie formulierten theoretischen Ausgangsfragen (Schritt 1, vgl. Abschnitt 3.4) für die Interviewstudie bereits erreichte Abstraktionsstufe der Interpretation wird dadurch noch einmal erhöht; der philosophische Interpretationsspielraum wird dabei natürlicherweise größer.[355]

Im Hintergrund der Analyse steht die Beantwortung der vier Ausgangsfragen anhand der im vorigen Abschnitt 4.2 vorgestellten Kernaussagen. Dennoch folgt die Darstellung systematisch einer Gliederung in acht allgemeinere, abstraktere Aspekte zur philosophischen Charakterisierung von Zuschreibungen beweisbasierten Wissens und beweisbasierter Rechtfertigung in der mathematischen Praxis. Jedem Aspekt ist dazu ein eigener Unterabschnitt gewidmet, zur späteren eindeutigen Bezugnahme sind diese mit (I) bis (VIII) bezeichnet. Einige dieser Aspekte werden dabei recht detailliert diskutiert, andere werden auf der Grundlage der bisherigen Ergebnisse nur angerissen.

(I) Zur Natur von akzeptablen mathematischen Beweisen als rechtfertigenden Gründen

Beweise, die in der mathematischen Praxis als „akzeptabel" (oder auch „gut") gelten und beweisbasiertes Wissen oder gerechtfertigte Überzeugung begründen können, sind keine rein sprachlichen, statischen, sondern prozesshafte Entitäten. Im konkreten Fall singulärer epistemischer Zuschreibungen wie „X weiß, dass p" und „X glaubt gerechtfertigt, dass p" auf Grundlage eines Beweises sind mit „Beweis" einzelne Beweishandlungen gemeint. Diese beinhalten zwar jeweils auch ein sprachlich verfasstes Argument als rein sprachliche Entität. Epistemische Relevanz besitzt dieses Argument aber erst als Teil einer kommunikativen Handlung, durch die es vom epistemischen Subjekt vorgebracht wird, und in Bezug auf das aktuell erreichte Stadium des gesamten Beweisprozesses. Der Beweisprozess als Ganzer ist hingegen gemeint, wenn etwa von „*dem* Beweis der Fermatschen Vermutung" gesprochen wird.

(II) Fallibilität und Fehlerrobustheit mathematischer Rechtfertigung durch Beweise

Sowohl die Ergebnisse der Umfragestudie als auch die Resultate der Interviewstudie legen nahe, dass mit singulären epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis aus erkenntnistheoretischer Sicht häufig nur Überzeugtsein oder gerechtfertigtes Überzeugtsein zugeschrieben wird. Der wesentliche Grund dafür ist eine epistemisch unabwendbare Irrtumsmöglichkeit in Bezug auf die Korrektheit mathematischer Beweise, die

[355]Dieser Spielraum bleibt aber generell durch die sozio-empirisch informierte Forderung nach empirisch-deskriptiver Adäquatheit beschränkt, vgl. Abschnitt 1.3, S. 17, 21 und 28 sowie im Folgenden auch Abschnitt 5.1.1.

deren Akzeptanz in der Praxis jedoch nicht schmälert. Entsprechend besitzt auch der Gesamtprozess des Beweisens in der mathematischen Praxis keinen finalen Punkt; die epistemischen Einstellungen gegenüber Beweisen sind dadurch grundsätzlich graduell, gegebenenfalls sogar unscharf, und nicht kategorisch.

Akzeptable mathematische Beweise sind daher in zweierlei Hinsicht prinzipiell fallibel: Weder müssen sie die Wahrheit des bewiesenen Theorems garantieren, noch muss dieses tatsächlich wahr sein.[356] Insbesondere besitzen also auch inkorrekte Beweise epistemischen Wert für die mathematische Praxis und können mathematische Überzeugungen hinreichend rechtfertigten, ohne dadurch die Verlässlichkeit epistemischer Rechtfertigung durch mathematische Beweise in Frage zu stellen. Dafür sorgt das Akzeptanzkriterium der Fehlerrobustheit:[357] Akzeptablen Beweisen fehlt durch ihre Fallibilität zwar die unangreifbare Stabilität, die mathematische Rechtfertigung (und das dadurch begründete mathematische Wissen) gemäß traditionellen Vorstellungen ausmacht; die Kernargumentation[358] eines akzeptablen Beweises muss jedoch stets hinreichend fehlerrobust, d.h. etwa von Detailfehlern, Abschwächungen des Theorems oder von Zwischenresultaten und Wechseln des mathematischen *settings*, das heißt Wechseln des theoretischen Überbaus aus Notationen und Definitionen[359] hinreichend unabhängig sein, um die Wahrheit des bewiesenen Theorems in einem (z.B. dem aktuellen Stadium des Beweisprozesses) angemessenen Maße wahrscheinlich zu machen.

(III) Mathematisches Verständnis und Wissen-warum als Erkenntnisziel

Die Interviewanalyse zu den Ausgangsfragen 2 und 4 hat gezeigt, dass die epistemische Funktion von Beweisen in der mathematischen Praxis als „bloß" zuverlässige überzeugungsbildende Prozesse noch nicht hinreichend gut beschrieben ist. Akzeptanzkriterien für mathematische Beweise zeichnen diese als eine ganz besondere Form epistemischer Rechtfertigung aus: Das Führen oder Nachvollziehen eines akzeptablen Beweises für p dient auch der Erzeugung von mathematischem Verständnis. Mathematisches Verständnis hat verschiedene Stufen,[360] und beinhaltet auf höheren Stufen, die in der wissenschaftlichen mathematischen Praxis stets angestrebt werden, ein „Wissen-warum-p". Die

[356]Das bewiesene Theorem kann, wie das unter der Analyse zu Ausgangsfrage 4 diskutierte Zitat aus Int 2 illustriert (S. 193 f.), etwa ursprünglich zu stark formuliert sein und tatsächlich nur für einen kleineren Bereich gelten.

[357]Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4, S. 204.

[358]Bei „Kernargumentation" handelt es sich um eine im Rahmen der Interviewinterpretation *ad hoc* eingeführte Sprechweise, vgl. etwa S. 172, 192, 195, 197 und 200.

[359]Bei „*setting*" (bzw. „theoretischem Überbau") handelt es sich ebenfalls um eine im Rahmen der von mir vorgeschlagenen Interviewinterpretation *ad hoc* eingeführte Sprechweise, vgl. etwa S. 170.

[360]Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2, S. 174.

Rede von „Wissen-warum“ ist dabei zunächst wörtlich von den Kommentaren der Teilnehmer beider Studien übernommen. Gemäß der Analyse zu Ausgangsfrage 2 wird dieses Wissen-warum durch eine bestimmte Art der Beweisführung vermittelt, welche die für p relevanten inhaltlichen, konzeptuellen mathematischen Zusammenhänge aufzeigt. Dadurch wird die Wahrheit von p (und auch die Korrektheit des Beweises selbst) erklärt und zwingend einsichtig gemacht. Je nachdem sind Perspektivwechsel,[361] also Wechsel des mathematischen *settings*, notwendig, um zu Wissen-warum zu gelangen. Ein solcher Perspektivwechsel geschieht nicht auf formaler Detailebene, sondern auf inhaltlich-begrifflicher Ebene.[362] Wissen-warum ist auch deshalb eines der wesentlichen Erkenntnisziele mathematischer Forschung, weil die Möglichkeit solcher Perspektivwechsel auch die Übertragung von Resultat und Kernargumentation auf ähnliche mathematische Probleme möglich macht.[363]

Vor dem Hintergrund der philosophischen Unterscheidung zwischen Wissen-wie (Können) und Wissen-dass (propositionales Wissen) lässt sich das „Wissen-warum“ der mathematischen Praxis wie folgt einordnen: Mit propositionalem Wissen teilt es die Eigenschaft, propositional verfasst zu sein. Wissen-warum ist damit nicht ohne Weiters als ein reines Können analysierbar.[364] Dennoch handelt es sich auch nicht um propositionales Wissen allein im Sinne des semantischen Projektes[365] der klassischen Erkenntnistheorie: Für propositionales Wissen-dass-p in diesem Sinne könnte in bestimmten Fällen das

---

[361] Auch bei „Perspektivwechsel“ handelt es sich um eine im Rahmen der Interviewinterpretation *ad hoc* eingeführte Sprechweise, vgl. S. 175.

[362] Vgl. Fußnote 330 in den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2. Vgl. für eine ähnlich gelagerte Diskussion des Zusammenhanges zwischen der *Verständlichkeit* mathematischer Beweise und der im Beweis verwendeten inhaltlich-begrifflichen Ebene auch Vervloesem [125].

[363] Theoretische Modelle mathematischer Erklärung wie das von Mark Steiner vorgeschlagene Modell von erklärenden (*explanatory*) und nicht erklärenden (*non-explanatory*) Beweisen (Steiner [120]) werden im aktuellen mathematikphilosophischen Diskurs prominent etwa von Paolo Mancosu in [84] und [86] diskutiert. Den für die hier vorgeschlagene Analyse *ad hoc* eingeführten Sprechweisen von „Perspektivwechsel“ und „Wechsel des mathematischen *settings*“ entspricht im Extremfall bei Mancosu eine holistische Variante mathematischer Erklärung durch eine konzeptuelle Neufassung („*conceptual recasting*“, vgl. [86, S. 143]) einer ganzen mathematischen Theorie, in die ein Beweis eingebettet ist. Auch bei Steiner findet sich eine Idee des Perspektivwechsels oder des Wechsels des mathematischen *settings* in einem seiner Kriterien für erklärende Beweise, demgemäß diese durch Variation der charakterisierenden mathematischen Strukturen oder Eigenschaften, auf die das bewiesene Theorem Bezug nimmt, verallgemeinerbar sein müsssen (vgl. [120, S. 144, 147]). Ohne an dieser Stelle auf weitere Details der Debatte einzugehen, dient sie in jedem Fall als Referenz für die philosophische Relevanz der hier diskutierten Sprechweise von Wissen-warum.

[364] Gemäß der bekannten Ryleschen Unterscheidung zwischen Wissen und Können ist Können zwar nicht-propositional verfasst. Stanley und Williamson (vgl. [117]) glauben dagegen (und sind bisher noch nicht wirklich stichhaltig widerlegt worden), dass Können eine Spezialform propositional verfassten Wissens ist. Für die nachfolgenden Überlegungen ist jedoch in erster Linie relevant, dass Wissen-warum den Besitz bestimmter mathematischer Fähigkeiten *voraussetzt* (vgl. Aspekt (IV)).

[365] Vgl. Abschnitt 1.3.1, S. 15.

bloß schrittweise Nachvollziehen eines (genügend übersichtlichen) formalen Beweises als epistemische Rechtfertigung im Sinne eines zuverlässigen überzeugungsbildenden Prozesses hinreichend sein. Die für Wissen-warum notwendigen weiteren Kriterien, wie etwa die Möglichkeit zum Perspektivwechsel, sind damit noch nicht erfüllt. Wissen-warum ist zudem personenrelativ und graduell und teilt damit charakteristische Eigenschaften epistemischer Rechtfertigung, aber nicht von propositionalem Wissen im klassischen Sinne.

In der mathematischen Forschungspraxis ist ein angemessenes Maß an Wissen-warum des epistemischen Subjektes in der Regel aber Voraussetzung für eine positive epistemische Zuschreibung, die sich im Sinne von durch Beweise begründeter gerechtfertigter Überzeugung oder propositionalem Wissen interpretieren lässt. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn die rechtfertigenden Beweise sehr komplex sind. Wissen-warum ist deshalb aber nicht bloß als Teilaspekt einer Analyse von propositionalem Wissen anzusehen; seine Rolle als wesentliches Erkenntnisziel mathematischer Forschung verleiht ihm einen für die mathematische Praxis mindestens gleichwertigen epistemischen Status. Im Rahmen einer sozio-empirisch informierten Analyse epistemischer Zuschreibungen von propositionalem mathematischem Wissen und epistemisch gerechtfertigter mathematischer Überzeugung in der wissenschaftlichen mathematischen Praxis ist Wissen-warum also geeignet zu berücksichtigen.

(IV) Meta-Argumentationen, sinnhafte Argumentationsstruktur und mathematische Fähigkeiten

Einerseits ist das Arbeiten mit stark formalisierten oder gar formalen Beweisen in Bezug auf einen Großteil der mathematischen Forschungspraxis aufgrund der Komplexität der dort verwendeten Argumentationen nicht möglich, da solche komplexen formalisierten Beweise für einen realen Mathematiker kaum erbring- oder nachvollziehbar sind.[366] Auch die für einen akzeptablen Beweis benötigte Fehlerrobustheit, die unter anderem seine Verlässlichkeit als rechtfertigender Grund begründet,[367] ist bei komplexen formalisierten Beweisen in der Regel nicht gegeben. Zudem lassen stark formalisierte Beweise nur schwer Perspektivwechsel zu und machen die Kernargumentation und die für die bewiesene Aussage besonders relevanten inhaltlichen mathematischen Zusammenhänge schwer ersichtlich.[368] Daher sind formalisierte Beweise in der Regel nicht geeignet, um Wissen-warum zu erzeugen, was gemäß Aspekt (III) aber gerade im Falle komplexer

[366] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3, S. 189.
[367] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4, S. 204.
[368] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2, zum Zusammenhang zwischen formalisierten Beweisen und Perspektivwechsel insbesondere wieder Fußnote 330.

mathematischer Theoreme eine notwendige Voraussetzung für positive Zuschreibungen beweisbasierten Wissens oder beweisbasierter Rechtfertigung ist. Den Äußerungen der Interviewpartner wurde jedoch die Forderung entnommen, dass akzeptable Beweise im Sinne der unter den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3 eingeführten Sprechweise prinzipiell ontisch formalisierbar sein sollten,[369] also die für eine mechanische Formalisierung notwendigen Beweisschritte zumindest implizit enthalten müssen. Dies zeigt andererseits, dass die informellen Beweise der mathematischen Praxis im Vergleich zu formalen nicht einfach lückenhaft sein dürfen.

Daher enthält ein akzeptabler Beweis in der Regel informelle Beweissequenzen, in denen z. B. Beweistechniken zum Einsatz kommen, die auf mathematischen Meta-Ebenen formuliert sind,[370] und die ich im Folgenden, auch in Anlehung an die Diskussion von Azzounis Ableitungsanzeiger-Eigenschaft,[371] als *Meta-Argumentationen* bezeichne.[372] Weiterhin ist akzeptablen Beweisen in der Regel eine sinnhafte Argumentationsstruktur, also eine Auf- und Unterteilung der Gesamtargumentation in Sinnabschnitte eigen. Diese wird etwa durch die Formulierung sinnvoller Zwischenergebnisse als Lemmata und die deutliche Herausstellung und Trennung der Kernargumentation des Beweises von Neben- und Hilfsargumenten vermittelt. Sowohl die sinnhafte Argumentationsstruktur als auch die Meta-Argumentationen sind dem tieferen inhaltlichen Verständnis des behandelten mathematischen Sachverhaltes förderlich und vereinfachen oder ermöglichen erst einen Perspektivwechsel, also die Betrachtung des Problems in verschiedenen mathematischen *settings*. Sowohl das inhaltliche Verständnis als auch der Perspektivwechsel erzeugen wiederum in der Regel erst mathematisches Wissen-warum.

Die vollständige Aufschlüsselung solcher Meta-Argumentationen ist nun, wenn denn theoretisch möglich, zumindest zeitlich unrealistisch und in ihrer Komplexität für einen praktizierenden Mathematiker kaum fassbar.[373] Sie wird in der mathematischen Praxis immer nur bis zu einem bestimmten Grad verlangt und vorgenommen.[374] Dies führt, konsequent weitergedacht, zu einer Hierarchie von informellen Meta-Beweisen.[375] Zudem

[369] Vgl. S. 190.

[370] Vgl. etwa das Zitat aus Interview 1 auf S. 168.

[371] Vgl. Abschnitt 2.3.5, S. 74.

[372] Vgl. hierzu später die Diskussion der empirisch-deskriptiven Adäquatheit der Ableitungsanzeiger-Lesart (FKE_7) in Kapitel 5, S. 225. Auch „Meta-Argumentation“ ist als eine im Vergleich zu „Kernargumentation“ oder „Fehlerrobustheit“ lediglich auf einer abstrakteren Interpretationsstufe eingeführte *Ad Hoc*-Sprechweise aufzufassen.

[373] Vgl. die detaillierteren Ausführungen im Rahmen der Analyse der Interviewstudie zu Ausgangsfrage 3, S. 189 f.

[374] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4, S. 204.

[375] Die Idee einer solchen Hierarchie von „Beweisheitsgraden“ (*degrees of proofness*) in Bezug auf den sozialen Prozess der Akzeptanz von Beweisen in der mathematischen Praxis entwickelt der Mathematiker Yuri Manin in seinem Buch „*A course in mathematical logic*“:

mögen die in der Praxis auftretenden Beweise mit Meta-Argumentationen prinzipiell fallspezifisch formal aufgeschlüsselt, also formalisiert werden können. In der Regel ist eine solche konkrete Aufschlüsselung aber nicht ohne Weiteres *mutatis mutandis* von einem Fall auf den anderen übertragbar.[376]

Der angemessene Umgang mit Meta-Argumentationen stellt aus Sicht der Erkenntnistheorie eher ein „Wissen-wie" praktizierender Mathematiker, also eine bestimmte Fähigkeit dar und erzeugt letztlich nicht nur Wissen-warum, sondern setzt es im Sinne einer tieferen Einsicht in inhaltliche innermathematische Zusammenhänge auch voraus.[377]

Eine weiterführende philosophische Analyse sollte den Besitz der für den Umgang mit akzeptablen mathematischen Beweisen nötigen Fähigkeiten im obigen Sinne zur Bedingung für das Vorliegen von beweisbasiertem mathematischen Wissen oder beweisbasierter mathemtatischer Rechtfertigung machen. Ein Kandidat für ein theoretisches Modell ma-

> „Every proof that is written must be approved and accepted by other mathematicians, sometimes by several generations of mathematicians. In the meantime, both the result and the proof itself are liable to be refined and improved. Usually the proof is more or less an outline of a formal deduction in a suitable language. But [...] an assertion p is sometimes established by proving that a proof of p exists. This hierarchy of proofs of the existence of proofs can, in principle, be continued indefinitely." (Zitiert aus [88, S. 105])

Ein konkreter, informeller mathematischer Beweis für ein Theorem p besitzt demnach die Funktion, zu zeigen, dass ein formal strengerer Beweis für p durch die Aufschlüsselung bestimmter Meta-Argumentationen möglich ist. Ein nicht vollständig formalisierter Beweis besitzt entsprechend im Vergleich zu einer formalen Ableitung immer nur einen bestimmten „Grad des Beweisseins". Dieser Grad scheint von Manin dabei aber nicht als ein absolutes Maß angesehen zu werden – vielmehr entsteht der Eindruck, dass er in der Praxis letztlich mittels sozialer Akzeptanzmechanismen durch die *scientific community* der Mathematiker bestimmt wird. Diese legt fest, welche Meta-Argumentationen wann zulässig sind, ohne dass dies durch formale Schlussregeln abgebildet wird oder werden kann.

[376] Vgl. erneut die speziellen Formulierungen in Interview 5 und 6:

> „There is a big picture, there is the real understanding of why it is true, and then, it is the process of writing down these details, and not all people are good in this." (Int 5, S. 329, vgl. die Analyse zu Ausgangsfrage 4)

> „When doing my PhD thesis, I learned that I should be careful–of course, a second year student knows that he should be careful, but you learn something about the way to be careful, or rather the way that you have to understand something." (Int 6, S. 338, vgl. die Analyse zu Ausgangsfrage 2)

[377] Vgl. auch die Diskussion zu Fähigkeiten und Wissen-warum im Rahmen der Kernaussagen zu Ausgangsfrage 2, S. 176. Überlegungen zum Zusammenhang zwischen der Meta-Argumentationsstruktur akzeptabler Beweise und bestimmten Fähigkeiten (bzw. Fähigkeitsstufen) finden sich in der Literatur zu Funktionsweise informeller Beweise in der mathematischen Praxis z. B. bei Chateaubriand:

> „The [steps] in the structuring of a proof are relative to the knowledge and interests of specific groups, and must be convincing and agreed upon to guarantee the trustworthiness of the proof. This relativization to specific groups not only takes into account different levels of knowledge and ability–as between professional mathematicians and undergraduate students, for instance–but also historical periods and special research programs [...]" [22, S. 389]

thematischer Fähigkeiten ist dabei ein bereits in Abschnitt 2.3.3 angesprochenes, geeignet angepasstes Dreyfus-Dreyfus-Modell.[378]

(V) Situative epistemische Standards

Den Standards für die Akzeptanz von Beweisen in der mathematischen Praxis[379] entspricht unter anderem das erforderlichen Maß an Übersichtlichkeit, inhaltlicher Klarheit (d.h. insbesondere Ersichtlichkeit der Kernargumentation), Fehlerrobustheit und Detailkorrektheit, das Maß, in dem der Beweis einen Perspektivwechsel ermöglichen soll sowie die zulässigen Meta-Argumentationen.

Diese Standards variieren kontextuell, unter anderem in Abhängigkeit vom Stadium des Gesamtbeweisprozesses, von den sozial bestimmten Interessen innerhalb der mathematischen Gemeinschaft in Bezug auf ein bestimmtes Theorem oder einen bestimmten Beweis, von den für das bewiesene Resultat und den Beweis relevanten mathematischen Spezialgebieten, von der mathematischen Expertise des Adressatenkreises eines konkret vorgebrachten Beweises und der mathematischen Expertise sowie unter Umständen auch von spezifischen mathematischen Fähigkeiten des epistemischen Subjekts.

Die Herausforderung für eine empirisch informierte Erkenntnistheorie besteht nun darin, diese kontextuellen Abhängigkeiten nicht nur zu diagnostizieren, sondern auch genauer zu analysieren. Dies betrifft insbesondere die Abhängigkeiten der einzelnen Faktoren untereinander. Das Stadium des Gesamtbeweisprozesses, die sozial bestimmten Interessen innerhalb der mathematischen Gemeinschaft und die für das bewiesene Resultat und den Beweis relevanten mathematischen Spezialgebiete können im Falle individueller epistemischer Zuschreibungen nun sinnvoller Weise als kontextuelle Faktoren in Bezug auf den Zuschreibungskontext aufgefasst werden, was eine kontextualistische Analyse im Sinne des semantischen Zuschreibungskontextualismus nahelegt.

(VI) Epistemischer Sonderstatus der Mathematik

Die bisherige Analyse der empirischen Resultate erlaubt zunächst nur eine negative Schlußfolgerung hinsichtlich des vermeintlichen epistemischen Sonderstatus der Mathematik:[380] Die Fallibilität akzeptabler Beweise im Sinne von Aspekt (I) und ihre Kontextsensitivität im Sinne von Aspekt (V) sind zwar verträglich mit dem Rechtfertigungsbegriff der allgemeinen Erkenntnistheorie, jedoch nicht mit dem klassischen Bild des absoluten, weil infallibel beweisbaren mathematischen Wissens. Zwar findet sich dieses klassische

[378] Vgl. S. 61 f.
[379] Vgl. die Kernaussagen zu den Ausgangsfragen 1 und 4.
[380] Vgl. Einleitung, S. vii und Kapitel 2, Abschnitt 2.3.1, S. 53.

Bild in Teilen auch im abstrakten Selbstverständnis praktizierender Mathematiker wieder, in der tatsächlichen mathematischen Forschungspraxis wird aber gemäß Aspekt (III) kein Anspruch auf einen entsprechenden Sonderstatus hinsichtlich der erklärten, vornehmlichen Erkenntnisziele erhoben.

Die Akzeptanzkriterien für Beweise, die einen innermathematischen Perspektivwechsel und die Anwendbarkeit auf außermathematische Problemstellungen[381] fordern, weisen dagegen auf eine alternative Deutung der epistemische Sonderstellung der Mathematik hin, der ich im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter nachgehen werde: Sie sichern eine außergewöhnliche Kohärenz bzw. Konsistenz des mathematischen Wissensgebäudes sowohl in sich als auch mit unterschiedlichen außermathematischen Wissensbereichen.[382]

(VII) Formalisierbarkeit als Eigenschaft von Beweishandlungen

Als ein allgemeiner Aspekt der vorgeschlagenen Interpretation der empirischen Ergebnisse kann man pointiert festhalten, dass in der mathematischen Praxis zwei verschiedene Formalisierbarkeitsbegriffe verwendet werden. Diese beiden anhand der Interviewinterpretationen hinsichtlich Ausgangsfrage 3 identifizierten unterschiedlichen Sprechweisen von Formalisierbarkeit habe ich in den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3 als *ontische* und *epistemische Formalisierbarkeit* bezeichnet.[383] Diese Sprechweisen sollen nun unter Bezugnahme auf andere empirische Ergebnisse präzisiert werden, ohne dass dabei eine Explikation nach strengen philosophisch-analytischen Standards angestrebt wird; eine solche ist für die hier angestellten Überlegungen zur Relevanz dieser beiden Formalisierbarkeitsbegriffe für Zuschreibungen beweisbasierten mathematischen Wissens oder beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung nicht notwendig.

Ein ontisch formalisierbarer Beweis wurde als informelles mathematisches Argument beschrieben, dessen implizite Argumentationsschritte durch Verfeinerung der Argumentation hinreichend explizit gemacht werden können, so dass das gesamte Argument anschließend rein mechanisch in einen formalen Beweis überführbar ist. Was in Abschnitt 4.2.4 als Beispiel für eine mögliche Explikation von „sprachliche Verfeinerung“ angeführt wurde, möchte ich als explizites Explikat verwenden, was zu folgender Spezifikation von „ontisch formalisierbar“ führt:

[381] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4, S. 203.
[382] Die Aufgabe der Konsistenzsicherung wird damit *de facto* gerade nicht, wie es historisch versucht wurde, (allein) durch eine Formalisierung der Mathematik bewältigt (vgl. auch die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3, S. 189).
[383] Vgl. S. 190 f.

(F_{ont}) **Ontische Formalisierbarkeit** (abgekürzt: Formalisierbarkeit$_{ont}$)

Ein formalisierbarer$_{ont}$ Beweis ist ein informelles mathematisches Argument, das durch eine geeignete sprachliche Differenzierung der enthaltenen, sprachlich unterschiedlichen Argumentationsebenen[384] so modifiziert werden kann, dass es anschließend durch einen geeigneten Formalisierungsalgorithmus, der mit entsprechenden Meta-Routinen[385] ausgestattet ist, rein mechanisch in eine formale Ableitung überführt werden kann.

Ontische Formalisierbarkeit ist eine invariantistisch konzipierte, intrinsische Eigenschaft sprachlicher Argumente. Ein formalisierbarer$_{ont}$ Beweis ist deduktiv korrekt, d.h. die Wahrheit seiner Prämissen erzwingt gemäß den erlaubten Schlussregeln logisch die Wahrheit seiner Konklusion.

Ontische Formalisierbarkeit erweist sich als ein möglicher Kandidat für die Spezifikation des Parameters „formalisierbar" im Rahmen einer im Sinne des semantischen Projekts geeigneten Lesart von (FKE) als Kriterium für Wissen-dass.[386] Als Forderung an akzeptable Beweise der mathematischen Praxis und damit als explanatorisch bzw. evaluativ notwendige Bedingung für Beweise, die epistemischen Zuschreibungen zugrundeliegen, wurde die Forderung nach ontischer Formalisierbarkeit jedoch zurückgewiesen. Formalisierbarkeit$_{ont}$ stellt schon insofern keine geeignete Spezifikation von „formalisierbar" im Sinne des explanatorischen und vor allem des evaluativen Projektes dar, als sie gemäß Aspekt (I) die „falschen" Entitäten betrifft, nämlich rein sprachliche Argumente statt Beweishandlungen als Basis der Prüfung und Bewertung epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis. In diesem Sinne ist der Begriff der ontischen Formalisierbarkeit, obwohl auch er in der mathematischen Praxis verwendet wird, kein geeigneter alleiniger Maßstab für die Adäquatheit einer Lesart von (FKE) als empirisch informiertes Kriterium für epistemische Zuschreibungen. Der Begriff der epistemischen Formalisierbarkeit, der sich dagegen auf Beweishandlungen als Grundlage konkreter epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis bezieht, muss in dieser Hinsicht angemessen berücksichtigt werden. Ontische Formalisierbarkeit stellt jedoch auch in anderer Hinsicht allein keinen brauchbaren Maßstab dar: Die unter Aspekt (IV) angestellten Überlegungen deuten darauf hin, dass akzeptable Beweise komplexer Theoreme der höheren Mathematik in der Regel nicht ontisch formalisierbar sind.[387] Der angemessene Umgang mit Meta-Argumentationen gehört demgemäß vielmehr zum Fähigkeitsprofil

[384] Etwa Argumentationen auf der Ebene der „Objektsprache", z. B. der der Algebra, und Argumentationen auf einer Meta-Ebene, z. B. die der algebraischen Operationen.

[385] Z. B. logisch oder mathematisch gültige Ableitungsregeln zweiter Stufe.

[386] Vgl. die Analyse der Interviewstudie in Bezug auf Ausgangsfrage 3, S. 188 ff.

[387] Vgl. S. 210.

praktizierender Mathematiker und setzt Wissen-warum im Sinne einer tieferen Einsicht in inhaltliche innermathematische Zusammenhänge voraus.[388]

Einen Ansatzpunkt für einen in dieser Hinsicht geeigneteren Maßstab bietet die auch für die Akzeptanz von Beweisen in der mathematischen Praxis relevantere epistemische Formalisierbarkeit.[389] Im Unterschied zu ontischer Formalisierbarkeit, die eine intrinsische Eigenschaft mathematischer Argumente als singulärer sprachlicher Entitäten darstellt, wird für epistemische Formalisierbarkeit verlangt, dass ein Mathematiker von der Überführbarkeit eines gegebenen mathematischen Argumentes in ein ontisch formalisierbares Argument überzeugt werden kann. Die in den Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4 vorgeschlagene kontextsensitive Analyse der Akzeptanzkriterien für mathematische Beweise[390] legt daher nahe, epistemische Formalisierbarkeit als kontextsensitive Eigenschaft von Beweishandlungen[391] aufzufassen. Dies liefert folgende Spezifikation von „epistemisch formalisierbar“:

(F_{epist}) **Epistemische Formalisierbarkeit** (abgekürzt: Formalisierbarkeit$_{\text{epist}}$)

> Eine formalisierbare$_{\text{epist}}$ Beweishandlung ist eine kommunikative Handlung, durch die ein geeignetes Mitglied der mathematischen Gemeinschaft aufgrund eines vorgebrachten mathematischen Argumentes davon überzeugt wird, dass dieses Argument durch angemessene Modifikation, Ergänzung oder Korrektur in einen ontisch formalisierbaren Beweis überführt werden kann.

Das für eine epistemisch formalisierbare Beweishandlung ausreichende Maß an Detailkorrektheit und Fehlerrobustheit des vorgebrachten Argumentes kann damit im Sinne von Aspekt (V) kontextuell variieren, also insbesondere in Abhängigkeit von der mathematischen Expertise der an der Beweishandlung Beteiligten und vom jeweiligen Stadium im gesamten Beweisprozess. Ein epistemisch formalisierbares Argument wird weiterhin in der Regel ein gewisses, kontextuell bestimmtes Maß an mathematischem Verständnis und Wissen-warum gemäß Aspekt (III) vermitteln müssen. Das konkret vorgebrachte Argument darf dabei im Rahmen der geforderten Fehlerrobustheit und Detailkorrektheit Fehler enthalten, und ist möglicherweise in diesem Sinne tatsächlich nicht ontisch formalisierbar, sondern im Sinne von Aspekt (II) fallibel.

Die Herausforderung bei der Formulierung sozio-empirisch informierter Lesarten von (FKE) in Abschnitt 5.2 wird darin bestehen, eine Spezifikation von (FKE) zu erarbeiten,

[388]Vgl. auch Aspekt (III).
[389]Vgl. S. 190.
[390]Vgl. S. 204.
[391]Vgl. S. 204.

welche die wesentlichen Aspekte ontischer und epistemischer Formalisierbarkeit fruchtbar vereint.

(VIII) „Formaler Beweis“ als abstraktes, internalisiertes Leitbild

Die wachsende Komplexität des mathematischen Wissensgebäudes und der einzelnen Resultate macht Hilfsmechanismen notwendig, die einen rein formalen Beweisstil zwangsläufig ablösen.[392] Das Konzept des formalen Beweises spielt zumindest in Bezug auf die heutige Forschungspraxis daher weniger die Rolle eines konkreten Leitbildes der mathematischen Beweisführung, auch wenn dies für die universitäre mathematische Ausbildung zutreffen mag.[393] In Bezug auf die zeitgenössische wissenschaftliche Mathematik ist alternativ die Interpretation der Verwendungsweise von „formaler Beweis“ als abstraktes Leitbild guter Beweisführung möglich, welches jedoch nur indirekte Akzeptanzkriterien liefert: Ein Beweis, der aus offensichtlichen Gründen eine Formalisierung innerhalb eines von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierten formalen Systems prinzipiell ausschließt, wird nicht akzeptiert.[394]

Das Leitbild des formalen Beweises prägt dennoch das bereits unter Aspekt (VI) angesprochene abstrakte Selbstverständnis praktizierender Mathematiker.[395] Eine Erklärung für dieses Selbstverständnis, auch hinsichtlich Aspekt (VI), könnte sein, dass die Regeln des formalen Beweisens von praktizierenden Mathematikern mit entsprechender mathematischer Expertise und Forschungserfahrung als hinreichend internalisiert gelten. Dadurch gilt es als wahrscheinlich, dass auch die von ihnen erbrachten informellen Beweise in der Regel zu formal ableitbaren Resultaten führen. Diese Erklärung ließe sich auch im Rahmen eines Dreyfus-Dreyfus-Modells mathematischer Fähigkeiten formulieren.[396] Die Adäquatheit einer solchen Erklärung läßt sich auf der Grundlage der hier vorgestellten empirischen Ergebnisse jedoch nicht hinreichend begründen und müsste durch weitere empirische, gegebenenfalls kognitionswissenschaftliche Studien geprüft werden. Ich gehe ihr daher im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter nach.

---

[392] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3, S. 189 f., sowie speziell S. 185.

[393] Vgl. S. 189.

[394] Vgl. S. 190 sowie speziell S. 180.

[395] Vgl. wieder die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 3, S. 189. Hier besteht meiner Ansicht nach eine gewisse Analogie zur heutigen Rolle des sogenannten Goldstandards zur Währungsdeckung (vgl. für eine kurze Diskussion des Bildes der formalen Ableitung als „Goldstandard des mathematischen Beweises“ Löwe & Müller [75, Fußnote 10]). Während der Goldstandard, also die direkte Deckung von Münzgeld durch Goldreserven, tatsächlich schon seit geraumer Zeit durch ein komplexes, stellenweise undurchschaubares Finanzsystem abgelöst wurde, in welchem eine direkte Deckung von Geld in dieser Form nicht mehr gegeben ist, prägt er dennoch immer noch unsere Vorstellungen vom Wert des Geldes, mit dem wir täglich handeln.

[396] Vgl. Abschnitt 2.3.3, S. 65, sowie Aspekt (IV).

5 Vergleich der analytischen und empirischen Ergebnisse und Skizze zweier sozio-empirisch informierter Lesarten von (FKE)

In diesem Kapitel geht es um die Umsetzung von Schritt 3 des Drei-Schritte-Programmes DSP einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik[397] in Bezug auf die in dieser Arbeit behandelten speziellen Fragestellungen.

In Abschnitt 5.1 erfolgt zunächst ein Vergleich der analytischen Ergebnisse aus Kapitel 2 mit den empirischen Ergebnissen aus den Kapiteln 3 und 4 im Hinblick auf die empirisch-deskriptive Adäquatheit[398] verschiedener Lesarten von (FKE). Dazu werden in einem kurzen einführenden Teil von 5.1 vor dem Hintergrund der methodologischen Zielsetzung der Arbeit einerseits und den konkreten empirischen Ergebnissen andererseits geeignete Adäquatheitsbedingungen ausformuliert. Im zweiten Teil von 5.1 wird geprüft, ob diese Kriterien durch die in Kapitel 2 vorgestellten Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7) formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen erfüllt werden, vor allem unter Rückgriff auf die in Abschnitt 4.3 aufgeführten allgemeineren Aspekte (I) bis (VIII) der empirischen Ergebnisse. Es wird dabei jeweils auch diskutiert, welche Ansatzpunkte sich durch empirisch-deskriptiv adäquate Aspekte einzelner Lesarten für eine einheitliche sozio-empirisch informierte Lesart von (FKE) ergeben.

In Abschnitt 5.2 schlage ich zwei sozio-empirisch informierte formalisierbarkeitsorientierte Kriterien vor, die sich als eine Kombination von geeignet modifizierten positiv diskutierten Aspekten der Lesarten (FKE_4) und (FKE_7) sowie des funktionalen Beweisbegriffs im Rahmen der Kitcherschen Kritik an aprioristischen Lesarten von (FKE) auffassen lassen. Im ersten Teil von 5.2 werden diese Lesarten genauer spezifiziert. Im zweiten Teil diskutiere ich die empirisch-deskriptive Adäquatheit, im abschließenden Teil von 5.2 die erkenntnistheoretische Adäquatheit und Einordnung der beiden vorgeschlagenen

[397] Vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.3.3, S. 21.
[398] Vgl. Kapitel 1, S. 17, 21 und 28.

Kriterien in die in Kapitel 2 Abschnitt 2.2 entwickelte Matrix allgemeiner erkenntnistheoretischer Positionen.

5.1 Vergleich der analytischen und empirischen Ergebnisse

5.1.1 Formulierung konkreter Bedingungen für empirisch-deskriptiv adäquate Lesarten von (FKE)

Die empirisch-deskriptive Adäquatheit einer spezifischen Lesart von (FKE) gehört zu den abstrakten Bedingungen, die ein Kriterium für epistemische Zuschreibungen im Rahmen einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik erfüllen sollte. Damit ist nicht gemeint, dass (FKE) unter einer entsprechenden Spezifikation, ungeachtet der erkenntnistheoretischen Konsequenzen, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für sämtliche in der mathematischen Praxis vollzogenen epistemischen Zuschreibungen sein muss. Der Ausdruck „Adäquatheit“ muss hier in Bezug auf das semantische, also rein bedeutungsanalytische, und das explanatorische sowie evaluative Projekt einer wissenschaftsphilosophisch motivierten Erkenntnistheorie differenziert betrachtet werden.[399] Für die empirisch-deskriptive Adäquatheit einer Lesart von (FKE) reicht es nicht aus, wenn dieses nur ein adäquates Kriterium für epistemische Zuschreibungen im Sinne des semantischen Projektes darstellt,[400] d.h. die Bedeutung der Ausdrücke „mathematisches Wissen“ oder „mathematische Rechtfertigung“ informativ definiert. Um als empirisch-deskriptiv adäquat gelten zu können, soll (FKE) auch hinsichtlich des evaluativen und explanatorischen Projektes möglichst adäquat spezifiziert werden. Dabei geht es nun gerade nicht um eine abstrakte Definition, bei der der Anwendungsaspekt höchstens im Hintergrund steht. Es geht darum, tatsächliche Wahrmacher der epistemischen Zuschreibungsschemata „X weiß bzw. glaubt gerechtfertigt, dass p“ in der mathematischen Praxis zu identifizieren, und Bedingungen für die korrekte Bewertung von epistemischen Zuschreibungen zu formulieren, die den Gegebenheiten der Praxis angepasst und somit dort auch anwendbar und in der Regel erfüllt sind. Eine aus wissenschaftsphilosophischer Sicht gute empirisch-deskriptiv adäquate Analyse soll wenn möglich auch Verbindungen zwischen den Antworten auf die semantische, explanatorische und evaluative Analyseaufgabe aufgezeigt werden.

Für den nachfolgenden Vergleich der Ergebnisse aus Kapitel 2, 3 und 4 wird die Forderung der empirisch-deskriptiven Adäquatheit in obigem Sinne in Bezug auf die beiden

[399] Vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.3.1, S. 15 f.

[400] Ein nur hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium wäre unabhängig von der hier betrachteten Differenzierung ein philosophisch nicht zufriedenstellendes Analyseergebnis.

Parameter von (FKE) nun in zwei konkrete, notwendige und zusammen hinreichende Adäquatheitskriterien übersetzt. Diese berücksichtigen, dass die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen strukturell in Aussagen über charakteristische Eigenschaften von aus der Sicht praktizierender Mathematiker akzeptablen rechtfertigenden Beweisen und allgemeine Überlegungen zur Funktionsweise epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis zerfallen:

> **Kriterium 1** Der in der jeweiligen Lesart von (FKE) verwendete Formalisierbarkeitsbegriff muss mit den empirisch gefundenen Charakteristika akzeptabler Beweises hinreichend kompatibel sein, so dass die als akzeptabel geltenden Beweise der mathematischen Praxis (FKE) unter der entsprechenden Spezifikation in der Regel erfüllen. Insbesondere sollte Formalisierbarkeit als eine Eigenschaft von Entitäten konzipiert sein, die in der mathematischen Praxis tatsächlich existieren und epistemisch bewertet werden.

> **Kriterium 2** Die in (FKE) verwendete Spezifikation des zweiten Parameters, „verfügen über“, muss mit den allgemeinen Ergebnissen zu epistemischen Zuschreibungen entsprechend verträglich sein.

5.1.2 Empirisch-deskriptive Adäquatheit der Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7)

Im Folgenden prüfe ich die empirisch-deskriptive Adäquatheit der in Abschnitt 2.3 von Kapitel 2 analytisch diskutierten Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7) gemäß Kriterium 1 und 2 unter Rückgriff auf die in Abschnitt 4.3 aufgeführten Aspekte (I) bis (VIII). Dabei hebe ich auch Ansatzpunkte für die in Abschnitt 5.2 entwickelten sozio-empirisch informierten Lesarten von (FKE) hervor. Die Lesarten (FKE_1) bis (FKE_7) selbst werde ich nicht erneut explizit erläutern, es findet sich stattdessen jeweils eine genaue Referenz auf die entsprechende Stelle in Kapitel 2.

Empirisch-deskriptive Adäquatheit der invariantistischen Lesarten (FKE_1), (FKE_1’) und (FKE_2)

Strikt invariantistische Lesarten von (FKE), wie die in Abschnitt 2.3.1 diskutierten Lesarten (FKE_1) (S. 55) und (FKE_1’) (S. 55), werden den empirischen Ergebnissen (vor allem den Aspekten (IV) bis (VI) in Abschnitt 4.3) zur Funktionsweise von epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis, die in hohem Maße auf kontextsensitive Parameter hindeuten, offenbar weder im Hinblick auf das erste noch auf das zweite Adäquatheitskriterium gerecht. Eine Lesart wie (FKE_1’), die den Parameter „formalisierbar“ im Sinne von $\text{Formalisierbarkeit}_{\text{inv}}$ (vgl. S. 55) spezifiziert, wäre unter leichten

Variationen zwar geeignet, Formalisierbarkeit$_{\text{ont}}$[401] als Kriterium für epistemische Zuschreibungen abzubilden. Nach den Überlegungen unter Aspekt VII wäre damit aber nur dem semantischen Projekt genüge getan, was für eine sozio-empirisch informierte Diskussion von (FKE) nicht ausreicht.

Auch für modalisierte invariantistische Lesarten wie (FKE$_2$) (S. 58), die in Abschnitt 2.3.2 besprochen wurden, wird insbesondere Kriterium 1 nicht erfüllt. Diese Lesarten zeichnen sich durch die Einführung einer kontextinvarianten Im-Prinzip-Klausel zur Abschwächung des Parameters „formalisierbar" aus. (FKE$_2$) etwa formuliert die modale Im-Prinzip-Klausel im Sinne einer kontextunabhängigen Idealisierung. Die Ergebnisse der Interviewstudie wurden von mir jedoch so interpretiert, dass die Interviewpartner die im Gespräch zunächst sogar verwendeten Abschwächungen ontischer Formalisierbarkeit, die durch scheinbar kontextinvariante und unspezifizierte Im-Prinzip-Klauseln eingeführt wurden, in Bezug auf die tatsächlichen Gegebenheiten der Forschungspraxis durch kontextsensitive epistemische Modalisierungen im Sinne von epistemischer Formalisierbarkeit ersetzt haben.[402]

Generell stellt sich hinsichtlich der sinnvollen Einbindung einer Im-Prinzip-Klausel zur Abschwächung des Konzepts ontischer Formalisierbarkeit in ein empirisch informiertes (FKE) außerdem die Frage, ob eine solche geeignet ist, das Verhältnis zwischen ontischer und epistemischer Formalisierbarkeit hinreichend zu klären, bzw. diese beiden Formalisierbarkeitskonzepte – gegebenenfalls unter angemessener Modifikation – fruchtbar in einem epistemischen Kriterium zu vereinen. Dies gilt auch für kontextsensitive Im-Prinzip-Klauseln. „Formalisierbar$_{\text{epist}}$" würde dann im Sinne von „im Prinzip formalisierbar$_{\text{ont}}$" verstanden. Ein prinzipielles Bedenken hierbei ist, dass auch eine kontextsensitive, aber ansonsten weitgehend unspezifizierte Im-Prinzip-Klausel die Beziehung zwischen den beiden Formalisierbarkeitsbegriffen eher verschleiert oder sogar verfälscht. So ist die Überlegung, Formalisierbarkeit$_{\text{epist}}$ als Eigenschaft von Beweis*handlungen* aufzufassen, empirisch gut begründbar.[403] Diesem kategorialen Unterschied zu den Eigenschaftsträgern ontischer Formalisierbarkeit, also rein sprachlichen Entitäten, wird eine Analyse von „formalisierbar$_{\text{epist}}$" als „im Prinzip formalisierbar$_{\text{ont}}$" aber nicht gerecht. Darüber hinaus sollte die Modalität von „überführbar" in (F$_{\text{ont}}$) als alethische, die in (F$_{\text{epist}}$) dagegen nicht als alethische, sondern als eine epistemische oder doxastische verstanden

[401] Vgl. Abschnitt 4.3, S. 214.

[402] Vgl. insbesondere in der Analyse der Interviewstudie zu Ausgangsfrage 3, S. 190. Eine Ausnahme bildet hier Interviewpartner 3, der möglicherweise eine ähnlich idealisierte Im-Prinzip-Klausel bei der Explikation von „formalisierbar" verwendet, wie sie (FKE$_2$) vorsieht (vgl. S. 182).

[403] Vgl. Abschnitt 4.3, S. 215.

werden.[404] Dieser Aspekt würde durch eine Im-Prinzip-Klausel, die den Schritt von ontischer zu epistemischer Formalisierbarkeit einfach als eine Abschwächung im Sinne von „unter bestimmten Umständen“ oder „üblicherweise“ darstellt, jedoch nicht unbedingt korrekt oder präzise genug erfasst. Die nachfolgend diskutierten, kontextualistischen modalisierten Lesarten von (FKE) verzichten auf Im-Prinzip-Klauseln.

Empirisch-deskriptive Adäquatheit der kontextualistischen modalisierten Lesarten ($\mathbf{FKE}_3$) und ($\mathbf{FKE}_4$)

Im Rahmen der in Kapitel 2 besprochenen kontextualistischen modalisierten Lesarten (FKE_3) (S. 60) und (FKE_4) (S. 62) werden beide Parameter von (FKE) kontextualisiert.

Für „verfügen über“ wird in (FKE_3) die Kontextualisierung über einen angemessenen, vom epistemischen Subjekt X realisierbaren Zeitrahmen vorgeschlagen. Unter einer starken Lesart von „formalisierbar“ komme ich anhand der Ergebnisse der Interviewstudie zu dem Ergebnis, dass dieser Vorschlag im Hinblick auf das zweite Adäquatheitskriterium zurückgewiesen werden sollte: Die Interviewpartner nehmen häufig Bezug auf Zeitrahmen im Zusammenhang mit der Frage nach der tatsächlichen Formalisierbarkeit mathematischer Beweise, nämlich im Sinne von Zeitrahmen, innerhalb derer ein formalisiertes oder $\text{formalisierbares}_{\text{ont}}$ Argument erzeugt werden soll. Der dazu benötigte Zeitrahmen wird aber gerade als außerhalb des epistemisch Möglichen betrachtet, d.h. (FKE_3) ist nicht erfüllt.[405]

Damit ist die von Löwe und Müller vorgeschlagenen Lesart (FKE_4) in Bezug auf den Parameter „verfügen über“, d.h. gemäß Kriterium 2, empirisch-deskriptiv adäquater als (FKE_3), da hier im Unterschied zu (FKE_3) die Rede von Zeitfaktoren durch die Rede von Fähigkeiten und Professionsstufen ersetzt ist. Dies gilt auch für den speziellen Modellierungsansatz der mathematischen Fähigkeiten und Professionsstufen nach Dreyfus

[404] Vgl. zu dieser feineren Unterscheidung epistemischer Modalitäten etwa Girle [43, Kap. 10 „Epistemic Logic“] und darüber hinaus z. B. Lenzen [72]; der Ausdruck „epistemisch“ wird dann spezifisch im Zusammenhang mit Wissenslogiken, der Ausdruck „doxastisch“ dagegen in Bezug auf Modalitäten des (rationalen) Glaubens verwendet.

[405] Vgl. die Analyse der Interviewstudie zu Ausgangsfrage 3, S. 189. Über die Angemessenheit einer Kontextualisierung von (FKE) mittels eines solchen Zeitfaktors in Zusammenhang mit entsprechend liberalisierten Formalisierbarkeitskonzeptionen wird dadurch aber noch keine Aussage gemacht. Hier greift jedoch weiterhin die in Abschnitt 2.3.3 bereits erwähnte Kritik von Löwe und Müller an der Fruchtbarkeit einer kontextualistischen Analyse durch (FKE_3) (vgl. S. 60 f.). Die empirischen Ergebnisse deuten ebenfalls nicht darauf hin, dass (allein) der Zeitrahmen, der zur hinreichenden Ausarbeitung eines vom epistemischen Subjekt erbrachten Argumentes in Abhängigkeit von dessen speziellem Fähigkeitsprofil zur Verfügung gestellt werden muss, bestimmt, ob das Argument als akzeptabler Beweis gelten kann (vgl. insbesondere Aspekt (III) und (IV)).

und Dreyfus.[406] Auch die in Abschnitt 4.3 angesprochene Internalisierung von formalen Schlussregeln im Laufe der Erhöhung der mathematischen Professionsstufe ließe sich im Rahmen des Dreyfus-Dreyfus-Modells als Übergang von Anfänger- zu Expertenstufen durch die Herausbildung von implizitem Wissen anstelle von bewusst regelbasiertem Handeln beschreiben.[407]

Bereits in der Zwischenbilanz in Abschnitt 2.3.3 habe ich jedoch weiterhin angesprochen, dass (FKE_4) die (empirischen) Fragen offen lässt,[408] ob und in welchem Sinne

1. die darin enthaltene Spezifikation „ein Beweis des vom Kontext geforderten Typs" überhaupt mit einer geeigneten Spezifikation von „formalisierbar" kompatibel ist, und

2. tatsächlich eine von Löwe und Müller postulierte Rückkopplung der Beweistypen und mathematischen Professionsstufen an das *Ziel* mathematischer Forschung gegeben ist,[409] die eine fruchtbare kontextsensitive Analyse[410] durch (FKE_4) sichert.

Die erste Frage ist hinsichtlich der empirisch-deskriptiven Adäquatheit von (FKE_4) für Kriterium 1, die zweite eher für Kriterium 2 relevant. Auf Grundlage der konkreten empirischen Ergebnisse lassen sich nun beide Fragen in folgendem Sinne positiv beantworten: Sofern man „einen Beweis des vom Kontext geforderten Typs" im Sinne von „gemäß den Akzeptanzstandards des Kontexts akzeptabler Beweis" versteht, bietet das Konzept der epistemischen Formalisierbarkeit einen Ansatzpunkt für eine entsprechende Spezifikation von „formalisierbar".[411] Die Rückkopplung von situativ erforderlichem Beweistyp und Professionsstufe an das Ziel mathematischer Forschungspraxis, welches gemäß Aspekt (III) über Wissen-dass hinaus als die Gewinnung von mathematischem Verständnis bzw. Wissen-warum ausgemacht wurde, ist ebenfalls gegeben: Ein Beweis in einem konkreten Kontext soll zu Wissen-warum beitragen. Für das Maß dieses Beitrages gibt es unterschiedliche Meßgrößen, wie die Klarheit und Sinnhaftigkeit der Argumentationsstruktur, die Fehlerrobustheit der Schlüsselargumentation, die Detailkorrektheit oder die Übertragbarkeit auf und Fruchtbarkeit für andere, vor allem innermathematische Problemstellungen. Das erforderliche Maß ist essentiell an die für eine bestimmte Professionsstufe in Bezug auf die relevanten mathematischen Spezialgebiete nötigen mathematischen Fähigkeiten der im jeweiligen Kontext beteiligten epistemischen Subjekte

[406] Vgl. Abschnitt 2.3.3, S. 61. Ich verwende im Folgenden wieder die vereinfachte Sprechweise „Professionsstufe von X".
[407] Vgl. auch Aspekt (VIII).
[408] Vgl. S. 66 f.
[409] Vgl. S. 63 f.
[410] Vgl. wieder S. 60.
[411] Vgl. insbesondere Aspekt (VII) in 4.3.

gebunden. Die Ausgestaltung und Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten ist dabei auf mathematisches Verständnis ausgerichtet, so dass die Professionsstufe auch als Verständnislevel interpretiert werden kann.[412]

Um diese Antworten durch eine geeignete Spezifikation von (FKE) angemessen abbilden zu können, schlage ich in 5.2 eine umfassendere Liberalisierung des Beweisbegriffes der mathematischen Praxis vor als den von Löwe und Müller vorgeschlagenen kontextabhängigen Beweistyp.

Empirisch-deskriptive Adäquatheit der Lesarten (FKE_5) und (FKE_6)

In Abschnitt 2.3.4 wurden zwei aprioristische Lesarten von (FKE), (FKE_5) (S. 68) und (FKE_6) (S. 69), diskutiert. Beide können, wie dort bereits dargelegt, in Anlehnung an Kitchers Einwänden gegen aprioristische Theorien mathematischen Wissens aufgrund mangelnder deskriptiver Adäquatheit bzw. mit Hilfe eines *long proofs*-Argumentes bereits zurückgewiesen. Letzteres besagte, dass jedwede Spezifikation von (FKE), welche die Rechtfertigungsleistung von Beweisen im lokalen logischen Schlussfolgern durch das epistemische Subjekt sieht, im Falle von langen und unübersichtlichen, also insbesondere stark formalisierten Argumenten aufgrund der hohen Fehlerwahrscheinlichkeit kein hinreichendes Kriterium für eine positive epistemische Zuschreibung darstellen kann. Dieser Einwand trifft, wie in 2.3.4 kurz diskutiert, zumindest internalistische Rechtfertigungstheorien, und ließe sich gegebenenfalls externalistisch aushebeln. Ohne an dieser Stelle bereits eine Aussage darüber machen zu wollen, inwieweit ein empirisch informierter Rechtfertigungsbegriff für die Mathematik internalistisch oder externalistisch konzipiert werden sollte, deuten die empirischen Ergebnisse gemäß Aspekt (II) und (VI) in 4.3 darauf hin, dass ein *long proofs*-Argument einen aus Sicht der mathematischen Praxis ernstzunehmenden Einwand darstellt. Die charakteristische Eigenschaft der Fehlerrobustheit akzeptabler Beweise in der Praxis, also die Robustheit des wesentlichen Argumentationsganges eines informellen Argumentes gegenüber Detailfehlern, liefert gerade die durch ein *long proofs*-Argument geforderte Beschränkung des rationalen Zweifels an der Korrektheit eines langen und komplexen Beweises. Damit eignen sich sowohl (FKE_5) als auch (FKE_6) nicht als empirisch informierte epistemische Kriterien im Sinne des von mir verfolgten Ansatzes.

Aufgreifen und konstruktiv fortführen lassen sich jedoch einige von Kitchers Überlegungen zu einem funktionalen Beweisbegriff.[413] Der Übergang vom Beweis als rein sprachlicher Entität zur Handlung des Beweisfolgens stellt nach Kitcher einen geeigneten Ansatz

[412] Vgl. hierzu auch Aspekt (IV).
[413] Vgl. Abschnitt 2.3.4, S. 68.

dar, um die spezielle Aufgabe von Beweisen etwa im Rahmen von aprioristischen Theorien mathematischen Wissen zu analysieren. Unabhängig von aprioristischen Theorien, sondern empirisch motiviert ist ein solcher Übergang von Beweisen als rein sprachlichen Entitäten zu einer bestimmten Art von Handlungen gemäß den Aspekten (I) und (VII) in Abschnitt 4.3 ebenfalls erfolgversprechend, um die Rechtfertigungsfunktion akzeptabler Beweise in der mathematischen Praxis sozio-empirisch informiert zu analysieren. Dieser Übergang findet hier jedoch von rein sprachlich verfassten mathematischen Argumenten zu Beweishandlungen im Sinne von Dialogen zwischen Beweisendem und Zuhörer[414] als Basis von beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung statt. Zu den Eigenschaften, aufgrund derer als „gut" oder „akzeptabel" geltende Beweise der mathematischen Praxis diese Rechtfertigungsfunktion besonders gut oder besser als andere Beweise erfüllen, zählen gemäß Aspekt (VII) gerade bestimmte Charakteristika solcher dialogischen Handlungen. Ähnliche Überlegungen liegen auch der Einschätzung der empirischen Relevanz des Begriffs epistemischer Formalisierbarkeit gemäß Aspekt (VII) zugrunde. Demnach stellen Beweishandlungen den zentralen Untersuchungsgegenstand einer sozio-empirisch informierten Analyse von Zuschreibungen beweisbasierten Wissens und beweisbasierter Rechtfertigung in der Mathematik dar. Die spezielle Aufgabe einer formalisierbaren$_{\text{epist}}$ Beweishandlung besteht neben der Begründung von Wissen-dass in der Erzeugung und Vermittlung von mathematischem Verständnis. In Bezug auf diese Aufgabe lassen sich die unter 4.3 aufgeführten allgemeineren epistemischen Charakteristika und Gütekriterien für akzeptable Beweise verstehen. Ontische Formalisierbarkeit allein ist dagegen nicht hinreichend dafür, dass ein Beweis dem Ziel mathematischer Forschung besonders zuträglich ist.

Bei der Suche nach einer geeigneten Kombination von Aspekten ontischer und epistemischer Formalisierbarkeit, die eine möglichst empirisch-deskriptiv adäquate Spezifikation von „formalisierbar" im Rahmen von (FKE) liefert, geht es also auch darum, eine präzisere Antwort auf die folgende Frage zu geben, als dies bisher allein auf Grundlage der empirischen Ergebnisse möglich war: Welche Faktoren sind dafür verantwortlich, dass formalisierbare$_{\text{epist}}$ Beweishandlungen in der mathematischen Praxis bestimmte Aufgaben erfüllen, und warum tun sie dies besonders gut und in welcher Hinsicht besser als rein sprachlich verfasste, formalisierbare$_{\text{ont}}$ Beweise?

[414] Vgl. die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 4, S. 204.

Empirisch-deskriptive Adäquatheit der Ableitungsanzeiger-Lesart (FKE$_7$)

Gemäß der in Abschnitt 2.3.5 vorgestellten Lesart (FKE$_7$) werden mathematische Beweise angelehnt an Azzouni als Ableitungsanzeiger betrachtet, die auf formale Ableitungen „verweisen". Ich strukturiere die folgendene Diskussion der empirisch-deskriptiven Adäquatheit dieser Lesart von vornherein als Diskussion eines besonders geeigneten Kandidaten für eine präzise Modellierung der Funktionsweise akzeptabler, in der mathematischen Praxis als epistemisch formalisierbar beschriebener Beweise. Im direkten Vergleich der empirischen Ergebnisse mit (FKE$_7$) (S. 73) zeigt sich, dass dennoch einige Modifikationen an Azzounis ursprünglicher Konzeption, insbesondere die Formulierung einer Ableitungsanzeiger-Eigenschaft für Beweishandlungen und die explizite Einbeziehung einer größeren Bandbreite kontextueller Faktoren, vorzunehmen sind. Auf diese Modifikationen werde ich jeweils etwas genauer eingehen.

In 2.3.5 wurde bereits diskutiert, dass Azzounis Ableitungsanzeiger-Sichtweise mit gewissen Abschwächungen verträglich ist, die er selbst jedoch nur implizit kenntlich macht. Diese Abschwächungen begünstigen, wie hier erläutert werden soll, die empirisch-deskriptive Adäquatheit von (FKE$_7$).

In Bezug auf die Unterscheidung zwischen ontischer und epistemischer Formalisierbarkeit kann Azzounis Ableitungsanzeiger-Eigenschaft zunächst, aufgrund der liberalen Charakterisierung eines „algorithmischen Systems",[415] in dem die einem Ableitungsanzeiger zugrundeliegende Ableitung formulierbar sein soll, im Sinne ontischer Formalisierbarkeit gelesen werden. Der Ableitungsanzeiger darf demnach Abkürzungen im Sinne der Verwendung bereits bewiesener Beweisteile oder -techniken enthalten. Diese Erlaubnis lässt sich ohne Verletzung der mechanischen Überführbarkeit in eine formale Ableitung aussprechen, da sich solche speziellen meta-mathematischen Abkürzungserlaubnisse rein syntaktisch im Sinne erlaubter Beziehungen zwischen formalen Ableitungen modellieren lassen.

Darüber hinaus lässt Azzouni jedoch zu,[416] dass ein Ableitungsanzeiger etwa im Sinne von Aspekt (IV) (S. 209) essentiell von einer formalen Ableitung abweicht: Er darf informelle Meta-Schlussfiguren verwenden, denen keine geeigneten, allgemeinen syntaktisch-logischen Schlussregeln entsprechen, sondern die inhaltsspezifisch gültig sind. Die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft kann in diesem Fall nicht ohne Weiteres im Sinne von (F$_{\text{ont}}$) als ontische Formalisierbarkeit verstanden werden: Beweise, die Meta-Argumentationen im Sinne von Azzouni enthalten, mögen zwar fallspezifisch formalisiert werden können – es ist aber zumindest nicht klar, ob aus Azzounis Sicht eine sprachliche Verfeinerung

[415] Vgl. S. 73.
[416] Vgl. die Diskussion in 2.3.5, S. 74 f.

im Sinne von (F_{ont}) für die notwendige Aufschlüsselung der Argumentation in formale Teilschritte ausreicht.[417]

Zwei der in [3] ausgeführten Überlegungen lassen sich meiner Ansicht nach speziell im Sinne von epistemischer Formalisierbarkeit deuten. Dabei handelt es sich zum einen um die in 2.3.5 (vgl. S. 77) bereits zitierte Feststellung, dass Mathematiker „formale Ableitung nicht ausführen, sondern sich selbst oder anderen Mathematikern formale Ableitungen anzeigen".[418] Dies scheint die Ableitungsanzeiger-Funktion mathematischer Beweise vom rein sprachlich verfassten Argument auf Argumentationshandlungen auszudehnen. Ein weiteres Zitat zur Aufgabe mathematischer Beweise in der mathematischen Praxis, welches diese als „Werkzeuge, mit denen Mathematiker sich oder andere Mathematiker von einer mechanisch prüfbaren Ableitung überzeugen"[419] charakterisiert,[420] entspricht dabei sogar fast wörtlich der Charakterisierung epistemischer Formalisierbarkeit in 4.2.4. Zum anderen spricht Azzouni explizit eine Möglichkeit an, durch die – im Unterschied zu von ihm ebenfalls diskutierten, prinzipiell eliminierbaren sozialen Hilfspraktiken wie das Zeugnis durch Andere (*testimony*)[421] – nicht eliminierbare und auch nicht „formal kodierbare"[422] soziale und damit auch kontextuelle Aspekte der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft ins Spiel kommen. Gemeint sind mathematisch grundlegende oder themenspezifische Beweistechniken, über die ein Mathematiker verfügt und deren Beherrschung er bei einem geeigneten Adressatenkreis seines Beweises voraussetzen darf. Das Verfügen über spezielle Beweistechniken ist eine Fähigkeit, die notwendig ist, um ein unvollständiges informelles Argument, welches nur auf die Anwendbarkeit der entsprechenden Technik verweist, geeignet zu vervollständigen. Auch dabei handelt es sich, wie im Falle der im vorangegangenen Absatz diskutierten inhaltsspezifischen Meta-Schlussfiguren, nicht nur um eine Verfeinerung des Ursprungsargumentes im Sinne ontischer Formalisierbarkeit, sondern um eine mehr oder weniger kreative Anwendung einer abstrakten Technik auf den konkreten Fall, was entsprechende Transferleistungen verlangt. Über welche Beweistechniken Mathematiker zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Entwicklung mathemati-

[417] Im Falle des in Abschnitt 2.3.5 diskutierten Beispiels eines Symmetrieschlusses mag dies aus Azzounis Sicht allerdings möglich sein:

> „Here too (at least in the examples I've given, and others like them), one also goes through the derivation and modifies it step-by-step so that the result is a new derivation [...] only that the tools used to enable the transformations are not logical axioms, but topic-specific truths about specific relations and predicates (of the subject-matter)." [3, S. 89]

[418] Vgl. [3, S.95], meine Übersetzung.
[419] Vgl. [3, S. 84 f.], meine Übersetzung.
[420] Vgl. S. 76.
[421] Vgl. 2.3.5.
[422] Vgl. Azzouni [3, S. 95].

scher Forschung verfügen, ist nach Azzouni zumindest historisch bedingt. Darüber hinaus kommt nun im Falle konkreter Beurteilungen von vorgebrachten Beweisen dahingehend, ob es sich um einen Ableitungsanzeiger handelt, der Aspekt des mathematischen Fähigkeitsprofils des Beweisenden und des Adressatenkreises des Beweisenden hinzu. Die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft ist dann nicht länger eine intrinsische Eigenschaft des Argumentes an sich, sondern eine situativ von der jeweiligen Ausgangssituation abhängige Eigenschaft der zugehörigen Beweishandlung. Unter dieser im Vergleich zur ursprünglichen Formulierung schwächeren Deutung rückt Azzounis Ableitungsanzeiger-Sichtweise informeller mathematischer Beweises näher an das Konzept epistemischer Formalisierbarkeit im Sinne von (F_{epist}).

Problematisch für die empirisch-deskritive Adäquatheit von (FKE_7) ist hingegen, dass ein Ableitungsanzeiger nach Azzouni in folgendem Sinne infallibel ist: Ist ein informeller Beweis ein Ableitungsanzeiger, so ist seine Konklusion formal ableitbar und in diesem speziellen Sinne auch wahr:

> „[The derivation indicator view] is, after all, the claim that a proof of a theorem *reveals* a derivation of that theorem (in some informally specified algorithmic system or other).“[423]

Gemäß Aspekt (II) sind akzeptable mathematische Beweise dennoch stets fallibel, d.h. sie können die Gültigkeit ihrer Konklusion nicht garantieren. Diese Fallibilitätsbedingung ist auch für formalisierbare$_{\text{epist}}$ Beweishandlungen erfüllt, denn sie müssen die beteiligten Mathematiker nur davon *überzeugen*, dass das zugehörige sprachliche Argument unter Berücksichtigung der Umstände der Beweishandlung in ein ontisch formalisierbares Argument überführt werden kann. Für eine in diesem Punkt empirisch-deskriptiv adäquatere Formulierung einer Ableitungsanzeiger-Lesart von (FKE) muss die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft also hinreichend liberalisiert werden.[424]

5.2 Skizze zweier empirisch informierter formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen

In diesem Abschnitt schlage ich eine Skizze für eine sozio-empirisch informierte Lesart von (FKE) vor, welche die im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Ansätze verbindet. Insbesondere werden mit der expliziten Einbindung mathematischer Fähigkeiten

[423]Azzouni [3, S. 85], meine Hervorhebung.
[424]Vgl. Abschnitt 5.2.2, S. 242 f. sowie Abschnitt 5.2.3, S. 251 f.

und Professionsstufen im Sinne von Löwe und Müller bzw. Dreyfus und Dreyfus[425] und der Spezifikation eines Formalisierbarkeitsbegriffs für Beweishandlungen mittels einer erweiterten Ableitungsanzeiger-Eigenschaft Aspekte von (FKE_4), (FKE_7) und den Kitcherschen Überlegungen zu einem funktionalen Beweisbegriff aufgegriffen. Die für diese Spezifikation notwendigen Begrifflichkeiten führe ich im Folgenden schrittweise ein. Den Definitionen gehen dabei jeweils entsprechende Erläuterungen sowie einzelne Verweise auf bestimmte empirische Ergebnisse voraus.[426] Diese dienen dem besseren Verständnis und der Motivation der jeweiligen Definition vor dem Hintergrund der bisher diskutierten Ergebnisse. Eine eingehende analytische Diskussion der definierten Konzepte bleibt jedoch aus.[427]

5.2.1 Spezifikation von ($\mathbf{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathbf{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$)

Die in Kapitel 3 und 4 vorgestellte Interpretation der empirischen Ergebnisse zu epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis[428] legt eine kontextualistische Auffassung der Begriffe mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung im Sinne von (FKE_4) nahe: Es wird verlangt, dass ein epistemisches Subjekt X die Fähigkeit besitzen muss, einen in Bezug auf den Zuschreibungskontext akzeptablen Beweis zu produzieren, um zu wissen oder gerechtfertigt zu glauben, dass p.[429] Die epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes stellen zum einen Parameter dar, die Bedingungen festlegen, unter denen ein epistemisches Subjekt X in der Lage sein muss, einen akzeptablen Beweis für p zu präsentieren. Zum anderen bestehen sie in dem Maß an Formalisiertheit, welches ein von X dazu ausgeführtes Argument für p zwar nicht selbst besitzen muss, auf das es aber in einer noch genauer zu spezifizierenden Form verweisen

[425] Vgl. Abschnitt 2.3.3 sowie Abschnitt 5.1, S. 221 f.

[426] Eine ausführliche, systematische Diskussion der empirisch-deskriptiven Adäquatheit erfolgt in Abschnitt 5.2.2.

[427] Insbesondere werde ich stellenweise auf Konzepte zurückgreifen, die nicht durch exakte, bestimmten formalen Kriterien des korrekten Definierens genügende Explizitdefinitionen eingeführt, sondern in den Interpretationen der empirischen Ergebnisse zur Darstellung und Analyse stabiler Sprechweisen der mathematischen Praxis verwendet wurden. Dies betrifft in Abschnitt 5.2.1 insbesondere die Konzepte der Fehlerrobustheit und der Kernargumentation eines mathematischen Argumentes sowie die Rede von Formalisiertheitsstufen und Beweistypen, in den Abschnitten 5.2.2 und 5.2.3 auch die des Perspektivwechsels, die Rede von Wissen-warum und mathematischen *settings*, das Konzept der Meta-Argumentation, sowie die Begriffe ontischer und epistemischer Formalisierbarkeit.

[428] Vgl. Aspekt (V) in Abschnitt 4.3 und insbesondere die Kernaussagen zu Ausgangsfrage 1 und 4 in Abschnitt 4.2.2, S. 165 bzw. 4.2.5, S. 203 ff.

[429] Vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.1.2, S. 221 ff.

soll,[430] um als akzeptabel zu gelten, sowie in der für einen akzeptablen Beweis erforderlichen Fehlerrobustheit seiner Kernargumentation.[431]

Die in Abschnitt 4.2.5 diskutierten Ergebnisse der Interviewstudie zeigen insbesondere, dass es Sinn macht, von einem kontextabhängigen Maß an Formalisiertheit im Sinne eines Maßes von Detailkorrektheit zu sprechen.[432] Damit sind qualitativ unterschiedliche Formalisiertheitsstufen eines mathematischen Argumentes gemeint, die nicht unbedingt in eine feste Ordnung gebracht werden können.[433] Auch eine schwächere Formalisiertheitsstufe als etwa ontische Formalisierbarkeit[434] kann dabei als kontextabhängig hinreichende und zuverlässige Indikation dafür gelten, dass p ableitbar ist. In der heutigen mathematischen Forschung wird nicht mehr direkt, d.h. durch den konkreten Versuch einer formalen Ableitung, geprüft, ob p ableitbar ist. Dies wäre zumindest mit realistischem Zeitaufwand auch gar nicht möglich.[435] Stattdessen kommen im Laufe eines Beweisprozesses, der mit der Angabe eines akzeptablen Beweises für p nicht unbedingt abgeschlossen ist, andere, indirekte Prüf- und Kontrollmechanismen für die Ableitbarkeit von p zum Einsatz, die sich in der Praxis jedoch als sehr zuverlässig erweisen. Die Forderung, dass p ableitbar ist, werde ich daher zumindest im Rahmen eines formalisierbarkeitsorientierten Wissenskriteriums als zusätzliche Bedingung explizit mit aufnehmen.

Gemäß der beiden Spezifikationen von (FKE), die ich vorschlagen werde, besitzt X die Fähigkeit, einen kontextrelativ akzeptablen Beweis produzieren zu können, gerade dann, wenn X' mathematische Fähigkeiten hinreichen, um unter geeigneten Bedingungen eine sogenannte ableitungsanzeigende Beweishandlung für p erfolgreich auszuführen; das Konzept einer mathematischen Fähigkeit ist dabei im Folgenden immer im Sinne der in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten, an das Dreyfus-Dreyfus-Modell professioneller Fähigkeiten und Professionsgrade angelehnten Konzeption von Löwe und Müller zu verstehen. Diese

[430] Etwa in dem Sinne, dass es eine geeignete Basis für die Ausarbeitung eines in diesem Maße formalisierten Argumentes bildet.

[431] Vgl. hierzu die Analyse zur Interviewstudie in Kapitel 4, besonders S. 195, 204 und zusammenfassend Aspekt (II) in Abschnitt 4.3 S. 207.

[432] Vgl. insbesondere Fußnote 351 auf S. 204.

[433] Das kontextuell erforderliche Maß an Detailkorrektheit kann situativ insbesondere sehr unterschiedlich realisiert werden: In einem Kontext, in dem es vor allem um die Beweisidee der Kernargumentation geht, kann ein eher niedriges Maß an Detailkorrektheit hinreichend sein. Im Falle eines Beweises, der eine Reihe von innovativen inhaltlich-begrifflichen Meta-Argumentationen verwendet, kann dies bedeuten, dass vor allem die umfassende Beweisstruktur korrekt aufgearbeitet werden muss. In einem anderen Kontext mit einem ebenfalls eher niedrigen Maß an geforderter Detailkorrektheit kann, falls der Beweis viele bekannte und akzeptierte informelle Beweisroutinen in den wesentlichen Beweisschritten verwendet, aber eine technisch anspruchsvolle Konstruktion in einem bestimmten zentralen Beweisschritt enthält, die Aufarbeitung dieses speziellen Schrittes dennoch vor der Aufarbeitung der umfassenden Beweisstruktur Vorrang haben.

[434] Gemäß der Definition (F_{ont}), vgl. S. 214.

[435] Vgl. die Analyse von Interviewzitaten zu Ausgangsfrage 3, S. 189.

Spezifikationen werde ich im Folgenden schrittweise entwickeln, und dabei zuerst den Begriff „ableitungsanzeigende Beweishandlung“ und seine kontextuellen Parameter explizit einführen.

Zunächst möchte ich den Begriff der Beweishandlung spezifizieren.[436] Dazu greife ich auf das allgemeinere Konzept einer dialogischen kommunikativen Handlung zurück.[437] Eine solche Handlung findet immer auf der Basis einer bestimmten Ausgangssituation statt. Eine notwendige Voraussetzung dafür, dass eine dialogische kommunikative Handlung eine Beweishandlung im Sinne der nachfolgenden Definition sein kann, ist, dass sich in Bezug auf die Ausgangssituation folgende strukturelle Elemente identifizieren lassen: ein beweisführendes Subjekt X, eine zu präsentierende Argumentation für einen mathematischen Satz p, die aus einem sprachlich verfassten Argument A mit Konklusion p und einer Menge NL von argumentativ relevanten paralinguistischen[438] und anderen nonverbalen[439] Elementen besteht, sowie ein Adressatenkreis Y. Ich spreche im Folgenden kurz von einer dialogischen kommunikativen Handlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y), für die zu präsentierende Argumentation schreibe ich abkürzend: (A, NL). Den Begriff einer *Beweishandlung für p mit Startkonfiguration* (X, p, A, NL, Y) definiere ich davon ausgehend wie folgt:

> Eine *Beweishandlung für p mit Startkonfiguration* (X, p, A, NL, Y) (kurz auch: *Beweishandlung für p*) ist eine dialogische kommunikative Handlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y), durch die das beweisführende Subjekt X die Argumentation (A, NL) für p dem Adressatenkreis Y, gegebenenfalls unter Einbeziehung argumentativ relevanter Beiträge seitens Y, präsentiert.
>
> Dabei muss X ein *kompetenter Argumentationspartner* sein, d. h. potentielle Kommentare, Einwände und Rückfragen seitens des Adressatenkreises ver-

[436] Der Ausdruck „Beweishandlung“ (und damit verbunden auch der Ausdruck „Ausgangssituation“) wurde in Kapitel 4 im Rahmen der Interpretation der Interviewstudie weitestgehend unspezifiziert *ad hoc* eingeführt (S. 204 und 205) und insbesondere auch in der Definition epistemischer Formalisierbarkeit durch ($\mathrm{F}_{\mathrm{epist}}$)) sowie in Abschnitt 5.1 im Sinne dieser Sprechweise verwendet.

[437] Ich beziehe mich hier auf ein in Sprachphilosophie und Linguistik verwendetes Konzept dialogischer kommunikativer Handlungen, wodurch Handlungen bezeichnet werden, mit denen der jeweils Handelnde „seine jeweiligen Ziele auf kommunikativem Wege zu erreichen beabsichtigt. [...] Charakteristisch für ein kommunikatives Handeln ist, dass es aus der Sicht des Handelnden genau dann erfolgreich ist, wenn es vom Adressaten verstanden wird.“ (Meggle [94, Abschn. I.1]). Dabei geht es mir, vor dem Hintergrund einer Unterscheidung zwischen kommunikativen Aufforderungs- und Informationshandlungen, um Informationshandlungen, deren „primäre[s] kommunikative[s] Ziel [es] ist, dass der Adressat etwas bestimmtes glaubt“ (Meggle [94, Abschn. II.1]). Dialogische im Unterschied zu monologischen kommunikativen Handlungen sind spezielle kommunikative Handlungen, deren Kommunikationsform der Dialog (im Unterschied zum Monolog) ist.

[438] D. h. nebensprachliche oder sprachbegleitende Erscheinungen wie Gestik, Mimik, Lautstärke, Sprechtempo u.a..

[439] Wie z. B. bildhafte Darstellungen.

stehen und der Kommunikationssituation angemessen darauf reagieren können.[440]

Die epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes, die für eine positive epistemische Zuschreibung ausschlaggebend sind, sollen den geforderten Beweistyp der Präsentation von (A, NL) und die geforderte Professionsstufe (in Bezug auf die relevanten mathematischen Spezialgebiete) für Y festlegen. Die Präsentation kann dabei von (A, NL) verschiedene argumentativ relevante Elemente enthalten, neben Anmerkungen, Korrekturen und Ergänzungen seitens Y auch durch X selbst ergänzte und präzisierte Beweisschritte. Unter dem Beweistyp einer Präsentation von (A, NL) verstehe ich im Folgenden insbesondere Art und Anteil der paralinguistischen und anderen nonverbalen Elemente NL und der argumentativ relevanten Beiträge seitens Y sowie die gegebene Formalisiertheitsstufe der Präsentation. Damit werden für ein beliebiges festes X Bedingungen festgelegt, die eine Beweishandlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) erfüllen muss, um diesen Standards gerecht zu werden.

Weiterhin sollen die epistemischen Standards, wie oben bereits erwähnt, das geforderte Maß an Fehlerrobustheit der Kernargumentation von (A, NL) umfassen, sowie das Mindestmaß an Formalisiertheit eines Argumentes festlegen, welches X ausgehend von der (im konkreten Fall ggf. selbst dafür nicht hinreichend formalisierten) Argumentpräsentation jeweils erzeugen können soll; ich spreche im Folgenden auch kurz vom *anzuzeigenden Maß an Formalisiertheit* oder von der *anzuzeigenden Formalisiertheitsstufe.* Damit wird festgelegt, welche spezifischen mathematischen Fähigkeiten X besitzen muss, um

[440] Damit wird nicht gefordert, dass X jede Rückfrage korrekt beantworten kann, sondern es wird eine sprachliche und argumentative Grundkompetenz von X bezüglich (A, NL) verlangt. So wird z. B. sichergestellt, dass X die Bedeutung der in A vorkommenden Zeichen und Ausdrücke in hinreichendem Maße kennt und sich seines Handelns als Argumentierender, der von bestimmten Prämissen ausgeht, um durch zulässige Schlußfolgerungen eine bestimmte Konklusion nachzuweisen, hinreichend bewusst ist, um eine angemessene Kommunikation über (A, NL) überhaupt zu ermöglichen. Damit werden insbesondere zwei pathologische Fälle ausgeschlossen:

1. Der Fall, in dem ein als Symbolfolge auswendig gelernter formaler oder formalisierbarer$_{\text{ont}}$ Beweis von einem absoluten mathematischen Laien X vorgebracht wird, wobei X aber weder die Bedeutung der von ihm verwendeten Zeichen noch die Regeln kennt, die die von ihm vollzogenen Schlußfolgerungen rechtfertigen. Von diesem pathologischen Fall zu unterscheiden ist dagegen Szenario 3 der Umfragestudie. Dort ist der Student Tom zwar nicht in der Lage, die Fragen seines Professors Smith bezüglich eines von Tom vorgebrachten ontisch formalisierbaren Beweises korrekt zu beantworten, es ist jedoch davon auszugehen, dass Tom die Fragen von Smith versteht und angemessen darauf reagieren kann.
2. Der Fall, in dem ein Computer, der aufgrund einer geeigneten Software in der Lage ist, eigenständig Beweise für mathematische Theoreme zu führen, als X auftritt. Das Konzept der Beweishandlung ist dennoch verträglich damit, dass A ein computerunterstützter Beweis ist, solange X hinsichtlich des computerunterstützten Argumentes ein kompetenter Argumentationspartner ist.

im konkreten Fall eine in Bezug auf den Zuschreibungskontext *ableitungsanzeigende Beweishandlung für p* auszuführen:

> Eine Beweishandlung für p mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) ist *ableitungsanzeigend* in Bezug auf einen Zuschreibungskontext, wenn der Beweistyp der Präsentation von (A, NL) (die auch argumentativ relevante Beiträge seitens Y umfasst) sowie die Professionsstufe von Y den aktuellen epistemischen Standards entsprechen, und X über die spezifischen mathematischen Fähigkeiten verfügt, um durch geeignete Modifikation, Korrektur und Ergänzung der Präsentation von (A, NL) im Rahmen der geforderten Fehlerrobustheit der Kernargumentation ein Argument zu produzieren, welches die kontextuell geforderte anzuzeigende Formalisiertheitsstufe besitzt.

Für mathematisches Wissen mag nun die Fähigkeit, ein Argument zu produzieren, welches in einem rein kontextuell bestimmten Maße formalisiert ist, nicht hinreichen. Im Gegensatz zu bloßer Rechtfertigung muss auch einem kontextualistischen philosophischen Verständnis nach eine gewisse kontextübergreifende Robustheit der rechtfertigenden Gründe einer Überzeugung gegeben sein, um diese zu Wissen zu machen.[441] Von einer „einfach" ableitungsanzeigenden Beweishandlung soll sich daher eine *robust ableitungsanzeigenden Beweishandlung* unterscheiden:

> Eine ableitungsanzeigende Beweishandlung für p mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) ist *robust ableitungsanzeigend* in Bezug auf einen Zuschreibungskontext, wenn X auch über die spezifischen mathematischen Fähigkeiten verfügt, um durch geeignete Modifikation, Korrektur und Ergänzung der Präsentation von (A, NL) im Rahmen der geforderten Fehlerrobustheit der Kernargumentation ein Argument zu produzieren, welches (gegebenenfalls über das kontextuell geforderte anzuzeigende Maß an Formalisiertheit hinaus) in einem hinreichenden Maße formalisiert ist, um die mathematische Gemeinschaft aktuell[442] von der formalen Ableitbarkeit von p in einem geeigneten mathematischen Axiomensystem zu überzeugen.

Die Lesarten von (FKE), die ich vorschlagen werde, sollen hinreichende mathematische Fähigkeiten des epistemischen Subjektes X einfordern, um ableitungsanzeigende bzw. ro-

[441] Vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.2.3.

[442] D.h.: Einen beliebigen oder eine Gruppe von beliebigen Repräsentanten der mathematischen Gemeinschaft, die das zum Zeitpunkt der epistemischen Zuschreibung bestehende kollektive Hintergrundwissen und die entsprechenden kollektiven Hintergrundüberzeugungen der mathematischen Gemeinschaft teilen.

bust ableitungsanzeigende Beweishandlungen erfolgreich ausführen zu können. Um diese Forderung adäquat zu formulieren, sind wiederum eine Reihe von Vorüberlegungen nötig.

Für eine positive epistemische Zuschreibung soll ein epistemisches Subjekt X in der Lage sein, eine in Bezug auf den Zuschreibungskontext ableitungsanzeigende bzw. robust ableitungsanzeigende Beweishandlung für p erfolgreich auszuführen. Dabei soll weder gefordert werden, dass X zum Zeitpunkt der epistemischen Zuschreibung eine solche Beweishandlung ausführen muss, noch, dass X überhaupt eine konkrete Beweishandlung ausführen muss. Tatsächlich unterscheiden sich Zuschreibungs- und Beweishandlungskontexte in der Regel bereits zeitlich, die Ausgangssituation einer konkreten Beweishandlung sollte also generell vom Zuschreibungskontext verschieden sein können. Dies ist gewährleistet, wenn man „in der Lage sein" im Sinne des Vorliegens geeigneter mathematischer Fähigkeiten von X versteht, die X, gegeben eine zulässige Testsituation, in die Lage versetzen, darin eine geeignete Beweishandlung zu vollziehen.[443] Es soll also die Forderung gelten, dass X' mathematische Fähigkeiten hinreichen, um, gegeben eine konkrete Ausgangssituation mit einer den epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden geeigneten Startkonfiguration, in der Regel eine ableitungsanzeigende bzw. robust ableitungsanzeigende Beweishandlung erfolgreich auszuführen.[444]

[443] Dies entspricht gerade dem dispositionalen Verständnis mathematischer Fähigkeiten zusammen mit einem Dreyfus-Dreyfus-Modell des Erwerbs mathematischer Fähigkeiten und mathematischer Professionsgrade, welches Löwe und Müller in [75] und [78] entwickeln und an dem ich mich hier orientiere. Vgl. für eine umfassende, allgemeine Analyse normalsprachlicher Fähigkeitszuschreibungen etwa Thomann [123].

[444] Hier wird also bewusst etwas anderes gefordert als die bloße Möglichkeit einer (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlung durch X. Eine Möglichkeitsaussage, die im Sinne einer Existenzforderung einer möglichen Welt zu lesen wäre, in der X eine geeignete Beweishandlung ausführt, ist nämlich in (mindestens) zweierlei Hinsicht problematisch.

Zum einen ist sie zu schwach, denn X sollte, um gerechtfertigt zu glauben oder gar zu wissen, dass p, nicht nur in einer einzigen spezifischen Situation in der Lage sein, eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung für p auszuführen; unter normalen Umständen sollte X etwa nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern auch zu späteren Zeitpunkten dazu in der Lage sein. Auch sollten X' mathematische Fähigkeiten, die eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung möglich machen, nicht so spezifisch sein, dass sie nur in Bezug auf eine spezielle Ausgangssituation mit entsprechender Startkonfiguration hinreichend für eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung sind: X Fähigkeiten sollten darüber hinaus hinreichen, um auch unter angemessenen Variationen im Rahmen der epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung auszuführen. Hiermit wird also eine weitere Stabilitätsbedingung für positive epistemische Zuschreibungen ins Spiel gebracht.

Zum anderen wäre für die Forderung, dass eine geeignete Beweishandlung möglich sein soll, zu spezifizieren, welche Art von Möglichkeit dabei gemeint ist. Die Begriffe epistemischer und doxastischer (vgl. Fußnote 404) Möglichkeit, welche hier die einzig wirklich naheliegende Wahl darstellen, sind aber bereits aus dem Grund eher ungeeignet, dass sie unter Umständen eine zirkuläre Analyse nach sich zögen: Die doxastische (epistemische) Möglichkeit einer (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlung wird im Sinne von „nach allem, was Y (z. B. ein ideales rationales epistemische Subjekt) rational glaubt (weiß), kann X eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung ausführen" verstanden, und kann daher nicht ohne Weiteres sinnvoll zur Analyse der Begriffe „Rechtfertigung" und „Wissen" eingesetzt werden; es ist

Da der Zuschreibungskontext nun von einer möglichen Ausgangssituation der Beweishandlung verschieden sein kann, ist nicht mehr gesichert, dass X die Argumentation (A, NL) zum Zeitpunkt der epistemischen Zuschreibung überhaupt kennt. Für den aktuellen Zuschreibungskontext ist also weiterhin zu fordern, dass X auf (A, NL) selbst bereits kognitiven Zugriff hat. Außerdem soll dort gelten, dass X glaubt, dass p und darüber hinaus, dass X glaubt, dass (A, NL) den Satz p stützt.[445] So wird ausgeschlossen, dass X allein aufgrund unzureichender Gründe zu der Überzeugung kommen kann, dass p, und seine mathematischen Fähigkeiten nur zufällig hinreichen, um eine ableitungsanzeigende oder robust ableitungsanzeigende Beweishandlung durchzuführen.[446]

Es stellt sich noch die Frage, auf welchen Kontext sich die durch die Ableitungsanzeiger-Eigenschaften induzierte Fähigkeitszuschreibungen zum epistemischen Subjekts X im Rahmen einer entsprechenden Lesart von (FKE) beziehen sollen. Dabei droht zunächst folgendes Dilemma: Damit beweisbasiertes mathematisches Wissen oder beweisbasierte mathematische Rechtfertigung vorliegt, sollten X' mathematische Fähigkeiten unabhängig davon, ob man geeignete faktische oder kontrafaktische Ausgangssituationen betrachtet, hinreichen, um in der Regel eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung erfolgreich ausführen zu können. Es macht daher keinen Sinn, X die benötigten Fähigkeiten erst in Bezug auf die jeweilige Ausgangssituation zuzuschreiben. Umgekehrt lassen sich die unter Umständen sehr spezifischen mathematischen Fähigkeiten, die X in einzelnen Ausgangsituationen benötigt, um eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung auszuführen, aber nur situativ bestimmen, was eine Beurteilung der Frage, ob X in Bezug auf den Zuschreibungskontext tatsächlich über geeignete, spezifische mathematische Fähigkeiten verfügt, stark zu erschweren oder gar unmöglich zu machen scheint.[447] Eine solche Konsequenz wäre aus der Sicht einer sozio-empirischen Erkenntnistheorie der Mathematik deshalb besonders unbefriedigend, weil so das evaluative Projekt einer Analyse epistemischer Zuschreibungen unzureichend behandelt würde.

Neben der Möglichkeit, die Beurteilung auf Tests in einzelnen, hinreichend paradigmatischen Ausgangssituationen zu stützen (vgl. hierzu Abschnitt 5.2.2) bietet auch das in Abschnitt 2.3.3 vorgestellte Dreyfus-Dreyfus-Modell des Fähigkeitserwerbs mit der Ab-

u.a. nicht klar, ob Y hier nicht bereits selbst über mathematische Rechtfertigung oder mathematisches Wissen im engeren Sinne verfügen müsste.

[445] Die Forderung, dass X ein kompetenter Argumentationspartner sein muss, um eine Beweishandlung auszuführen, reicht hier nicht aus: X kann für einen kompetenten Argumentationspartner hinreichende Kenntnisse über die Bedeutung der in einem bestimmten Argument vorkommenden Zeichen haben und auch ein hinreichendes abstraktes Grundverständnis deduktiver Argumente, ohne dass X das Argument selbst kennt.

[446] Vgl. Abschnitt 5.2.3.

[447] Vgl. die Diskussion in Löwe & Müller [78, S. 274].

stufung allgemeiner Professionsstufen, die von individuellen Subjekten mit unterschiedlichen spezifischen Fähigkeiten in konkreten Situationen durch bestimmte Verhaltensweisen realisiert werden können, hier einen Ausweg. Es ermöglicht, wie die folgenden Erläuterungen zeigen sollen,[448] unterschiedliche Antworten auf das semantische und explanatorische Projekt einerseits und das evaluative Projekt andererseits und zeigt gleichzeitig eine Verbindung zwischen diesen Antworten auf.[449] Für die Wahrheit einer positiven epistemischen Zuschreibung kann dabei tatsächlich gefordert werden, dass X' aktuelle mathematische Fähigkeiten in Bezug auf den Zuschreibungskontext ausreichen, um, gegeben eine geeignete (faktische oder kontrafaktische) Ausgangssituation mit einer den epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden Startkonfiguration, in der Regel eine (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlung erfolgreich auszuführen.

Geeignete, sozio-empirisch informierte Spezifikationen von (FKE) im Sinne des semantischen und auch des explanatorischen Projektes setzen sich gemäß den vorangegangenen Überlegungen also aus bestimmten Kombinationen der folgenden Bedingungen zusammen:

(Abl) p ist aus einer geeigneten Menge mathematischer Axiome *formal ableitbar*.

(Gl) X *glaubt*, dass p.

(Kog) X besitzt aktuell *kognitiven Zugang* zu einer Argumentation (A, NL) für p und glaubt, dass (A, NL) p argumentativ stützt.

(FaB) X' aktuelle *mathematische Fähigkeiten* sind hinreichend, um in jeder geeigneten Ausgangssituation mit einem den aktuellen epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden Adressatenkreis Y in der Regel eine in Bezug auf den aktuellen Kontext *ableitungsanzeigende* Beweishandlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) erfolgreich auszuführen.[450]

[448] Vgl. S. 238.

[449] Vgl. Abschnitt 1.3.1, S. 15 f.

[450] Eine Beweishandlung erfolgreich auszuführen bedeutet dabei, in Anlehnung an die sprachphilosophische und linguistische Konzeption von kommunikativen Handlungen (vgl. Fußnote 437), zweierlei (vgl. zu den entsprechenden allgemeinen Bedingungen für erfolgreich ausgeführte kommunikative Handlungen Meggle [94, Abschn. II.6–II.7]): Erstens muss der jeweilige Adressat eines im Rahmen der Beweishandlung ausgeführten Kommunikationsversuchs eines bestimmten Inhalts diesen Versuch auch als solchen verstehen, also erkennen, was ihm sein Gegenüber mittels des Kommunikationsversuchs sagen will. Zweitens muss der Adressat daraufhin auch der mit dem Kommunikationsversuch verbundenen Erfolgserwartung des Gegenübers entsprechen, also im Falle von kommunikativen Informationshandlungen, um die es hier in erster Linie geht, den übermittelten Inhalt glauben.

Der Inhalt einer Beweishandlung für p mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) ist nun, schematisch formuliert, im Sinne der folgenden Aussage zu verstehen: Die im Rahmen der Beweishandlung vorgetragene Präsentation von (A, NL), inklusive der argumentativ relevanten Beiträge seitens Y, stellen

(FraB) X' aktuelle *mathematische Fähigkeiten* sind hinreichend, um in jeder geeigneten Ausgangssituation mit einem den aktuellen epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden Adressatenkreis Y in der Regel eine in Bezug auf den aktuellen Kontext *robust ableitungsanzeigende* Beweishandlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) erfolgreich auszuführen.

X und p treten in diesen Bedingungen als freie Variablen auf. (Kog), (FaB) und (FraB) enthalten darüber hinaus (A, NL) als zusätzlichen freien Parameter, über den im Rahmen von (FKE) geeignet quantifiziert werden muss. Daneben wird in (FaB) und (FraB) über faktische und kontrafaktische Ausgangssituationen eingeschränkt allquantifiziert.[451]

---

eine Argumentation dar, die p stützt, und die auf ihrer gegebenen Formalisiertheitsstufe (die im Falle einer ableitungsanzeigenden Beweishandlung niedriger sein kann als die kontextuell geforderte anzuzeigende Formalisiertheitsstufe, also die Formalisiertheitsstufe des Argumentes, das X mittels seiner mathematischen Fähigkeiten ausgehend von dieser Präsentation erzeugen können muss) keine aktuell identifizierbaren Fehler enthält.

Die erfolgreiche Ausführung einer dialogisch konzipierten Beweishandlung bedeutet also insbesondere, dass

a) X im Laufe der Präsentation von (A, NL) explizit formulierte, relevante Einwände, Fragen, Korrekturen und Anmerkungen seitens Y zu Korrektheit und Struktur der Argumentation als solche erkennen und im weiteren Verlauf der Beweishandlung angemessen berücksichtigen muss.

b) die Dialogpartner Y nach der Ausführung der Beweishandlung glauben, dass die Präsentation von (A, NL), inklusive der argumentativ relevanten Beiträge seitens Y, eine Argumentation darstellt, die p stützt, und die auf ihrer konkret gegebenen, Formalisiertheitsstufe keine aktuell identifizierbaren Fehler enthält. Betreffen konkret formulierte Zweifel der Dialogpartner die Korrektheit der vorgebrachten Argumentation auf ihrer gegebenen Formalisiertheitsstufe, so muss X diese Zweifel also im weiteren Verlauf der Beweishandlung nicht nur angemessen berücksichtigen, sondern ausräumen.

Im Falle einer ableitungsanzeigenden Beweishandlung ist die für (b) relevante Formalisiertheitsstufe durch den kontextuell erforderlichen Beweistyp der Präsentation von (A, NL) vorgegeben. Als Beispiel zu (b) stelle man sich hier vor, dass die Dialogpartner eine im Rahmen einer Beweishandlung vorgetragene Heuristik bemängeln. Betreffen ihre Zweifel die formale Umsetzung der Heuristik, so muss X diese Zweifel im Laufe der Beweishandlung nicht gänzlich ausräumen, wenn der Zuschreibungskontext in Bezug auf die Präsentation von (A, NL) einen Beweistyp fordert, der den Gebrauch von Heuristiken zulässt. Betreffen die Zweifel im gleichen Kontext jedoch die Güte der Heuristik als solcher, so muss X sie im Laufe der Beweishandlung ausräumen, um diese Handlung erfolgreich auszuführen.

[451] Diese Quantifikation wirft erneut die Frage nach der geeigneten Modalität auf (vgl. Fußnote 444). Diese lässt sich hier, also in Bezug auf die möglichen Ausgangssituationen von ableitungsanzeigenden Beweishandlungen, meiner Ansicht nach aber zufriedenstellender beantworten als in Bezug auf die Möglichkeit ableitungsanzeigender Beweishandlungen selbst: Es bietet sich zum Beispiel eine Allquantifikation über in Bezug auf den Zuschreibungskontext historisch mögliche Ausgangssituationen an. Eine Allquantifikation über logisch mögliche Ausgangssituationen stellt dagegen sicherlich eine zu starke Forderung hinsichtlich der historisch bedingten Entwicklung der Mathematik als wissenschaftlicher Praxis dar. Ähnliches gilt für eine Allquantifikation über metaphysisch mögliche Ausgangssituationen. Der metaphysische Möglichkeitsbegriff ist darüber hinaus an die Debatte um Vorstellbarkeit und Möglichkeit gebunden, was im Falle mathematischer Sätze zu diversen Unklarheiten führt: Bei dem verbreiteten Versuch, „A ist metaphysisch möglich“ durch „A ist vorstellbar“ zu analysieren, treten gerade mathematische Sätze eher als Kandidaten für pathologische Fälle auf, als dass deutlich würde, wie sich für diese das Verhältnis von Vorstellbarkeit und metaphysischer Möglichkeit gestaltet (vgl. hierzu etwa Chalmers [21]).

Diese Einschränkung geschieht sowohl durch den Zusatz „geeignet“ als auch dadurch, dass das Y der jeweiligen Ausgangssituation den epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechen muss. „Geeignet“ meint dabei also nicht nur die kontextuell geeigneten Y. Die epistemischen Standards eines Zuschreibungskontextes schließen indirekt bestimmte Ausgangssituationen als prinzipiell ungeeignet aus.[452] Darüber hinaus sollen durch den Zusatz „geeignet“ kontextübergreifend gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen werden: Unabhängig von den epistemischen Standards eines Zuschreibungskontextes gibt es offenbar unzulässige allgemeine Testbedingungen für das Ausführen-Können von ableitungsanzeigenden Beweishandlungen.[453]

Für ein sozio-empirisch informiertes formalisierbarkeitsorientiertes *Wissens*kriterium ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) schlage ich folgende Kombination der Bedingungen (Abl), (Gl), (Kog) und (FraB) vor:

> p ist aus einer geeigneten Menge mathematischer Axiome formal ableitbar, X glaubt, dass p, und es gibt eine Argumentation (A, NL) für p, so dass X aktuell kognitiven Zugang zu (A, NL) besitzt und glaubt, dass (A, NL) p argumentativ stützt, und X' aktuelle mathematische Fähigkeiten reichen hin, um in jeder geeigneten Ausgangssituation mit einem den aktuellen epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden Adressatenkreis Y in der Regel eine in Bezug auf den aktuellen Kontext *robust ableitungsanzeigende* Beweishandlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) erfolgreich auszuführen. ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$)

Man beachte, dass sich der Existenzquantor für (A, NL) hier sowohl auf (Kog) als auch auf (FraB) bezieht.[454]

[452] So muss, um eine kontextuell angemessene Präsentation von (A, NL) zu gewährleisten, unter Umständen eine Tafel o.ä. vorhanden sein.

[453] Z. B. kann man von einem stark übermüdeten Mathematiker nicht unbedingt erwarten, dass er in diesem Zustand in der Regel eine ableitungsanzeigende Beweishandlung für p ausführen kann (auch wenn er durchaus noch über kognitiven Zugang zu einem mathematischen Argument für p verfügt, auf dessen Basis er unter anderen Umständen (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlungen normalerweise erfolgreich ausführen kann). Dennoch würde man ihm deshalb sein Wissen, dass p oder die Rechtfertigung für seine Überzeugung, dass p, nicht absprechen wollen.

[454] In abgekürzter Schreibweise lautet ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$):

> Abl(p) und Gl(X, p) und es gibt eine Argumentation (A, NL) für p, so dass Kog(X, p, A, NL) und FraB(X, p, A, NL, Y).

Die analoge Kombination von (Gl), (Kog) und (FaB) liefert ein entsprechendes formalisierbarkeitsorientiertes *Rechtfertigungs*kriterium ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$):[455]

> X glaubt, dass p, und es gibt eine Argumentation (A, NL) für p, so dass X aktuell kognitiven Zugang zu (A, NL) besitzt und glaubt, dass (A, NL) p argumentativ stützt, und X' aktuelle mathematische Fähigkeiten reichen hin, um in jeder geeigneten Ausgangssituation mit einem den aktuellen epistemischen Standards des Zuschreibungskontextes entsprechenden Adressatenkreis Y in der Regel eine in Bezug auf den aktuellen Kontext *ableitungsanzeigende* Beweishandlung mit Startkonfiguration (X, p, A, NL, Y) erfolgreich auszuführen. ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$)

Eine angemessene, zuverlässige Beurteilung epistemischer Zuschreibungen im Sinne des evaluativen Projektes kann, wie bereits erwähnt, etwa durch Tests unter geeigneten, hinreichend paradigmatischen Bedingungen geschehen.[456] Alternativ reicht es in Fällen, in denen X zum Zuschreibungszeitpunkt bereits eine spezifische Beweishandlung tatsächlich ausgeführt hat, jedoch hin, zu beurteilen, ob diese spezielle Beweishandlung in Bezug auf den Zuschreibungskontext ableitungsanzeigend bzw. robust ableitungsanzeigend ist, und ob X' aktuelle Professionsstufe (in Bezug auf die relevanten mathematischen Spezialgebiete) darüber hinaus ausreicht, entsprechende ableitungsanzeigende Beweishandlungen auch unter in zulässiger Weise modifizierten Umständen in der Regel erfolgreich auszuführen. Die benötigte Professionsstufe lässt sich meist, im Unterschied zur situativen Bestimmung der für eine konkrete ableitungsanzeigende bzw. robust ableitungsanzeigende Beweishandlung benötigten spezifischen mathematischen Fähigkeiten, bereits anhand allgemeinerer im Zuschreibungskontext verfügbarer Informationen über das X kognitiv zugängliche Argument (A, NL) sowie über das geforderte anzuzeigende Maß an Formalisiertheit zuverlässig feststellen.[457] Gerade die vertiefenden Kommentare der Interviewpartner zu den Umfrageszenarien 1 und 4 (teilweise auch 2), in denen den Befragten kaum spezifische Informationen zu einzelnen Beweishandlungen zur Verfügung standen,

---

[455] Kurz für ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$):

> $\mathrm{Gl}(X, p)$ und es gibt eine Argumentation (A, NL) für p, so dass $\mathrm{Kog}(X, p, A, NL)$ und $\mathrm{FaB}(X, p, A, NL, Y)$.

[456] Vgl. hierzu den folgenden Abschnitt 5.2.2, S. 246. Ein einzelner Test ist offenbar nicht unbedingt hinreichend, da er nicht ohne Weiteres einen Schluss auf X Fähigkeit, ableitungsanzeigende bzw. robust ableitungsanzeigende Beweishandlungen unter sämtlichen geeigneten Bedingungen in der Regel erfolgreich auszuführen, erlaubt.

[457] Vgl. hierzu auch die Diskussion in Löwe & Müller [78, Abschn. 5.3].

verdeutlichen dies. Hier wurde mittels eines Abgleichs der vermeintlichen Professionsstufe des jeweiligen Szenarioprotagonisten (und ggf. anderer Beteiligter) mit der mutmaßlich benötigten Professionsstufe über die in Frage stehende epistemische Zuschreibung geurteilt.[458]

Ich werde nun diskutieren, inwiefern (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) den in dieser Arbeit vorgestellten empirischen Ergebnissen auch im Detail gerecht werden, und wie sie sich in die in Kapitel 2 entwickelte erkenntnistheoretische Klassifikation verschiedener Lesarten von (FKE) einordnen lassen.

5.2.2 Empirisch-deskriptive Adäquatheit von (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf})

Gemäß den beiden in Abschnitt 5.1 (S. 219) entwickelten Kriterien für die empirisch-deskriptive Adäquatheit einer Lesart von (FKE) ist zu prüfen, ob (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) hinsichtlich der enthaltenen Spezifikation der beiden Parameter „formalisierbar" und „verfügen über" von den empirischen Ergebnissen in der Regel erfüllt werden. Dies betrifft nicht nur konkrete Anwendungsfälle epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis, sondern auch die allgemeinen abstrakten Einstellungen praktizierender Mathematiker hinsichtlich des Beweis- und Formalisierbarkeitsbegriffes.

Die folgende Diskussion orientiert sich systematisch an diesen beiden Kriterien: Ich diskutiere zunächst die Vereinbarkeit der in (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) enthaltenen

[458] Vgl. insbesondere einige der Zitate von Interviewpartner 2 und 6 zu Szenario 1, 2 und 4, wie etwa:

> „First, Jones is a world famous expert, so it means she's teaching in Harvard or something, that's what you think of, and then you write that it is send to a mathematical journal of high reputation [...]. So, that puts the scenario in a framework." (Int 6, S. 345)

> „What [a student] knows is that he must explain this proof at the test in a convincing way. Hardly he knows more about it unless he is a born mathematician, then he can have stronger convictions." (Int 2, S. 316)

> „Mates is a mathematician who knows what is a proof, he can estimate what time he needs to move from the stage were he has a convincing sketch to the full proof." (Int 2, S. 315) (Dieses Zitat ist Teil der Transkription (Anhang), wurde aber in Kapitel 4 nicht explizit aufgeführt.)

Das dritte Zitat steht in einem gewissen Gegensatz zur Deutung des Antwortverhaltens von Cluster 4 der Umfrageergebnisse zu Szenario 4 (vgl. Abschnitt 3.2.2 S. 127). Vor dem Hintergrund von (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) scheinen diese Teilnehmer, im Unterschied zu Interviewpartner 2, Mates gemäß dieser Deutung die mathematischen Fähigkeiten abzuschreiben, die seine Gesamtbeweisskizze zu einer geeigneten ableitungsanzeigenden Beweishandlung machen würden. Ein Grund dafür könnte sein, dass die Teilnehmer das aktuelle Vorliegen einer Fähigkeit nur dann anerkennen, wenn diese auch tatsächlich zur Anwendung kommen kann. Im Falle von Szenario 4 wird letzteres durch Mates' krankheitsbedingte zeitliche Einschränkung verhindert. Der (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) zugrundeliegende Fähigkeitsbegriff versteht mathematische Fähigkeiten als professionelle Fähigkeiten, deren Besitz nicht zwingend davon abhängt, sie tatsächlich erfolgreich anzuwenden.

Spezifikation von „formalisierbar“ mit den in Abschnitt 4.3 zusammengefassten allgemeineren und abstrakteren Aspekten akzeptabler Beweise in der mathematischen Praxis (Kriterium 1). Anschließend diskutiere ich die in (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) enthaltene Spezifikation von „verfügen über“ vor dem Hintergrund der in Abschnitt 4.3 zusammengefassten allgemeineren und abstrakteren Aspekten epistemischer Zuschreibungen in der mathematischen Praxis (Kriterium 2). Dabei verweise ich meist direkt auf die in Abschnitt 4.3 aufgeführten Aspekte (I) bis (VIII), zur Illustration und genaueren Bezugnahme aber stellenweise auch auf wörtliche Zitate aus der Interviewstudie.

Zur Spezifikation von „formalisierbar“ im Sinne der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft

(FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) stellen Lesarten von (FKE) dar, die den Parameter „formalisierbar“ in Bezug auf Beweishandlungen wie folgt kontextsensitiv spezifizieren: Die (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlungen, die das epistemische Subjekt X ausführen können muss, um gerechtfertigt zu glauben oder zu wissen, dass p, sind in dem Sinne formalisierbar, dass X die mathematischen Fähigkeiten besitzen muss, die im Rahmen solcher Beweishandlungen vorgebrachten Argumente in hinreichend starkem Maße zu formalisieren. Für Wissen sollen solche Argumente insbesondere durch X soweit formalisiert werden können, wie es gemäß den im Zuschreibungskontext vorherrschenden allgemeinen Standards der mathematischen Gemeinschaft hinreicht, um von der formalen Ableitbarkeit von p zu überzeugen. Mit der Kontextsensitivität dieser Spezifikation wird insbesondere Aspekt (V) (vgl. 4.3, S. 212) Rechnung getragen.

Die Natur formalisierbarer Beweise Eine allgemeine Voraussetzung dafür, dass die empirischen Ergebnisse (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) hinsichtlich des Parameters „formalisierbar“ erfüllen können, ist die empirische Angemessenheit der durch die entsprechende Spezifikation induzierten Auffassung dessen, was ein Beweis und speziell ein formalisierbarer Beweis *ist*. (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) beantworten die Frage nach der Natur formalisierbarer Beweise mit dem Verweis auf Handlungen und entsprechen somit den empirischen Ergebnissen im Sinne von Aspekt (I) (vgl. Abschnitt 4.3, S. 206) sowie im Hinblick auf die Relevanz der Eigenschaft epistemischer Formalisierbarkeit informeller mathematischer Beweise (vgl. Aspekt (VII) in 4.3, S. 213 ff., insbesondere die Definition (F_{epist})).

Wissen-warum, sinnhafte Argumentationsstruktur und Meta-Argumentationen Gemäß Aspekt (III) und (IV) (vgl. 4.3, S. 207 ff.) dienen gute und akzeptable mathematische Beweise in der mathematischen Praxis nicht nur der Rechtfertigung von Wissen-dass, sondern in erster Linie auch der Erzeugung von *Wissen-warum*. Im Falle schwieriger mathematischer Theoreme mit sehr komplexen Beweisen ist Wissen-warum in der mathematischen Praxis sogar notwendig für Wissen-dass. Daher arbeiten Mathematiker in der Regel mit Argumenten, die eine sinnhafte Argumentationsstruktur aufweisen und Meta-Argumentationen im Sinne von Aspekt (IV) verwenden. Dies dient zum einen dazu, das Argument hinreichend übersichtlich und für das beweisführende oder nachvollziehende Subjekt erfassbar zu machen, damit es als Rechtfertigung überhaupt akzeptabel ist. Zum anderen wird so ein Perspektivwechsel (vgl. Aspekt (III), S. 207) ermöglicht oder zumindest vereinfacht, was in der Regel wiederum Voraussetzung für die Erzeugung von Wissen-warum ist.

Dieser Zusammenhang wird durch ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) mittels der geforderten Ableitungsanzeiger-Eigenschaft berücksichtigt: Zwar können beide Kriterien auch erfüllt sein, ohne dass das epistemische Subjekt über Wissen-warum verfügt, denn im Falle eines einfachen mathematischen Theorems p kann ein ontisch formalisierbares Argument für p bereits einem epistemischen Subjekt X mit geringen mathematischen Fähigkeiten so zugänglich sein, dass X als kompetenter Argumentationspartner bezüglich dieses Argumentes gelten kann. Je nach Kontext reicht es für das Erfülltsein von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) dann aus, dass X das Argument im Rahmen einer konkreten Beweishandlung angemessen reproduzieren kann. Beweishandlungen auf der Basis komplexer mathematischer Argumente, die im formalen Detail für ein epistemisches Subjekt nicht erfassbar sind, werden dagegen gerade erst dadurch ableitungsanzeigend, dass das präsentierte Argument eine bestimmte, sinnhafte Struktur besitzt und bestimmte Meta-Argumentationen enthält, und das epistemische Subjekt (und der Adressatenkreis) über die entsprechenden mathematischen Fähigkeiten zum angemessenen Umgang mit den entsprechenden Meta-Argumentationsmitteln verfügt.

Ableitungen als abstraktes, internalisiertes Leitbild Die Rolle des Konzepts des formalen Beweises als abstraktes, internalisiertes Leitbild professioneller mathematischer Beweispraxis (vgl. Aspekt (VIII) in 4.3, S. 216 f.) wird insofern durch ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) abgebildet, als ein epistemisches Subjekt zwar ein Argument mit einer bestimmten Formalisiertheitsstufe erzeugen können muss, um über eine gerechtfertigte beweisbasierte mathematische Überzeugung oder beweisbasiertes mathematisches Wissen zu verfügen, diese anzuzeigende[459] Formalisiertheitsstufe je nach Kontext aber an den

[459]Im Sinne der zusammen mit der Definition ableitungsanzeigender Beweishandlungen auf S. 232 eingeführten Kurzsprechweise.

im Rahmen von konkreten Beweishandlungen präsentierten sprachlich verfassten Argumenten selbst nicht in Erscheinung treten muss.[460]

Spezifische Formalisierungsregeln und -strategien, die das epistemische Subjekt X benötigt, um ein hinreichend stark formalisiertes Argument ausgehend von der jeweils präsentierten Argumentation erzeugen zu können, dürfen zudem je nach Professionsstufe von X in hohem Maße internalisiert sein.[461]

Formalisierbar$_{\text{epist}}$, formalisierbar$_{\text{ont}}$, Faktivität und Fallibilität Ein wichtiges Merkmal der unter Aspekt (VII) durch (F_{ont}) definierten Eigenschaft informeller Beweise (vgl. Abschnitt 4.3, S. 213 ff.) ist die Korrektheit eines formalisierbaren$_{\text{ont}}$ Beweises und damit die Faktivität eines darauf beruhenden Wissens- oder Rechtfertigungsbegriffes. Ein charakteristisches Merkmal formalisierbarer$_{\text{epist}}$ Beweishandlungen[462] (vgl. (F_{epist}) unter Aspekt (VII)) ist dagegen ihre Fallibilität, und damit die Fallibilität eines darauf beruhenden Rechtfertigungsbegriffes. Gemäß Aspekt (II) (vgl. 4.3, S. 206) sind mathematische Beweise in der Praxis stets prinzipiell fallibel, was (F_{epist}) zu einem geeigneteren Ausgangspunkt für eine empirisch informierte Konzeption formalisierbarkeitsorientierter epistemischer Rechtfertigung macht als (F_{ont}). Fallibilität ist darüber hinaus notwendig für einen philosophisch fundierten Rechtfertigungsbegriff.[463]

($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) gewährleistet die Fallibilität beweisbasierter epistemischer Rechtfertigung, denn X muss gemäß (FaB) nur in der Lage sein,[464] ein in einem kontextuell bestimmten Maße formalisiertes Argument für p zu erzeugen, und dabei im Rahmen konkreter Beweishandlungen formulierte explizite Zweifel und Einwände seitens des Adressatenkreises an der Korrektheit des präsentierten Argumentes in hinreichendem Maße ausräumen zu können.[465] Diese Forderung kann aber prinzipiell auch dann erfüllt werden, wenn es sich bei p um ein ungültiges Theorem handelt, oder wenn X' Kernargumentation unbemerkte

[460] Im Gegenteil können sich die tatsächlich präsentierten Argumente auch bei einer hohen anzuzeigenden Formalisiertheitsstufe insbesondere stark von einem formalen oder ontisch formalisierbaren Argument unterscheiden, etwa wenn es sich um den Vortrag eines auf dem thematischen Feld von p besonders versierten Experten vor einem Fachauditorium handelt.

[461] Vgl. die Diskussion zur Unterscheidung verschiedener Professionsstufen im Dreyfus-Dreyfus-Modell in Abschnitt 2.3.3, S. 64 f.

[462] Hier ist „Beweishandlung“ nun im unter Abschnitt 5.2.1 definierten Sinne gemeint. Ich betrachte diese Definition als geeignete Spezifikation der in (F_{epist}) noch unspezifiziert verwendeten *ad hoc* Sprechweise (vgl. Fußnote 436).

[463] Vgl. Abschnitt 5.2.3.

[464] In der folgenden Diskussion wird entsprechend der Quantifikation in ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) stets davon ausgegangen, dass (A, NL) in (Kog) und (FaB) bzw. (Kog) und (FraB) übereinstimmen.

[465] Eine ableitungsanzeigende Beweishandlung in der Regel erfolgreich auszuführen heißt im konkreten Fall insbesondere nicht, dass X den Adressatenkreis Y, wie in (F_{epist}) gefordert, von der Überführbarkeit der präsentierten Argumentation in ein ontisch formalisierbares Argument überzeugen muss. Vgl. auch Fußnote 450.

Fehler auf einer für die kontextuell benötigten Formalisiertheitsstufen[466] nicht relevanten Argumentationsebene enthält, die eine vollständige korrekte Formalisierung jedoch verhindern würden.

($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) hingegen schafft, wie in Abschnitt 5.1.1 abschließend gefordert,[467] eine auch erkenntnistheoretisch wünschenswerte Verbindung von Fallibilität und Faktivität[468] im Rahmen eines einheitlichen Kriteriums für mathematisches Wissen. Dabei verzichtet ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) gemäß den unter Aspekt (VII) angestellten Überlegungen darauf, die ontische Formalisierbarkeit eines im Rahmen von X' mathematischen Fähigkeiten liegenden Argumentes für p zu einer notwendigen Bedingung für das Vorliegen von beweisbasiertem mathematischem Wissen, dass p, zu machen. Stattdessen wird für ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) durch Bedingung (Abl) die formale Ableitbarkeit von p sowie durch Bedingung (FraB) das tatsächliche Vorliegen hinreichender mathematischer Fähigkeiten von X gefordert, um auf der Grundlage geeigneter Präsentationen von (A, NL) mindestens epistemisch formalisierbare Beweishandlungen ausführen, diese Präsentationen aber nicht unbedingt in ontisch formalisierbare Argumente überführen zu können. Dadurch wird einerseits die Faktivität von Wissen gesichert, andererseits wird aber auch eine meines Erachtens befriedigende, kontextualistische Lösung des Fallibilitätsproblems für Wissen im Sinne epistemischer Formalisierbarkeit geliefert: Die Bedingungen (Abl), (Gl), (Kog) und insbesondere (FraB) von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) können in Bezug auf einen geeigneten Zuschreibungskontext insbesondere erfüllt sein, ohne dass X selbst über ein formales oder formalisierbares$_{\mathrm{ont}}$ Argument (und damit einen Wahrheitsgaranten) für p verfügen oder ein solches herstellen können muss. Dies ist immer dann möglich, wenn die mathematische Gemeinschaft bereits durch ein weniger stark formalisiertes Argument von der formalen Ableitbarkeit von p überzeugt werden kann.[469] X muss also gemäß ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) prinzipiell nicht alle Irrtumsmöglichkeiten hinsichtlich p ausschließen können, um zu wissen, dass p.

[466] Damit sind einerseits die durch den geforderten Beweistyp induzierte Formalisiertheitsstufe der konkreten Präsentationen von (A, NL) im Rahmen von kontextuell ableitungsanzeigenden Beweishandlungen und andererseits die kontextuell geforderte anzuzeigende Formalisiertheitsstufe gemeint.

[467] Vgl. S. 215.

[468] Beide Eigenschaften sind notwendig für einen philosophisch fundierten Wissensbegriff, vgl. Abschnitt 5.2.3.

[469] In diesem Sinne ist auch ein formalisierbarer$_{\mathrm{epist}}$ Beweis prinzipiell fallibel. ($\mathrm{F}_{\mathrm{epist}}$) lässt jedoch mehr Spielraum für Fälle, in denen diese prinzipielle Fallibilität tatsächlich in Erscheinung tritt, denn im Unterschied zu der in (FraB) geforderten anzuzeigenden Formalisiertheitsstufe, die ausreichen muss, um *beliebige* Repräsentanten der mathematischen Gemeinschaft von der Ableitbarkeit von p überzeugen, muss ein formalisierbarer$_{\mathrm{epist}}$ Beweis nur kontextuell *geeignete* Mitglieder von der Ableitbarkeit von p überzeugen.

Zur Spezifikation von „verfügen über“ im Sinne des Vorliegens mathematischer Fähigkeiten

Das Vorliegen geeigneter mathematischer Fähigkeiten ist gemäß Aspekt (IV) in der Regel eine essentielle Voraussetzung dafür, spezifisches mathematisches Wissen, dass p oder die gerechtfertigte Meinung, dass p, zu besitzen.[470] Daher gehen mathematische Fähigkeiten als expliziter Bestandteil der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft in die Formulierung von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) mit ein. Dies erzeugt eine geeignete, ebenfalls kontextsensitive (und damit Aspekt (V) Rechnung tragende) Spezifikation des Parameters „verfügen über“: Das epistemische Subjekt verfügt über einen in gefordertem Maße formalisierten Beweis in dem Sinne, dass es hinreichende mathematische Fähigkeiten besitzt, um angemessene Darstellungen des ihm kognitiv zugänglichen Argumentes für p in entsprechend formalisierte Beweise zu überführen. Wie weit das X zugängliche Argument und auch eine Präsentation dieses Argumentes im Rahmen einer konkreten Beweishandlung von der kontextuell geforderten anzuzeigenden Formalisiertheitsstufe abweichen und sogar Fehler enthalten darf, ohne den epistemischen Wert der Beweishandlung zu schmälern, hängt von X' spezifischem Fähigkeitsprofil ab. Ein praktizierender Forschungsmathematiker mit entsprechender Expertise in dem mathematischen Fachgebiet, dem p und die in (A, NL) verwendeten Argumentationstechniken entstammen, hat in der Regel die nötigen formalen Beweisprozeduren in solchem Maße internalisiert, dass auch eine sehr informelle, skizzenhafte Präsentation der Argumentation (A, NL) im Rahmen einer kontextuell geeigneten Beweishandlung als (robust) ableitungsanzeigend gelten kann.[471]

Mittelbares Verfügen-über und Rolle der Dialogpartner Y im Rahmen einer (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlung In angemessenem Rahmen können in einer konkreten Beweishandlung auch die mathematischen Fähigkeiten der beteiligten Dialogpartner Y epistemisch wirksam werden und gegebenenfalls auch einen Mangel an speziellen mathematischen Fähigkeiten von X ausgleichen. Dies ist beispielsweise bei dem von Interviewpartner 5 beschriebenen Doktoranden der Fall. Hier ist es einem Y mit geeigneter Professionsstufe im Rahmen einer entsprechenden Beweishandlung möglich, von X einen ableitungsanzeigenden oder sogar robust ableitungsanzeigenden Beweis „zu extrahieren“.[472] X verfügt hier aktuell (zum Zuschreibungszeitpunkt) nur mittelbar über einige der benötigten mathematischen Fähigkeiten. Ein solcher Fall sollte im Hinblick auf

[470] Vgl. auch die Aspekte (VII) und (VIII), S. 213 ff.

[471] Dieser Aspekt der Internalisierung expliziter Regeln mit wachsender Professionsstufe entspricht, wie bereits erwähnt, dem allgemeinen Dreyfus-Dreyfus-Modell des Fähigkeitserwerbs (vgl. Abschnitt 2.3.3 S. 64 f.).

[472] Das entsprechende Zitat lautet:

die Erfülltheit von (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) als (durchaus vorkommender) Grenzfall aufgefasst werden.

Die Einbeziehung der Dialogpartner Y bildet außerdem einen weiteren Aspekt der Eigenschaft epistemischer Formalisierbarkeit ab.[473] Eine Beweispräsentation ist gemäß (F_{epist}) formalisierbar$_{epist}$, wenn ein geeigneter Dialogpartner davon überzeugt wird, dass das präsentierte Argument durch geeignete Modifikation in ein ontisch formalisierbares Argument überführt werden kann. In (FKE^{W}_{empinf}) und (FKE^{R}_{empinf}) wird nun das tatsächliche Vorliegen hinreichender mathematischer Fähigkeiten von X gefordert, um ein im Rahmen einer konkreten Beweishandlung vorgebrachtes Argument in ein kontextuell angemessen formalisiertes Argument überführen zu können. Die epistemischen Einstellungen der Dialogpartner Y werden dennoch im Rahmen der Bedingungen (FaB) und (FraB) durch die explizite Einbindung von Rück- und Vertiefungsfragen und Modifikations- und Korrekturvorschlägen seitens Y in die Argumentpräsentation im Rahmen einer Beweishandlung sowie die Forderung, dass X in der Lage sein muss, geeignete Beweishandlungen *erfolgreich* auszuführen,[474] berücksichtigt. Im Falle von (FraB) wird außerdem verlangt, dass X die jeweils präsentierte Argumentation, einschließlich argumentativ relevanter Beiträge seitens Y, in ein Argument einer innerhalb der mathematischen Gemeinschaft aktuell als hinreichender Indikator für die Ableitbarkeit von p geltenden Formalisiertheitsstufe überführen kann. Um gemäß (FKE^{W}_{empinf}) zu wissen, dass p, muss X also insbesondere hinreichende mathematische Fähigkeiten besitzen, um die aktuelle mathematische Gemeinschaft[475] von der Ableitbarkeit von p zu überzeugen. Um gemäß (FKE^{R}_{empinf}) die gerechtfertigte Überzeugung zu besitzen, dass p, sollte X hinreichende mathematische Fähigkeiten besitzen, um im Rahmen einer geeigneten Beweishandlung die Adressaten davon überzeugen zu können, dass die vorgetragene Argumentation p stützt und auf ihrer gegebenen Formalisiertheitsstufe keine aktuell identifizierbaren Fehler enthält.[476]

> „One of my recent graduate students is almost incapable of writing down proofs. But he really knows mathematical truths. He was my only student whom I could ask about things that I didn't know, and often he would come up with an answer, and I would know that this is really true. The problem is then to extract from him why it is true, which is the proof. If you can extract from the pictures that it is true, from a general idea why it must be true, you want to extract more and more detail. [...] There are well respected mathematicians who are like this.“ (Int 5, S. 329)

[473] Im vorangegangen Abschnitt (vgl. S. 242 f.) wurde ja bereits diskutiert, inwiefern (FKE^{W}_{empinf}) (und analog (FKE^{R}_{empinf})) im Sinne von (F_{epist}) fallibel sind.

[474] Vgl. Fußnote 450.

[475] D.h. relativ zu kollektivem Hintergrundwissen und kollektiven Hintergrundüberzeugungen der mathematischen Gemeinschaft zum Zuschreibungszeitpunkt; vgl. die Definition von „robust ableitungsanzeigender Beweishandlung“ auf S. 232.

[476] Vgl. wieder Fußnote 450.

Zum evaluativen Projekt: Beurteilung mathematischer Fähigkeiten Durch den Rückgriff auf mathematische Fähigkeiten und Professionsstufen im Rahmen von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) ist, wie teilweise bereits in Abschnitt 5.2.1 diskutiert,[477] eine sinnvolle und im Hinblick auf die empirischen Ergebnisse fruchtbare, differenzierte Analyse von mathematischem Wissen und mathematischer Rechtfertigung im Hinblick auf das semantische und explanatorische und das evaluative Projekt einer empirisch informierten Erkenntnistheorie möglich: Eine Möglichkeit, das Vorliegen der für eine positive epistemische Zuschreibung gemäß ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) nötigen mathematischen Fähigkeiten von X ausgehend von einer einzigen konkreten Beweishandlung zu beurteilen, besteht über die Beurteilung der in dieser Situation benötigten, gegebenenfalls sehr spezifischen mathematischen Fähigkeiten hinaus im Vergleich von X' aktueller Professionsstufe (in Bezug auf die relevanten mathematischen Spezialgebiete) mit den relevanten Parametern des Zuschreibungskontextes.

Eine weitere Möglichkeit, das Vorliegen dieser Fähigkeiten zu beurteilen, ist der direkte Test durch einzelne Beweishandlungen in mehreren unterschiedlichen, dem Zuschreibungskontext angemessenen und dabei hinreichend variierenden Situationen. Die empirischen Ergebnisse haben gezeigt, dass diese Möglichkeit in der Praxis insbesondere bei Eigenzuschreibungen von Wissen und Rechtfertigung gewählt wird.[478] Dabei zeigt

---

[477] Vgl. S. 235 f.

[478] Vgl. etwa die folgenden beiden Zitate von Interviewpartner 4:

> „So one thing: math is in a sense something personal. [...] When do I think I understand something? [...] When I think or am enthusiastic that I proved something, I don't think that I proved something, or think that I understand it. Certainly if it's a relevant thing, during the next few weeks I would try to shoot holes in it, look at it from different directions, through different angles, ask questions why it is true, why it works this way, not that way. I would try to convince myself that it's actually true, that it has to be true, by looking at it from different sides. [...] I'm only convinced that something is true if I look at it during a longer time, and half forget the thing, and reiterate the argument later." (Int 4, S. 324 f.)

und

> „I have to be convinced that it's true, I have to be able to look at it at a later time, and still be able to reproduce the arguments, I have to be able to understand both the global picture, to have an overview of the proof, explain to myself what the global idea is and why it works like this, and also to be able, and that's the details, to follow the proof from step to step, the logical consequences." (Int 4, S. 326)

sowie das Zitat von Interviewpartner 6:

> „Your own expertise, you sort of know at hopefully the deepest level, but even there, you sometimes see that you actually find out that you never looked at it in a right way. That's what progress comes from, you realize that you should look at it in a different way. And in the process of understanding it happens that you have a definition, and that you think you understand it, and that you come back to it for one reason, or somebody tells you something about it, and that you realize that you never understood it at all but now you understand it, at least that's what you think." (Int 6, S. 339)

sich deutlich der Unterschied zwischen der in (FKE^W_{empinf}) und (FKE^R_{empinf}) enthaltenen Forderung, dass X' Fähigkeiten hinreichen müssen, um unter geeigneten Bedingungen in der Regel (robust) ableitungsanzeigende Beweishandlungen erfolgreich auszuführen und der Forderung nach der Möglichkeit einer einzelnen (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlung. Diese zweite Beurteilungsmöglichkeit weist, auf der Ebene individuellen mathematischen Wissens und individueller gerechtfertigter mathematischer Rechtfertigung, gewisse Parallelen zu den Absicherungsmethoden kollektiven Wissens der mathematischen Gemeinschaft im Rahmen eines ganzen Beweisprozesses auf. Letztere wurden von den Interviewpartnern wiederholt angesprochen und spielen in der mathematischen Forschung oft eine wichtigere Rolle als das mathematische Wissen oder die Rechtfertigung mathematischer Überzeugungen einzelner epistemischer Subjekte.[479] Im Hinblick auf kollektives Wissen und kollektive Rechtfertigung kann auf die mathematischen Fähigkeiten des Kollektivs zurückgegriffen werden, die in verschiedenen Stadien des Beweisprozesses die Ableitungsanzeiger-Eigenschaft des jeweils betrachteten Argumentes sichern. Je nach Güte und Komplexität des Problems und je nach Expertise des zugehörigen Fachexpertenkreises müssen mehrere unterschiedliche Teststadien durchlaufen werden, damit p als hinreichend sicher gelten kann.

5.2.3 Erkenntnistheoretische Diskussion von (FKE^W_{empinf}) und (FKE^R_{empinf})

In diesem letzten Abschnitt zur Vorstellung der sozio-empirisch informierten formalisierbarkeitsorientierten Kriterien für epistemische Zuschreibungen (FKE^W_{empinf}) und (FKE^R_{empinf}) beschreibe ich deren allgemeine erkenntnistheoretische Charakteristika.

[479] Vgl. etwa die Zitate von Interviewpartner 2:

> „The process by which a statement is verified is a certain collective verification process. The size of the collective, and in particular the fact whether there are good, honest professionals in the [community]–it depends on the importance of something. If just one person asked the question, another proved it and a third one checked it, probably the community is not big enough in order to convince everybody else that everything is o.k.“ (Int 2, S. 317)

und Interviewpartner 5:

> „It is a work in progress that polishes the proof. [...] This process that I tried to describe is only part of what I believe is a true test of correctness of mathematical statements. It is more or less through digesting the theorem in mathematical practice. It is like a complex thing that people try to use in this position and in that position, and in this regime and in a harder regime, like a car that you take with you in desert or wilderness and ride it. And if it's wrong, than you will spot that somehow it doesn't fit into some of your non-mathematical contexts. And this is basically how things are being really tested, and errors are discovered. [...] The real process of checking the validity of a theorem is not just that is has been accepted for publication, that it went through a process of refereeing, but how many people really used it, really looked into it and adapted it for their purposes.“ (Int 5, S. 329, 328)

Die bisherige Diskussion legt nahe, ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) als notwendige Kriterien für beweisbasiertes mathematisches Wissen bzw. beweisbasierte epistemische Rechtfertigung einer mathematischen Überzeugung im Rahmen einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik zu lesen. Sie stellen zudem aussichtsreiche Kandidaten für hinreichende Kriterien für beweisbasiertes mathematisches Wissen und beweisbasierte mathematische Rechtfertigung dar; die hier vorgestellten empirischen und analytischen Ergebnisse liefern zumindest kein augenfälliges Beispiel, in dem ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) oder ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) erfüllt sind, Wissen oder Rechtfertigung aber intuitiv oder gemäß dem Sprachgebrauch in der mathematischen Praxis nicht vorliegen. Darüber hinaus erfüllen ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) aber auch die Adäquatheitsbedingungen, die in der allgemeinen Erkenntnistheorie über die Grenzen spezifischer Positionen hinaus für eine Analyse von Wissen bzw. epistemischer Rechtfertigung erhoben werden.

Im Folgenden werde ich zunächst die gerade formulierte Einschätzung der erkenntnistheoretischen Adäquatheit von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) genauer ausführen. Dazu fasse ich die allgemeinen Adäquatheitskriterien für eine erkenntnistheoretische Analyse von Wissen und Rechtfertigung kurz zusammen und diskutiere deren Erfülltheit dann systematisch anhand der einzelnen Bedingungen (Abl), (Gl), (Kog), (FaB) und (FraB) von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$). Anschließend schlage ich eine erkenntnistheoretische Einordnung von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) gemäß der in Kapitel 2 vorgestellten theoretischen Klassifikation vor.

Erkenntnistheoretische Adäquatheit von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$)

In der allgemeinen Erkenntnistheorie besteht ein weitgehender Konsens hinsichtlich einer Reihe von Adäquatheitsbedingungen für Analysen von epistemischer Rechtfertigung und Wissen. Eine dieser Bedingungen lautet, dass eine adäquate Analyse des Wissens- und Rechtfertigungsbegriffes natürlichsprachliche Intuitionen und Ergebnisse linguistischer und sprachphilosophischer Auseinandersetzungen mit den Ausdrücken „wissen“ und „gerechtfertigt glauben“ berücksichtigen sollte. Diese Bedingung steht bereits im Zentrum des in dieser Arbeit verfolgten methodologischen Ansatzes und wird im Folgenden nicht mehr explizit diskutiert.

Darüber hinaus werden an Analysen von Wissen und Analysen von Rechtfertigung unterschiedliche spezielle Adäquatheitsforderungen gestellt:

Adäquatheitskriterien für erkenntnistheoretische Analysen von Rechtfertigung In Bezug auf epistemische Rechtfertigung lautet eine weitere Adäquatheitsbedingung, dass eine epistemisch gerechtfertigte Überzeugung nur dann vorliegen sollte, wenn das epistemische Subjekt über adäquate, gute Gründe für diese Überzeugung verfügt.[480] Diese sollen jedoch prinzipiell in zweierlei Hinsicht fallibel sein: Einerseits muss eine epistemisch gerechtfertigte Überzeugung auch dann vorliegen dürfen, wenn die Rechtfertigung die Wahrheit dieser Überzeugung nicht garantiert. Es sollen insbesondere auch falsche Meinungen epistemisch gerechtfertigt sein können. Trotz ihrer Fallibilität muss epistemische Rechtfertigung wahrheitszuträglich sein, d.h. sie muss durch eine Methode zustande kommen, die „ein gutes Mittel auf dem Weg zur Wahrheit ist“.[481] Neben der Wahrheitszuträglichkeit der rechtfertigenden Gründe sollen diese auch *X*' Überzeugung, dass *p*, stützen, d.h. in irgendeinem Sinne dafür verantwortlich sein, dass *X* zu der Überzeugung kommt, das *p*.[482] Schließlich sollte die epistemische Rechtfertigung einer Überzeugung eine graduelle sowie vom Kontext der Gründe des epistemischen Subjektes abhängige (insbesondere personen- und zeitrelative) Eigenschaft sein.[483]

Adäquatheitskriterien für erkenntnistheoretische Analysen von Wissen Für eine adäquate Analyse der Wahrheitsbedingungen von „*X* weiß, dass *p*“ wird allgemein mindestens gefordert, dass bei Wahrheit der Wissenszuschreibung *p* wahr sein sollte, dass das epistemische Subjekt *X* glauben sollte, dass *p*, und dass diese Überzeugung gemäß einer adäquaten Konzeption epistemischer Rechtfertigung gerechtfertigt sein sollte. In der Regel wird, ausgehend von einer graduellen Konzeption epistemischer Rechtfertigung, für Wissen erst ein bestimmter Grad an Rechtfertigung akzeptiert.[484] Dennoch sollte auch Wissen noch in dem Sinne fallibel sein, dass die rechtfertigenden Gründe die Wahrheit von *p* nicht garantieren müssen. Schließlich strebt die Erkenntnistheorie nach einer Lösung des Wissensskeptizismus durch adäquate Wissenstheorien.[485]

Letzteres hat im Falle von kontextualistischen Analysen von Wissen – und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) stellt eine spezielle Variante eines kontextualistischen Kriteriums für Wissen dar[486] – folgende Auswirkungen: Kontextualistische Analysen des Wissensbegriffes sind aus Sicht der allgemeinen Erkenntnistheorie zunächst vor allem deshalb attraktiv, weil sie eine theoretische Diagnose des Wissensskeptizismus liefern.[487] Auf der anderen Seite fallen

[480]Vgl. Grundmann [50, S. 229].
[481][50, S. 223].
[482]Vgl. [50, S. 229 f.]
[483]Vgl. [50, S. 224, 228]. Mit letzterer Forderung ist, wie in Abschnitt 2.2 bereits erwähnt (Fußnote 122), noch keine kontextualistische Auffassung von Rechtfertigung im Sinne des semantischen Zuschreibungskontextualismus verbunden.
[484]Vgl. BonJour & Sosa [14, S. 21].
[485]Vgl. etwa Brendel [18, Abschn. 1].
[486]Vgl. dazu auch den folgenden Abschnitt 5.2.3.
[487]Die Adäquatheit der kontextualistischen Diagnose ist allerdings nicht unumstritten (vgl. etwa Grundmann [50, S. 157 ff.]). Ich werde hier nicht weiter auf das spezielle diagnostische Potential von

kontextualistische Positionen dem generellen Einwand anheim, dass rein kontextuell bestimmte epistemische Standards zu instabil für Wissen sind.[488] Speziell kontextualistische Wissensanalysen sollten also, um diesem prinzipiellen erkenntnistheoretischen Einwand zu entgehen, eine gewisse Stabilität der Kontexte gewährleisten.

Anhand der einzelnen Bedingungen (Abl), (Gl), (Kog), (FaB) und (FraB) lässt sich nun verdeutlichen, in welchem Sinne ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) diese allgemeinen erkenntnistheoretischen Adäquatheitskriterien erfüllen:

Bedingung (Abl) soll die für Wissen-dass-p notwendige Wahrheit von p gewährleisten. Dies geschieht zumindest insofern, als man die durch die formale Ableitbarkeit von p induzierte Wahrheit von p in allen Strukturen, in denen auch die Axiome des verwendeten formalen Systems wahr sind, für mathematisches Wissen als geeignet betrachtet.[489]

Bedingung (Gl) verlangt, dass das epistemische Subjekt X glaubt, dass p. Dies wird sowohl für eine adäquate Analyse des Rechtfertigungs- als auch des Wissensbegriffes gefordert.

Bedingung (Kog) sagt aus, dass X kognitiven Zugang zu einem Argument (mit linguistischen und gegebenenfalls auch paralinguistischen und anderen nonverbalen Bestandteilen) für p hat und glaubt, dass dieses Argument die mathematische Aussage p stützt. Diese Bedingung sichert, dass die Basis der rechtfertigenden Gründe für p, d.h. (A, NL), auch die Basis eines überzeugungsbildenden Prozesses sein kann, der X' Glauben, dass p, konstituiert. Der damit hergestellte Zusammenhang zwischen rechtfertigenden Gründen und überzeugungsbildendem Prozess ist im Sinne einer sogenannten nicht-kausalistischen Auffassung prinzipiell hinreichend für die für epistemische Rechtfertigung geforderte Stützungsrelation, da X eine bestimmte Meta-Überzeugung über die Güte seiner rechtfertigenden Gründe besitzt. Er ist ebenfalls prinzipiell verträglich (wenn dafür auch nicht hinreichend) mit einer kausalistischen Auffassung, wonach die rechtfertigenden Gründe X' Überzeugung, dass p, kausal verursachen müssen. In der allgemeinen Erkenntnistheorie werden sowohl kausalistische als auch nicht-kausalistische

(FKE) eingehen, da diese Frage schnell tiefgehende erkenntnistheoretische Detaildiskussionen nach sich zöge, die den hier gesteckten Rahmen sprengen würden.

[488] Dies gefährdet etwa das Prinzip der Geschlossenheit des Wissens, welches jedoch zu einer verbreiteten erkenntnistheoretischen Grundannahme über den Wissensbegriff gehört (vgl. Grundmann [50, S. 161, 166 ff.]).

[489] Die Wahrheit von nicht ableitbaren mathematischen Theoremen wie den gödelschen Sätzen ist durch (Abl) offenbar nicht garantiert. Für Wissen und Rechtfertigung hinsichtlich solcher Sätze macht eine Analyse mittels ableitungsanzeigenden Beweishandlungen allerdings generell wenig Sinn.

Auffassung hinsichtlich der Stützungsrelation zwischen rechtfertigenden Gründen für p und X' Überzeugung, dass p, vertreten.[490]

Bedingung (FaB) sichert das für epistemische Rechtfertigung notwendige Vorliegen guter Gründe für X' Überzeugung, dass p. Diese Gründe bestehen neben dem X aktuell kognitiv zugänglichen Argument (A, NL) in dem Vorliegen der entsprechenden mathematischen Fähigkeiten, die X in die Lage versetzen, auf der Basis von (A, NL) angemessene ableitungsanzeigende Beweishandlungen erfolgreich auszuführen. Die Güte dieser rechtfertigenden Gründe ist personen- und zeitrelativ und bemisst sich an den Kriterien für „gute" und „akzeptable" Beweisen in der mathematischen Praxis.[491] (FaB) ermöglicht dabei die prinzipielle Fallibilität epistemischer Rechtfertigung:[492] Dadurch, dass die im Rahmen einer Beweishandlung vorgebrachte Argumentation stets nur in ein bis zu einem bestimmten, kontextuell festgelegten Maß formalisiertes Argument durch X überführt werden können muss, ist ein mathematisches Theorem durch eine ableitungsanzeigende Beweishandlung ebenfalls immer nur in einem entsprechenden Maße gerechtfertigt. Daher können insbesondere geeignete Beweishandlungen, deren Startkonfiguration ein „falsches", z.B. im Detail nicht korrektes Argument für einen wahren oder auch falschen mathematischen Satz p enthält, in bestimmten Kontexten ableitungsanzeigend sein. Gleichzeitig wird beweisbasierte Rechtfertigung gemäß $(\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}})$ so zu einer graduellen Eigenschaft. (FaB) liefert zudem die für epistemische Rechtfertigung erforderliche Wahrheitszuträglichkeit der rechtfertigenden Gründe, da von X hinreichende mathematische Fähigkeiten zur Erzeugung eines in einem kontextuell angemessenem Maß formalisierten Argument für p gefordert werden. Diese geforderte Fähigkeit zur Teilformalisierung stellt offenbar ein brauchbares Mittel auf dem Weg zu einer vollständigen Formalisierung dar, welche die formale Ableitbarkeit von p und damit die Wahrheit von p relativ zu den zugrundeliegenden Axiomen bezeugt. Die Verlässlichkeit der Anbindung ableitungsanzeigender Beweishandlungen an die Ableitbarkeit der durch sie gerechtfertigten mathematischen Aussage wird zusätzlich durch die in (FaB) enthaltenen kontextuellen Mindestanforderungen an in der mathematischen Praxis gut erprobte und als tauglich erwiesene Indikatoren wie die Fehlerrobustheit der Kernargumentation von (A, NL) gewährleistet.

---

[490] Vgl. hierzu Grundmann [50, S. 230 ff.]. Laut Grundmann sind kausalistische Positionen populärer und weniger angreifbar als nicht-kausalistische Positionen. Ich greife diese Debatte hier nicht weiter auf.
[491] Vgl. besonders die Aspekte (III) und (IV) in Abschnitt 4.3.
[492] Vgl. Abschnitt 5.2.2, S. 242.

Bedingung (FraB) sorgt dafür, dass das Wissenskriterium ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) nur erfüllt ist, wenn X im Sinne von (FaB) über gute und wahrheitszuträgliche Gründe für die Überzeugung, dass p, verfügt. Zusammen mit (Gl) und (Kog) dient (FraB) also dazu, die für Wissen notwendige epistemische Rechtfertigung einzufordern. Die im Vergleich zu (FaB) weitergehende Forderung der Robustheit der Ableitungsanzeiger-Eigenschaft sichert die für Wissen ebenfalls notwendige, kontextübergreifende Stabilität der für Wissen notwendigen Standards für rechtfertigende Gründe. Es wird insbesondere ein kontextübergreifender[493] Schwellenwert für den für Wissen geforderten Grad an epistemischer Rechtfertigung gekennzeichnet. Dabei wird jedoch die für Wissen erkenntnistheoretisch wünschenswerte prinzipielle Fallibilität der rechtfertigenden Gründe beibehalten: (FraB) ist wie (FaB) erfüllbar, wenn X nicht über eine wahrheitsgarantierende Rechtfertigung verfügt.[494]

Klassifikation von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) als externalistisch-kontextualistische Kriterien

Es stellt sich abschließend die Frage, wie sich ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) in die in Kapitel 2 entwickelte theoretische Matrix aus Invariantismus *versus* Kontextualismus und Internalismus *versus* Externalismus einordnen lassen.[495] Wie im Folgenden kurz erläutert wird, ist eine klare Einordnung zumindest hinsichtlich der Unterscheidung zwischen Internalismus und Externalismus jedoch nur beschränkt möglich: ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) nehmen in der Matrix einen Platz als moderat zugangsexternalistische und dabei zuschreibungskontextualistische Kriterien für beweisbasiertes mathematisches Wissen und beweisbasierte epistemische Rechtfertigung ein.

Externalistische und internalistische Aspekte von ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) Die Abhängigkeit des Erfülltseins beider Kriterien von den mathematischen Fähigkeiten des epistemischen Subjektes bringt durch den Umstand, dass ein epistemisches Subjekt nicht stets kognitiven Zugang zum Repertoire seiner spezifischen mathematischen Fähigkeiten haben muss, einen externalistischen Aspekt mathematischer Rechtfertigung und mathematischen Wissens ins Spiel. Fasst man Internalismus und Externalismus als streng dichotome erkenntnistheoretische Ansätze auf und bezeichnet einen nicht rein internalistischen Ansatz bereits als externalistisch, so fallen ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$) und ($\text{FKE}^{\text{R}}_{\text{empinf}}$) daher unter den

---

[493] Kontextübergreifend bedeutet hier nicht kontextunabhängig; vgl. den nachfolgenden Abschnitt 5.2.3.

[494] Vgl. Abschnitt 5.2.2, S. 243. Der durch diese Fallibilität prinzipiell nicht ausgeschlossene Fall, in dem (FraB) für ein formal ungültiges (und in diesem Sinne falsches) p erfüllt ist, liefert dank (Abl) jedoch kein Gegenbeispiel für die Faktivität von Wissen gemäß ($\text{FKE}^{\text{W}}_{\text{empinf}}$).

[495] Vgl. Abschnitt 2.2, S. 51 ff.

Ansatz des Externalismus. Dennoch weisen ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) im Zusammenhang mit der Forderung nach dem Vorliegen gewisser mathematischer Fähigkeiten von X auch einen klarerweise internalistischen Aspekt auf, da es sich bei mathematischen Fähigkeiten gemäß der hier vertretenen Sichtweise um an Professionsstufen geknüpfte Fertigkeiten handelt, die ein Mathematiker im Laufe der Zeit erwirbt und auch bewusst weiterentwickelt.[496] Ein weiterer internalistischer Aspekt kommt durch (Kog) ins Spiel, wie die Diskussion dieser Bedingung in Abschnitt 5.2.3 (S. 250) zeigt. Ich verstehe ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) daher im gerade beschriebenen Sinne als moderat externalistische Kriterien für beweisbasiertes mathematisches Wissen und beweisbasierte epistemische Rechtfertigung.[497]

In Bezug auf die Unterscheidung zwischen Zugangs- und ontologischem Internalismus und Externalismus[498] tragen ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) in beiderlei Hinsicht externalistische Züge. Hinsichtlich des Zugangsexternalismus wurden diese gerade diskutiert. Ableitungsanzeigende Beweishandlungen als rechtfertigungskonstituierende Faktoren weisen außerdem auf einen gewissen ontologischen Externalismus hin, da sie unter explizitem Rückgriff auf externe Tatsachen außerhalb der mentalen Perspektive von X definiert wurden und somit ihrer Natur nach nicht mit mentalen Zuständen von X zusammenfallen.

($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) als zuschreibungskontextualistische Kriterien Bezüglich der Klassifikation von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) als kontextualistische oder invariantistische epistemische Kriterien kann ebenfalls eine differenzierte Antwort gegeben werden, die ich in Abschnitt 5.2.3 bereits angedeutet habe. Offenbar enthalten beide Kriterien kontextsensitive Parameter. Eine Kontextabhängigkeit der epistemischen Standards für beweisbasiertes mathematisches Wissen und beweisbasierte mathematische Rechtfertigung im Sinne des semantischen Zuschreibungskontextualismus[499] wird dadurch erzeugt,

[496]Eine genauere Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem Besitz von und dem direkten kognitiven Zugang zu spezifischen mathematischen Fähigkeiten würde eine detaillierte Ausarbeitung des hier zugrundegelegten Modells mathematischer Fähigkeiten erfordern, die ich im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht leisten kann.

[497]In der allgemeinen Erkenntnistheorie wird in Bezug auf Internalismus und Externalismus von Wissen und Rechtfertigung stellenweise auch auf meta-epistemologischer Ebene für Hybrid-Theorien argumentiert, die sowohl einen radikalen Internalismus als auch einen radikalen Externalismus zurückweisen. Diese Vorschläge sind jedoch nicht unumstritten (vgl. zu dieser Debatte z. B. Grundmann [50, S. 250 ff.], Brendel [17, Abschn. 7.3] oder BonJour & Sosa [14, Abschn. 2.3]). In meinem Fall halte ich die hier gewählte Sprechweise von einer moderat externalistischen Deutung von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) bzw. von externalistischen und internalistischen „Aspekten“ der beiden Kriterien für angemessen, ohne mich im Hinblick auf diese Debatte hier genauer positionieren zu wollen.

[498]Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.2, S. 52.

[499]Vgl. Abschnitt 2.2, S. 51.

dass die in den Bedingungen (FaB) und (FraB) benannten Beweishandlungen sowohl in Bezug auf den Zuschreibungskontext angemessene Startkonfigurationen besitzen als auch in Bezug auf den Zuschreibungskontext (robust) ableitungsanzeigend sein müssen. Die Kontextsensitivität ist im Falle von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) stärker ausgeprägt als bei ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$), da die Bedingung (FaB) im Unterschied zu (FraB) keine Robustheitsforderung für kontextuell festgelegte epistemische Standards enthält. Die Forderung, dass das epistemische Subjekt X aufgrund seiner mathematischen Fähigkeiten in der Lage sein muss, (gegebenenfalls über das kontextuell geforderte anzuzeigende Maß an Formalisiertheit hinaus) ein Argument von hinreichender Formalisiertheitsstufe zu produzieren, um die mathematische Gemeinschaft aktuell von der formalen Ableitbarkeit von p in einem geeigneten mathematischen Axiomensystem zu überzeugen, erzeugt eine gewisse kontextübergreifende Stabilität der epistemischen Standards. Dies führt aber nicht zu deren prinzipieller Invarianz gegenüber kontextuellen Änderungen: Auch das kollektive Hintergrundwissen und die kollektiven Hintergrundüberzeugungen der mathematischen Gemeinschaft bleiben mindestens zeitrelativ zum Zuschreibungskontext.

Das Konzept der (robust) ableitungsanzeigenden Beweishandlung ermöglicht darüber hinaus, diese allgemeineren, kontextuell festgelegten epistemischen Standards an X' spezielle mathematische Fähigkeiten anzubinden. Hier lässt sich wieder ein Bogen zu der Diskussion der von Löwe und Müller konzipierten kontextualistischen Lesart (FKE_4) in Abschnitt 2.3.3 schlagen: Dort wurde die offene Frage formuliert, welches allgemeine Prinzip die für (FKE_4) notwendige Kopplung spezifischer mathematischer Fähigkeiten, die bei unterschiedlichen epistemischen Subjekten mit gleicher Professionsstufe unter Umständen unterschiedlich ausgeprägt sein können, an kontextuell erforderliche Beweistypen sichert. ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) beantworten diese Frage wie folgt: Eine Beweispräsentation vom – in der Terminologie von Löwe und Müller – kontextuell erforderlichen Typ konstituiert Wissen oder epistemische Rechtfertigung, wenn die zugehörige Beweishandlung hinsichtlich X' spezieller mathematischer Fähigkeiten (robust) ableitungsanzeigend ist.

Damit beschließe ich die Darstellung und Diskussion der Lesarten ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) formalisierbarkeitsorientierter Kriterien für epistemische Zuschreibungen.

Schlusswort

Im Folgenden gebe ich abschließend eine kurze Zusammenfassung der vorgestellten Ergebnisse, nehme eine Bewertung der Ergebnisse in Bezug auf die eingangs formulierte Forschungsfrage (vgl. S. x) meiner Arbeit vor und spreche mögliche Konsequenzen und offengebliebene Fragen an.

Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse In der hier vorgelegten Arbeit habe ich zunächst den methodologischen Hintergrund einer an der Mathematik als einer wissenschaftlichen *Praxis* orientierten Philosophie und insbesondere Erkenntnistheorie genauer bestimmt und, soweit möglich, argumentativ gefestigt. Das Ergebnis der methodologischen Überlegungen ist der in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 vorgestellte, aus wissenschaftsphilosophischer Sicht moderat normative Ansatz einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik, der nach dem iterativen Drei-Schritte-Programm DSP vorgeht und philosophisch-analytische Überlegungen und sozio-empirischer Ergebnisse zum Wissens- und Rechtfertigungsbegriff in der Mathematik zusammenführt. Die Grundstruktur von DSP lässt sich dabei als Spezialfall eines universellen Arbeitprogramms einer empirisch informierten „Philosophie von X“ verstehen, welches der klassischen „Philosophie von X“, den empirischen Fachwissenschaften und der allgemeinen philosophisch-analytischen Modellbildung ihre jeweilige Rolle im Forschungsprozess zuweist. Eine argumentative Begründung dieses Ansatzes (vgl. neben 1.3 auch 1.4) erwies sich zumindest für den speziellen Fall einer sozio-empirisch informierten Analyse der Relevanz formalisierbarer mathematischer Beweise für das Vorliegen beweisbasierten mathematischen Wissens oder beweisbasierter mathematischer Rechtfertigung als möglich und auch plausibel. Die Basis dieser Begründung ist die Einbettung erkenntnistheoretischer Fragen in eine umfassende Wissenschaftsphilosophie der Mathematik (vgl. 1.3.1).

Als Anwendung des so bestimmten sozio-empirisch informierten Ansatzes habe ich anschließend formalisierbarkeitsorientierte Kriterien für epistemische Zuschreibungen des Typs (FKE) (vgl. Abschnitt 2.1) untersucht. Dabei wurde die in Kapitel 2 erarbeitete theoretische Analyse eines erkenntnistheoretischen Spektrums möglicher Lesarten der Analyse zweier empirischer Studien (Kapitel 3 und 4) zu epistemischen Zuschreibungen in der mathematischen Praxis gegenübergestellt (vgl. Abschnitt 5.1). Als Hauptergebnis dieser Untersuchung habe ich in Abschnitt 5.2 zwei sozio-empirisch informierte Lesarten von (FKE) vorgestellt: Das Kriterium ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) für das Vorliegen mathematischen Wissens und das Kriterium ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) für das Vorliegen mathematischer Rechtfertigung. Diese beiden Kriterien verbinden ein funktionalistisches Verständnis mathematischer Beweise als Ableitungsanzeiger im Sinne von Azzouni (vgl. Abschnitt 2.3.5) mit einer kontextualistischen, unter Einbeziehung der mathematischen Fähigkeiten des epistemischen Subjektes modalisierten Lesart von (FKE) und werden so den empirisch gefundenen Charakteristika akzeptabler mathematischer Beweise (vgl. Abschnitt 4.3), insbesondere ihrer prinzipiellen Fallibilität, gerecht. Eine wichtige Konsequenz ist die veränderte Betrachtungsweise der Natur von mathematischen Beweisen: Nicht Beweise als rein sprachliche Entitäten, also sprachlich verfasste Argumente, stellen Gründe im Sinne epistemischer Rechtfertigung dar, sondern Beweishandlungen. Eine weitere Konsequenz des durch ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) induzierten Begriffs fallibler mathematischen Wissens, welches aber nicht nur in reinem Wissen-dass, sondern auch in Wissen-warum besteht, ist die Aufwertung von mathematischem Verständnis vor absoluter Gewissheit als primärem Erkenntnisziel mathematischer Praxis.

Bewertung der Ergebnisse und Bezug auf die zentrale Fragestellung der Arbeit In der konkreten Anwendung zeigt sich, dass DSP fruchtbare Ergebnisse liefert, die sowohl den philosophischen Intuitionen als auch der mathematischen Praxis gerecht werden. Die Ausgangsfrage der Arbeit lässt sich aufgrund dieser Ergebnisse positiv beantworten: In der Tat ist eine Konzeption des formalisierbaren Beweises wesentlich für das philosophische Verständnis mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung, nämlich die durch die Bedingungen (FaB) und (FraB) (vgl. S 235) von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) erzeugte Spezifikation von „formalisierbarer Beweis“ als ableitungsanzeigende bzw. robust ableitungsanzeigende Beweishandlung (vgl. S. 240).

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind insgesamt nicht mehr mit dem klassischen Bild von Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin, die infallibles Wissen durch formale Beweismethoden erzeugt, vereinbar. Dies betrifft insbesondere den vermeintlichen epistemischen Sonderstatus von Mathematik: ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) liefern ein erkenntnistheoretisches Modell, in dessen Rahmen eine gewisse epistemische Sonderstellung der Mathematik zwar immer noch identifizierbar und erklärbar ist (vgl. Abschnitt 4.3). Gerade mathematische Rechtfertigung durch Beweise unterscheidet sich jedoch hinsichtlich ihrer Fallibilität und Kontextabhängigkeit nur graduell von anderen Arten epistemischer Rechtfertigung; eine auf ihrer Infallibilität beruhende Begründung eines epistemischen

Sonderstatus der Mathematik ist damit nicht mehr möglich. Die vorgeschlagene Analyse lässt sich hingegen fruchtbar an Theorien mathematischen Wissens, wie sie zur Zeit in der Literatur zur Philosophie der mathematischen Praxis diskutiert werden, anbinden, liefert diesbezüglich notwendige Verfeinerungen und Ergänzungen und zeigt Querverbindungen zwischen bislang unabhängig voneinander formulierten Ansätzen auf.

Offene Fragen Einige Fragen, die sich im Laufe der Arbeit aufgetan haben oder sich nun auf deren Grundlage anschließen, müssen an dieser Stelle offen bleiben; sie liefern Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen. Ganz allgemein fällt darunter die Durchführung weiterer sozio-empirischer Studien zu mathematischen Praxis, um die hier vorgestellten empirischen Ergebnisse zu prüfen und zu vertiefen. Hier wäre als erstes die weiterführende Analyse der von mir bereits erhobenen Daten, etwa in Form einer Transkription und Auswertung der restlichen Interviewsequenzen, einer unabhängigen statistischen Analyse der Umfragedaten zum Vergleich mit den Ergebnissen der Clusteranalyse oder einer gekoppelten Clusteranalyse aller vier Fragebogenszenarien zu nennen.

Im Zusammenhang mit der Frage nach dem epistemischen Sonderstatus der Mathematik wären nun insbesondere die Ähnlichkeiten zwischen Konzeptionen naturwissenschaftlicher Rechtfertigung und naturwissenschaftlichen Wissens und dem von ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) induzierten Wissens- und Rechtfertigungsbegriff zu untersuchen. Hier deuten sich etwa Parallelen mit wissenschaftsphilosophischen Analysen der Dynamik naturwissenschaftlichen Wissens an.[500] Auch ein genauerer Vergleich des hier vorgestellten Konzepts von mathematischem Wissen-warum und verschiedenen theoretischen Modellen der mathematischen Erklärung steht noch aus.

Ausgehend von den in ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{empinf}}$) und ($\mathrm{FKE}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{empinf}}$) eingeflossenen empirischen Resultaten zu mathematischen Fähigkeiten ist zudem, etwa in Anlehnung an das in den Abschnitten 2.3.3 und 5.1.2 (S. 221) angesprochene allgemeine Dreyfus-Dreyfus-Modell, ein genaueres Modell professioneller mathematischer Fähigkeiten und Professionsstufen auszuarbeiten. Dabei stellen sich erneut die im Rahmen dieser Arbeit nur provisorisch beantworteten Fragen zum Verhältnis von abstrakten Professionsstufen und subjektspezifischen bzw. für ein mathematisches Teilgebiet spezifischen mathematischen Fähigkeiten: Welche Professionsstufen sind für die Mathematik sinnvoll, und welche mathematischen Fähigkeiten sind für die jeweilige Stufe je nach mathematischem Spezialgebiet besonders charakteristisch? Ist „die“ Professionsstufe eines einzelnen praktizierenden Mathematikers in Bezug auf ein mathematisches Spezialgebiet eindeutig bestimmbar? Wie unterscheiden sich die spezifischen mathematischen Fähigkeiten eines eher geometrisch

[500] Vgl. etwa Rouse [115].

denkenden und arbeitenden Mathematikers im Unterschied zu einem eher algebraisch arbeitenden in Bezug auf ein und dasselbe Spezialgebiet, und welche Auswirkungen haben diese Unterschiede auf das Erreichen besimmter Professionsstufen? Gibt es universelle mathematische Fähigkeiten, die unabhängig von bestimmten gelernten und gelehrten mathematischen Praktiken sind? Gibt es mathematische Fähigkeiten, die als spezifische Formalisierungsfähigkeiten angesehen werden können?

Bei der Beantwortung dieser spezielleren Fragen zu mathematischen Fähigkeiten sind über den methodischen und methodologischen Rahmen dieser Arbeit hinaus auch kognitionswissenschaftliche, psychologische und didaktische Analysen, etwa zu Internalisierungsprozessen formaler Beweisregeln, hilfreich, wenn nicht sogar vonnöten. Ein grundlegendes Anschlussprojekt besteht daher darin, den vorgestellten sozio-empirisch informierten Ansatz einer Erkenntnistheorie der Mathematik zu einem empirisch informierten Ansatz auszuweiten, der Ergebnisse unterschiedlicher empirischer Fachwissenschaften berücksichtigen kann.

Anhang

Der nachfolgende Anhang gliedert sich in drei Teile. Der Fragebogen zur in Kapitel 3 vorgestellten Umfragestudie ist in Anhang A abgedruckt. Dabei handelt es sich um ein aus der Webseite des Online-Fragebogens erzeugtes Dokument; die Bildschirmabfolge der Online-Version sowie die Funktionsweise sogenannter verzweigter Fragen, die nur gestellt wurden, wenn ein Umfrageteilnehmer eine vorangegangene Frage in einer bestimmten Weise beantwortet hatte, sind darin nur durch schriftliche Hinweise („Bildschirmwechsel“ und „optional“) angedeutet.

Anhang B enthält die quantitativen Daten zum gesamten Fragebogen, sowie eine vollständige Auflistung aller Freitextkommentare. Quantitative Daten zur Auswertung der einzelnen Multiple-Choice-Fragen sind tabellarisch mit Prozentangaben dargestellt. Die Freitextkommentare sind den ID-Nummern[501] der jeweiligen Teilnehmer zugeordnet. Nummern von Teilnehmern, die bei einer Freitextfrage keinen Kommentar abgegeben haben, tauchen in der jeweiligen Liste nicht auf. Die Auswertung wurde von der für den Online-Fragebogen verwendeten Software erstellt und enthält auch statistische Angaben. Letztere spielen allerdings für die Clusteranalyse, die ich in Kapitel 3 dargestellt habe, keine Rolle. Die rein quantitative automatische Umfrageauswertung wurde für die in Abschnitt 3.1 beschriebene Stichprobe aus 76 Teilnehmern erstellt, die auch den in Abschnitt 3.2.1 angegebenen quantitativen Ergebnissen aus Fragebogenteil II zugrunde liegt. Die Stichproben zu den vier Clusteranalysen der Daten aus Fragebogenteil III (Abschnitt 3.2.2) weichen dagegen, wie in 3.1 angesprochen, leicht davon ab.

Anhang C besteht aus den anonymisierten Teiltranskriptionen der Interviews, die ich im Rahmen der in Kapitel 4 diskutierten Interviewstudie durchgeführt habe. Diese Transkriptionen geben den Wortlaut meiner Interviewpartner exakt wieder, d.h. auf jede Art von sprachlicher Korrektur wurde hier verzichtet. Die von mir gestellten Fragen (gekennzeichnet durch „EMH“) habe ich sprachlich allerdings leicht nachbearbeitet, um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten. Bei der Transkription wurde die Standardorthographie des Englischen verwendet. Die Transkripte starten jeweils mit den Fragen und

[501] Der Fragebogen wurde anonym ausgewertet, die ID-Nummer entspricht der laufenden Nummer hinsichtlich der Eingangsreihenfolge der abgesendeten Fragebögen.

Antworten *nach* dem Durchlauf des reinen Fragebogenteils,[502] da die Interviewpartner in diesem Teil außer ihren Antworten auf die Fragebogenfragen keine Kommentare abgegeben haben. Referenzen auf bestimmte Antwortcluster zur Schlüsselszene von Szenario 1 beziehen sich auf die entsprechende Clusteranalyse in Kapitel 3, Seite 96 ff.

[502]Vgl. den Interviewleitfaden in Abschnitt 4.1.

Anhang A: Fragebogen zur Umfragestudie „The concept of knowledge in mathematical practice“

Part I (personal data)

Sex

○ Female ○ Male

Age

○ below 25 ○ 26-30 ○ 31-35 ○ 36-45 ○ 45-65 ○ 66 and up

Highest academic degree (in any subject, including mathematics)

○ none ○ bachelor (or equivalent) ○ masters (or equivalent) ○ doctoral (or equivalent)

Highest academic degree received in mathematics

○ none ○ B.A. (or equivalent) ○ M.Sc. (or equivalent) ○ Ph.D. (or equivalent)

Highest academic degree in mathematics received from institution in which country?

Are you currently a student?

○ yes ○ no

Are you an undergraduate or a graduate student?

○ undergraduate ○ graduate

Do you have any teaching experience in mathematics?

○ yes ○ no

How many years of teaching experience in mathematics do you have

- altogether?
- at university level?

Do you have any academic research experience in mathematics?

○ yes ○ no

How many years of mathematical research experience do you have?

Part II (on the abstract concepts of mathematical knowledge and proof)

Who knows best *what* mathematical knowledge *is*?
(more than one choice possible)
☐ mathematicians
☐ philosophers
☐ psychologists
☐ other

Who can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge?
(more than one choice possible)
☐ mathematicians
☐ philosophers
☐ psychologists
☐ other

[Bildschirmwechsel]

(optional) You stated that, besides or instead of mathematicians, philosophers or psychologists, others know best *what* mathematical knowledge *is*.
Specify your answer if you like:
Who else knows best *what* mathematical knowledge *is*?

[Bildschirmwechsel]

(optional) You stated that, besides or instead of mathematicians, philosophers or psychologists, others can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge.
Specify your answer if you like:
Who else can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge?

[Bildschirmwechsel]

Is mathematical knowledge objective?
○ yes ○ no

Does *mathematical knowledge* exist independently from whether human beings have mathematical knowledge or not?
○ yes ○ no

Does *mathematical truth* exist independently from human beings?
○ yes ○ no
[Bildschirmwechsel]

Please select to which degree you accept the following statement:

"One can define precisely what a mathematical proof is."
○ strongly agree ○ agree ○ disagree ○ strongly disagree

[Bildschirmwechsel]

(optional) You stated that *one can* precisely define what a mathematical proof is.
How would you define 'mathematical proof' ?

[Bildschirmwechsel]

(optional) You stated that one cannot precisely define what a mathematical proof is.
What are the reasons for this undefinability?

[Bildschirmwechsel]

Part III (use of knowledge attributions in different scenarios)

Scenario 1

John is a graduate student, and Jane Jones, a world famous expert on holomorphic functions, is his supervisor. One evening, John is working on the Jones conjecture and seems to have made a breakthrough. He produces scribbled notes on yellow sheets of paper and convinces himself that these notes constitute a proof of his theorem.

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

The next day, John has an appointment with professor Jones and presents the proof in detail on the blackboard. Jones is quite enthusiastic about it, and tells him that she needs to think about the proof for a few hours.

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

A couple of hours later, professor Jones writes an email that reads: "Dear John, there was an error in your lemma, but I know how to fix it, and the rest of your proof is fine."

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Two days later, the two meet again. Professor Jones gives the details of how to fix the lemma on the blackboard. Both are now convinced that they jointly proved the Jones conjecture.

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Six weeks later, John has typed all of the details of the proof, and they submit the paper to a mathematics journal of high reputation.

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Eighteen months later, the editor accepts the paper for publication, based on a positive referee report.

Does John know that the Jones conjecture is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

After his Ph.D., John continues his mathematical career. Five years after the paper was published, he listens to a talk on anti-Jones functions. That evening, he discovers that based on these functions, one can construct a counterexample to the Jones conjecture. He is shocked, and so is professor Jones.

Does John know that the Jones conjecture is false?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

Did John know that the Jones conjecture was true on the morning before the talk?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Do you have any comments on scenario 1?

[Bildschirmwechsel]

Scenario 2

One evening, the mathematician Bob Brown has an idea of how to calculate an explicit formula for a certain quantity and thereby finish a proof of some theorem he is currently working on.The idea is given to him by a picture.
Bob translates the picture into an algebraic equation and tries to work out an algebraic proof. After

spending the whole night on it, he finishes his proof. The resulting formula can even be reinterpreted following the line of thought from Bobs first visual idea, so he is perfectly convinced that he has found the right formula and proved his theorem.
In the afternoon of the next day, Bob gives a talk to his colleagues about his proof. Because time is short, his audience cannot check the details of the algebraic proof he worked out over night, so Bob draws the picture displaying his guiding idea on the blackboard, and starts building up the the main parts of his proof by referring to the picture.

Does Bob know that his theorem is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

After some minutes, Jim Miles, a member of the audience, lifts his hand and tells Bob that there might be something conceptually wrong in the picture.

Does Bob know that his theorem is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Bob insists in the correctness of his picture.

Does Bob know that his theorem is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Jim specifies the point where an incoherence between the picture and Bob's algebraic translation of it occurs, and Bob suddenly recognizes his mistake.

Does Bob know that his theorem is true?
○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Bob meditates for a few minutes on how to fix his mistake, and then slightly modifies his picture. The new version fits with his equations. Because he only has to modify the picture, his correction does not change anything inside the algebraic proof. The change in the picture itself does not change the line of thought but is rather technical.

Does Bob know that his theorem is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

Did Bob know that his theorem was true before he recognized his mistake?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Do you have any comments on scenario 2?

[Bildschirmwechsel]

Scenario 3

Tom Jenkins is a student of mathematics and has to pass an oral exam at the end of the algebra lecture held by his professor Robin Smith. Tom did some oral exams before, so he is not too nervous, and is able to pay concentrated attention to the professor's questions during the whole exam.

At some point of the exam, Smith asks Tom for the proof of a certain algebraic theorem **T1**. The proof consists mainly of a tricky application of the fundamental theorem on homomorphisms and was conducted in one lecture on the blackboard. Tom is able to give a rather technical, but absolutely correct step-by-step proof in full detail.

Does Tom know that **T1** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

The exam continues with some questions about definitions, and after some minutes Smith asks Tom to explain why the general idea of how to apply the fundamental theorem on homomorphisms in the proof of the former theorem is also fruitful to prove a second algebraic theorem **T2**. Tom completely fails in his answer.

Does Tom know that the second theorem **T2** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Did Tom know that the first theorem **T1** was true before he failed in answering Professor Smith's last question correctly?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Smith asks Tom to formulate the general idea behind the proof of the first theorem **T1**. Tom fails in his answer.

Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Smith explains the idea for the proof of **T1** to Tom. Tom understands and is now able to sketch the proof for **T2** using the general idea from the proof of **T1**.

Does Tom know that the second theorem **T2** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Do you have any comments on Scenario 3?

[Bildschirmwechsel]

Scenario 4

Professor Martin Mates, one of the world's most famous mathematicians, has been working on the Mates conjecture for 15 years. He has proved his conjecture in many special cases, and also many technical lemmas for the general case, but a full proof for the general case is still not in sight. Then, shortly after his 60th birthday, suddenly the idea hits him of how to combine all his former results and prove his conjecture in the general case.

After he has thought about it for a while, he is able to give a highly informal and sketchy version of a proof from his idea and is completely sure that it will work, but he also recognizes that it would take him one or two years to work everything out in a correct way. He knows that he is suffering from a serious heart disease and has only a few months left to live, so he will not be able to finish this task.

Does Martin Mates know that the Mates conjecture is true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Mates gives a couple of talks on mathematical conferences of high reputation and convinces his colleagues that his idea will be successful. Other mathematicians start working out his idea in detail. Half a year later, Mates dies. Five years later, his successors finally end up with a correctly worked out version of a proof for the Mates conjecture.

Did Martin Mates know that the Mates conjecture was true?

○ yes ○ almost surely yes ○ almost surely no ○ no ○ can't tell

[Bildschirmwechsel]

Do you have any comments on scenario 4?

[Bildschirmwechsel]

Part IV (on mathematical beauty)

Please select to which degree you accept the following statement:
"Mathematical beauty is objective."

○ strongly agree ○ agree ○ disagree ○ strongly disagree

Please select to which degree you accept the following statement:

"Mathematicians can see mathematical beauty without checking correctness or truth."
○ strongly agree ○ agree ○ disagree ○ strongly disagree

[Bildschirmwechsel]

Please select either 'yes' or 'no' for **every** *possibility:*

Mathematical beauty can be a feature of

	yes	**no**
mathematical theorems	○	○
mathematical proofs	○	○
mathematical theories	○	○
other	○	○

[Bildschirmwechsel]

(optional) Specify your last answer if you like:
What else can mathematical beauty be a feature of, besides or instead of mathematical theorems, proofs, or theories?

[Bildschirmwechsel]

Do you agree that if a mathematical *theorem* is beautiful, it must be *true*?
○ strongly agree ○ agree ○ mostly agree ○ mostly disagree ○ disagree ○ strongly disagree

[Bildschirmwechsel]

Do you agree that if a mathematical *proof* is beautiful, it must be *correct*?
○ strongly agree ○ agree ○ mostly agree ○ mostly disagree ○ disagree ○ strongly disagree

[Bildschirmwechsel]

What can be beautiful about mathematical *theories*?
(more than one choice possible)

☐ consistency of the axioms
☐ coherence of the theorems
☐ clarity
☐ explanatory power
☐ other

[Bildschirmwechsel]

(optional) Specify your last answer if you like:

What else can be beautiful about mathematical theories, besides or instead of the consistency of the axioms, coherence of the theorems, clarity, or explanatory power?

Anhang B: Quantitative Daten und Freitextkommentare zur Umfragestudie

ipf 2 target group
Type: Executive Summary Report
Date: 10/31/2006

Total number of responses collected: 76

QSex: Sex

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
Female						5.3%	4
Male						94.7%	72
						Mean	1.947
						Valid Responses	76
						Total Responses	76

QAge: Age

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
below 25						14.5%	11
26-30						25.0%	19
31-35						9.2%	7
36-45						21.1%	16
46-65						28.9%	22
66 and up						1.3%	1
						Mean	3.289
						Valid Responses	76
						Total Responses	76

Qdeg: Highest academic degree (in any subject, including mathematics)

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
none		6.6%	5
bachelor (or equivalent)		9.2%	7
masters (or equivalent)		31.6%	24
doctoral (or equivalent)		52.6%	40
		Mean	3.303
		Valid Responses	76
		Total Responses	76

Qdegmaths: Highest academic degree received in mathematics

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
none		21.1%	16
B.A. (or equivalent)		13.2%	10
M.Sc. (or equivalent)		19.7%	15
Ph.D. (or equivalent)		46.1%	35
		Mean	2.908
		Valid Responses	76
		Total Responses	76

Qdegcountry: Highest academic degree in mathematics received from institution in which country?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
Australia		1.7%	1
Austria		1.7%	1
Belgium		3.4%	2
Brazil		1.7%	1
Canada		1.7%	1
France		5.1%	3
Germany		44.1%	26
Hungary		1.7%	1
Israel		1.7%	1
Netherlands		3.4%	2

Switzerland	6.8%	4
United Kingdom	8.5%	5
United States	18.6%	11
Not Answered		1
	Mean	118.288
	Valid Responses	59
	Total Responses	60

Qstudent: Are you currently a student?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	**Frequency**	**Count**
yes		26.3%	20
no		73.7%	56
		Mean	1.737
		Valid Responses	76
		Total Responses	76

Qgradundergrad: Are you an undergraduate or a graduate student?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	**Frequency**	**Count**
undergraduate		28.6%	6
graduate		71.4%	15
Not Answered			2
		Mean	1.714
		Valid Responses	21
		Total Responses	23

Qteachingexp: Do you have any teaching experience in mathematics?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						88.2%	67
no						11.8%	9
						Mean	1.118
						Valid Responses	76
						Total Responses	76

Qyearsofteaching_1 (altogether?): How many years of teaching experience in mathematics do you have?

(Respondents were limited to **brief** text responses)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
1						12.3%	8
10						7.7%	5
15						3.1%	2
2						10.8%	7
20						4.6%	3
3						12.3%	8
4						4.6%	3
5						4.6%	3
7						4.6%	3
Other Responses						35.4%	23
						Valid Responses	65
						Total Responses	65

Qyearsofteaching_2 (at university level?): How many years of teaching experience in mathematics do you have?

(Respondents were limited to **brief** text responses)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
0		11.9%	8
1		10.4%	7
10		3.0%	2
2		13.4%	9
20		4.5%	3
24		3.0%	2
3		7.5%	5
4		7.5%	5
5		3.0%	2
6		4.5%	3
7		4.5%	3
yes		3.0%	2
Other Responses		23.9%	16
		Valid Responses	67
		Total Responses	67

Qresearchexp: Do you have any academic research experience in mathematics?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		71.1%	54
no		28.9%	22
		Mean	1.289
		Valid Responses	76
		Total Responses	76

Qyearsofresearch_1 : How many years of mathematical research experience do you have?

(Respondents were limited to **brief** text responses)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
1		9.3%	5
15		3.7%	2
16		3.7%	2
2		7.4%	4
20		5.6%	3
3		18.5%	10
35		3.7%	2
4		11.1%	6
7		3.7%	2
8		3.7%	2
9		3.7%	2
Other Responses		25.9%	14
		Valid Responses	54
		Total Responses	54

Qwhoknowsmathknowl: Who knows best *what* mathematical knowledge *is*?
(more than one choice possible)

(Respondents were allowed to choose **multiple** responses)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
mathematicians		98.7%	75
philosophers		13.2%	10
psychologists		0.0%	0
other		2.6%	2
		Valid Responses	75
		Total Responses	75

Qwhoknowsifhasmathknowl: Who can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge?
(more than one choice possible)

(Respondents were allowed to choose **multiple** responses)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
mathematicians		97.4%	74
philosophers		1.3%	1
psychologists		5.3%	4
other		3.9%	3
		Valid Responses	75
		Total Responses	75

Qotherspec1: You stated that, besides or instead of mathematicians, philosophers or psychologists, others know best *what* mathematical knowledge *is*. Specify your answer if you like:
Who else knows best *what* mathematical knowledge *is*?

☐	ID	Response
☐	38	mathematical HISTORIANs
☐	53	physicits, chenists, engineers
		Valid Responses 2
		Total Responses 76

Qotherspec2: You stated that, besides or instead of mathematicians, philosophers or psychologists, others can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge. Specify your answer if you like:
Who else can judge best *whether a certain person has* mathematical knowledge?

☐	ID	Response
☐	48	IMO anybody who asks the right questions can find out about math knowledge of a specific person.
☐	53	physicists, chemists, engineers
☐	55	Others who have appropriate mathematical knowledge. Who such are will depend on the level of knowledge being judged.
		Valid Responses 3
		Total Responses 76

Qmathknowlobjective: Is mathematical knowledge objective?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						82.4%	61
no						17.6%	13
						Mean	1.176
						Valid Responses	74
						Total Responses	74

Qmathknowlexistind: Does *mathematical knowledge* exist independently from whether human beings have mathematical knowledge or not?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						56.8%	42
no						43.2%	32
						Mean	1.432
						Valid Responses	74
						Total Responses	74

Qmathtruthexistind: Does *mathematical truth* exist independently from human beings?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						78.4%	58
no						21.6%	16
						Mean	1.216
						Valid Responses	74
						Total Responses	74

Qdefinemathproof: Please select to which degree you accept the following statement:
"One can define precisely what a mathematical proof is."

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
strongly agree		28.4%	21
agree		60.8%	45
disagree		9.5%	7
strongly disagree		1.4%	1
		Mean	1.838
		Valid Responses	74
		Total Responses	74

Qdefineess: You stated that *one can* precisely define what a mathematical proof is.
How would you define 'mathematical proof' ?

☐	ID	Response
☐	2	Derive the truth of a given statement as a whole from the basic axiomes or using already proved theorems.
☐	3	This textfield is too short and you said the test will take only 15 Minutes. So look at Goedel and ask some people working in logic.
☐	5	A mathematical proof of a statement S is a finite chain of implications A_0 => A_1 => ... => A_n = S, all of which are known to be true, and of which the first statement A_0 is also known to be true.
☐	6	Syntactically. See any textbook on logic, it doesn't fit into three lines.
☐	7	A sequence of efficiently verifiable statements (as in Hilberts calculus).
☐	8	0
☐	9	A logically consistent derivation of a theorem from a set of premises, using statements known to be true as an aid. This does not neccessarily mean that everything is shown in full detail, since some points may be simple enough to just state them.
☐	10	logicaly deducing a mathematical statement from axioms
☐	11	A sequence of valid implications inside an axiomatic system.
☐	12	A mathematical proof is a sequence of true propositions that ends with the proposition that was to be proven.
☐	15	A series of symbol-manipulation in based upon Axioms and the logic rules.
☐	17	a proof of a statement is a sequence of allowed actions in the language of logic which begins with a set of axioms and ends with the statement
☐	18	A proof of a theorem is a finite sequence of claims, each claim being derived logically from the previous claims, as well as theorems whose truth has been already established.

The last claim in the sequence is the statement of the theorem, or a statement that clearly implies the theorem (or not).

- ☐ 19 To derive an assertion from the assumptions by logical conclusions
- ☐ 21 A finite sequence of statements following logically from each other, that begin with a given set of axioms and have the statement to be proved as a conclusion. In actual mathematical practice, this sequence tends to be shortened and written in some human language rather than pure symbolic logic, so the only difficulty that may arise in defining what a "real-life" mathematical proof is, is to decide what constitutes an acceptable abbreviation of the hypothetical, full-length logical proof.
- ☐ 23 A amthematical proof shows the right conclusion using some axoms.
- ☐ 24 logical deduktion
- ☐ 26 A sequence (not necessarily linearly ordered) of statements logically connected to each other and leading from a set of axioms to the statement being proved. I have heard that in the subject of mathematical logic, this can be made more precise, in such a way that certain proofs can be verified (or verified up to some probability) by computer.
- ☐ 27 a sequence of conclusion, starting from some (generally accepted) axioms and ending in the statement to prove
- ☐ 28 An argument starting from some premises, following beforeagreed logical rules, leading to the theorem to be proven as conclusion.
- ☐ 30 Formally: from a given set of deductive rules, and a set of axioms, a sequence of statements (machine-verifiable in the correctness of application of the rules), starting with hypothesis and ending with conclusion. Ideally, anyway.
- ☐ 33 a sequence of propositions, each one either an axiom, or else logically deduced from previous ones.
- ☐ 34 It's a chain of logical deduction, which finaly lead to a knowen, true assertion.
- ☐ 35 nobody laughs
- ☐ 37 http://de.wikipedia.org/wiki/Ableitung_(Logik)
- ☐ 38 A precise definition is too long to fit into this form; instead please refer to some standard textbook on formal mathematics.
- ☐ 39 I would defined a proof fundamentally as argument that convinces mathematicians, less fundmentally as an argument that can be formalised and proven mechanically.
- ☐ 40 That's what mathematical proof theory is about. A string of admissible conlusions leading from accepted axioms to the conlusion.
- ☐ 42 sequence of logical steps checked and deemed valid by a sufficiently high number of people.
- ☐ 44 Strong connected chain of logical arguments
- ☐ 45 A derivation of a proposition from other proposition using pure logic only.
- ☐ 46 axioms derivation

☐ 48 As a valid reasoning within a certain predefined Univers de Discours.

☐ 51 short form of a formal proof

☐ 52 Not enough space here

☐ 54 based on axiomes, using a set of predefined logical rules, verify a statement

☐ 55 A mathematical proof is an explantion of reason a statment is correct that is sufficiently complete to satisfy other mathematicians.

☐ 56 A convincing argument that instills belief that it is possible to construct a sequence of formal logical steps leading from generally accepted axioms to the given assertion.

☐ 57 roughly: a rigorous construction of a desired conclusion from explicitly assumed premises, established through a sequence of intermediate statements whose cumulative logical validity depends purely on inassailable reasoning without recourse to external sources of information, experiment, or authority.

☐ 58 A sequence of logical steps starting from an axiomatic base or an already proven theorem, leading to the theorem to prove. If some steps are non-elemental, they can be shown to reduce to elemental steps.

☐ 60 A series of transformation of chains of symbols according to certain rules.

☐ 61 basically a sequence of statements satisfying some formal conditions terminating with the thing to prove (details would be too long), practically some abbreviation of that sufficient to convince math. people of the theoretical existence of that

☐ 63 First, it is a proof of some well-defined proposition P, starting from some clear-cut hypotheses H. It consists of a series of logical steps leading up to P, each of which is clearly justified by H or the preceding steps. H may be a very large set of hypotheses (eg standard algebraic geometry), and thus the proof may be difficult or impossible for some to follow right away, but in principle it should be within reach of anyone with enough time and interest.

☐ 64 argument sufficiently detailed to convince experts

☐ 66 An explanation of how the thesis is a logical consequence of the hypotheses, which can be explicit or not (axioms).

☐ 67 I did not say I have a definition at hand. My meaning of "one can define" is that with ajoint effort and discussion we could arrive at a definition acceptable for most mathematicians, and my basis of thinking so is that in practice we can typically agree whether a certain argument is or is not a proof.

☐ 69 a sequence of statement that give you logical certainty of a previous statement which we then call theorem

☐ 71 a mathematical proof is a sequence of transitions between words in a formal language. the proposition and the initial conditions must be given in this formal language

☐ 72 a complete logical chain based on well established facts, themselves (normally) competely justified in a similar way at a lower level.

☐	73	That's a hard question. A mathematical proof is to argue in a way, that mathematicians agree to bee a proof.
☐	74	A finite sequence of sentences, each of which is either an assumption (possibly to be discharged) or derived from some previous sentences. The rules of derivation corespond to some basic assumptions about logic, and the meaning of certain words.
☐	75	We can choose a particular calculus (e.g. natural deduction) to define what a (correct) mathematical proof is: applications of inference rules, obeying certain restrictions. If a yet more formal definition is needed, we can use a theorem prover (e.g. Isabelle, Coq, ...), which represents proofs as a data structure in computer memory. Of course these representations are rather far from what is usually labeled a "proof" in mathematical textbooks.
☐	76	A sequence of statements, of which the first is the hypothesis and the last is the proposition to prove, such that each statement follows from a former one using some rule of inference.
☐	77	What a proof is depends on the logical system being used, something which is not usually stated explicitly but is somewhere in the background. Each system has its own precise notion of proof.

Valid Responses	54
Total Responses	76

Qinhibits: You stated that one cannot precisely define what a mathematical proof is.
What are the reasons for this undefinability?

☐	**ID**	**Response**
☐	13	There are different levels of obviousness: reasoning which appears instantly clear ("trivial") to an expert might not at all convince a beginner. To be able to understand and to accept a proof depends on former knowledge and exercise, or on a sufficient number of intermediate steps.
☐	20	No, I stated that I disagreed (but not strongly) that one *can* precisely define what a mathematical proof is: an entirely different statement! ... My disagreement is based on my observations that doing so is evidently difficult and there is not yet a satisfactory consensus among working mathematicians who care about the problem.
☐	41	There is no independent and sufficiently precise framework for foundational issues. When doing formalized math, you can either give a handwaving definition of "proof", or you can use another formalized setting, thereby only shifting the problem.
☐	43	new developments
☐	53	which part of maths is human-dependent and which part in human independent is impossible to determine
☐	62	A proof is considered valid if \`everybody' is convinced. The notions of \`everybody' and possibly the notion of \`convinced' changes with time. Experience shows it.

Valid Responses	6
Total Responses	76

QJonesConjecture1: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		7.6%	5
almost surely yes		25.8%	17
almost surely no		12.1%	8
no		16.7%	11
can't tell		37.9%	25
		Mean	3.515
		Valid Responses	66
		Total Responses	66

QJonesConjecture2: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		7.6%	5
almost surely yes		37.9%	25
almost surely no		9.1%	6
no		13.6%	9
can't tell		31.8%	21
		Mean	3.242
		Valid Responses	66
		Total Responses	66

QJonesConjecture3: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						13.8%	9
almost surely yes						47.7%	31
almost surely no						4.6%	3
no						9.2%	6
can't tell						24.6%	16
Not Answered							1
						Mean	2.831
						Valid Responses	65
						Total Responses	66

QJonesConjecture4: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						25.8%	17
almost surely yes						45.5%	30
almost surely no						4.5%	3
no						6.1%	4
can't tell						18.2%	12
						Mean	2.455
						Valid Responses	66
						Total Responses	66

QJonesConjecture5: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20%	40%	60%	80%	100%	Frequency	Count
yes						27.3%	18
almost surely yes						48.5%	32
almost surely no						4.5%	3
no						4.5%	3
can't tell						15.2%	10
						Mean	2.318
						Valid Responses	66
						Total Responses	66

QJonesConjecture6: Does John know that the Jones conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		28.8%	19
almost surely yes		56.1%	37
almost surely no		3.0%	2
no		4.5%	3
can't tell		7.6%	5
		Mean	2.061
		Valid Responses	66
		Total Responses	66

QJonesConjecture7: Does John know that the Jones conjecture is false?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		14.5%	9
almost surely yes		46.8%	29
almost surely no		6.5%	4
no		8.1%	5
can't tell		24.2%	15
		Mean	2.806
		Valid Responses	62
		Total Responses	62

QJonesConjecture8: Did John know that the Jones conjecture was true on the morning before the talk?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		24.2%	15
almost surely yes		46.8%	29
almost surely no		4.8%	3
no		14.5%	9
can't tell		9.7%	6
		Mean	2.387
		Valid Responses	62
		Total Responses	62

QCommScene1: Comments on scenario 1:

☐	ID	Response
☐	5	Although mathematical truth exists independent from human knowledge, one can of course never be _absolutely_ sure to _know_ it, since all human beings are prone to errors. One can, however, be _reasonably_ sure to know _some_ of it, since for many statements there exist a lot of different proofs, all of which have been reviewed and found correct by a lot of people.
☐	6	Proofs that fit on a single sheet of paper are usually easy to check, otherwise they are no proofs and otherwise a mathematician cannot "convince" himself about the correctness. You didn't say, for instance, John had a sketch of a proof or an idea of a proof, but you said he had a proof. Your story appears to be artificial.
☐	13	Poor John! But that's the way science works, there are lots of examples of erroneous proofs in history.
☐	15	Well as allway there might be some errors in a prove no matter how many people think there are not (just like bugs in a programm ... you can be sure there are ones but never there are not). For the rest there is a small chance that the theorem is indeed both "true" and "false" cause we can never know if our axiomatic system is free of such thinks (as Gödel showed) ;-)
☐	17	All work was done by humans and so errors are possible - so there is an error in either constructing the counterexample or in the proof of the conjecture. Therefore you just can be almost sure
☐	20	Happens all the time....
☐	21	That sounds awfully improbable.
☐	23	So what?
☐	24	You can "know" things even if they are not true. It is all in your mind.
☐	26	This makes me wonder about the difference between "to know A has a proof" and "to be convinced by a claimed proof of A". I am usually content to convince and be convinced.
☐	30	But really, only TWO mathematicians agreeing isn't enough. A positive referee report isn't very substantial. It needs much more time to be vetted and digested. Also, I think probably ALL mathematicians have had the experience of finding an error in their proof, after having been CERTAIN it was correct.
☐	35	that's life
☐	38	"Irren ist menschlich" Any serious scientist will have this in the back of his/her mind and, while constantly struggling for mathematical correctness, keep pondering the possibility of error.
☐	44	The contradiction of the two argumets has to be found!
☐	52	None
☐	55	One may have here the sort of situation discussed by Imra Lactos(sp) in Proofs and

	Refutations. The "anti-Jones" function smay be expamles of monsters that expose an implict assumption in the formulation and proof of the the Jones conjecture.
☐ 57	I have consistently interpreted the word "know" in a rather narrow sense. Had I been John, I would have claimed for myself knowledge once I was reasonably confident that I had inspected every detail of a proof--but I might have been wrong in believing that I knew. The proof exists or does not exist independent of my own limitations as a human being, and while it is possible for a mathematician to know something, it is also possible (though less common) for a mathematician to believe he or she knows something when he or she does not. That there is no absolutely guaranteed method to distinguish between the two situations does not diminish the value of making the attempt.
☐ 58	How important is the Jones conjecture? How large is the community?
☐ 62	If instead of knowledge the question would have been for belief, my answers would have been different.
☐ 63	It all hinges on the definition of 'knowing'. On the one hand there seem to be plenty of cases where one 'knows', in a very strong sense, some facts of mathematics, eg elementary number theory and combinatorics. On the other hand, the reading of any very complex proof is prone to errors and oversights; being aware of this, the mathematician should be cautious to assign the status of 'knowledge' to its conclusion. In this scenario, I assumed the proof was very complex, given the fact that it was an open problem in the community for at least some time.
☐ 71	sometimes a proof contains a fault and nobody becomes aware of it
☐ 73	John has a doubt in the truth of the conjecture, but I suggest he trusts more in his former results and will look at his "proof" in the light of the "counterexample". And then he will know whether the conjecture is true or not.
☐ 74	My answers would have been very different with diferent time frames mentioned.
☐ 75	My answers had been different if you had asked "Does John believe ...", instead of "Does John know ...". There is no objective truth, even in mathematics. There is only mathematicians who may be convinced one way or another, and a "proof" (or a "counterexample") may be a means to convince some/many/most of them.
☐ 76	It is true that even the unanimous opinion of all mathematicians of the world may be wrong, but for practical purposes, a mathematician will consider his proof correct when he has positive feedback from the mathematical community.

Valid Responses	25
Total Responses	76

[Das Fragenlabel QBob1 wurde nicht vergeben.]

QBob2: Does Bob know that his theorem is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		5.4%	3
almost surely yes		51.8%	29
almost surely no		10.7%	6
no		8.9%	5
can't tell		23.2%	13
		Mean	2.929
		Valid Responses	56
		Total Responses	56

QBob3: Does Bob know that his theorem is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		3.6%	2
almost surely yes		25.0%	14
almost surely no		21.4%	12
no		10.7%	6
can't tell		39.3%	22
		Mean	3.571
		Valid Responses	56
		Total Responses	56

QBob4: Does Bob know that his theorem is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		3.6%	2
almost surely yes		30.4%	17
almost surely no		19.6%	11
no		12.5%	7
can't tell		33.9%	19
		Mean	3.429
		Valid Responses	56
		Total Responses	56

QBob5: Does Bob know that his theorem is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		0.0%	0
almost surely yes		3.6%	2
almost surely no		41.1%	23
no		39.3%	22
can't tell		16.1%	9
		Mean	3.679
		Valid Responses	56
		Total Responses	56

QBob6: Does Bob know that his theorem is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		5.5%	3
almost surely yes		43.6%	24
almost surely no		14.5%	8
no		7.3%	4
can't tell		29.1%	16
		Mean	3.109
		Valid Responses	55
		Total Responses	55

QBob7: Did Bob know that his theorem was true before he recognized his mistake?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		0.0%	0
almost surely yes		27.3%	15
almost surely no		16.4%	9
no		29.1%	16
can't tell		27.3%	15
		Mean	3.564
		Valid Responses	55
		Total Responses	55

QScene2comm: Comments on scenario 2:

☐	**ID**	**Response**
☐	5	Pictures can give good ideas on how to proof something, but can unfortunately be very misleading, too. Since when building an algebraic proof based on a picture, one tends to assume unproven statements to be true, if they seem to be clear from the picture. After changing his picture, Bob should definitely have reviewed his algebraic proof, too.
☐	6	This is getting boring.
☐	13	I presume Bob could finally save his proof. Though it should annoy him that there had been a flaw in his original idea.
☐	15	Same as before only that here comes more "meaning" in the picture. The truth of a theorem might change if you reinterprete the symbols in it ;-)
☐	20	This too happens all the time....
☐	21	The whole setup appears to me as a dubious play on words. In English, "I know it's true!" is often a subjective, sometimes volitional assertion. It certainly isn't the same as "I detain the knowledge that so and so is true", or somesuch similar statement about actual mathematical knowledge.
☐	23	And now for something completely different... I hope...
☐	26	I use pictures all the time. The extent to which they are convincing depends on the picture and the topic.
☐	30	This is a Bayesian problem: probabilities change after you have more information. So whereas you "can't tell" when there is a conflict between mathematicians, once one realizes his mistake the earlier "can't tell" changes to "almost surely no". (Which doesn't mean the result is almost surely false, only that he almost surely doesn't have a proof.)
☐	38	A 'proof' found late at night is unorthodox and can be ingenious as well as wrong, thus requires reconsideration the next morning. A mathematical fact asserted by two independent arguments (e.g. algebraically AND based on a picture) seems pretty reliable. But if and once an error HAS been discovered, I like to be doubly cautious before regarding some correction as a fix.
☐	48	Pictures do not take part in valid logical reasonings within the mathematical Univers de Discours. Recall that famous pic used to prove that any triangle is isosceles: drawing is inherently unreliable. Reasoning is much sharper than drawing.
☐	52	None
☐	55	In sufficent information of how the algebraic formula proved the theorem.
☐	57	I could perhaps have been a bit more generous, both in this scenario and the present, and allowed an "almost surely yes" once the parties had demonstrated due diligence in chasing down the details of their proofs. But I don't know John or Bob, so I don't have a good feel for how rigorously they work. :)
☐	62	the same
☐	71	a picture doasn't change anything

☐	75	Same as for scenario 1. Also note that an error in a "proof" says nothing about the validity of the "proved" statement, which may have a different, correct proof.
☐	76	Oral communication is not a means of checking proofs. A second person must go through the algebraic details; it is not sufficient if he just understands the high-level concept.

Valid Responses	18
Total Responses	76

QTom1: Does Tom know that **T1** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		46.3%	25
almost surely yes		37.0%	20
almost surely no		1.9%	1
no		1.9%	1
can't tell		13.0%	7
		Mean	1.981
		Valid Responses	54
		Total Responses	54

QTom2: Does Tom know that the second theorem **T2** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		3.7%	2
almost surely yes		11.1%	6
almost surely no		24.1%	13
no		22.2%	12
can't tell		38.9%	21
		Mean	3.815
		Valid Responses	54
		Total Responses	54

QTom3: Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		40.7%	22
almost surely yes		42.6%	23
almost surely no		3.7%	2
no		1.9%	1
can't tell		11.1%	6
		Mean	2.000
		Valid Responses	54
		Total Responses	54

QTom4: Did Tom know that the first theorem **T1** was true before he failed in answering Professor Smith's last question correctly?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		47.2%	25
almost surely yes		35.8%	19
almost surely no		1.9%	1
no		1.9%	1
can't tell		13.2%	7
		Mean	1.981
		Valid Responses	53
		Total Responses	53

QTom5: Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		32.1%	17
almost surely yes		37.7%	20
almost surely no		11.3%	6
no		5.7%	3
can't tell		13.2%	7
		Mean	2.302
		Valid Responses	53
		Total Responses	53

QTom6: Does Tom know that the second theorem **T2** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		13.2%	7
almost surely yes		64.2%	34
almost surely no		5.7%	3
no		5.7%	3
can't tell		11.3%	6
		Mean	2.377
		Valid Responses	53
		Total Responses	53

QTom7: Does Tom know that the first theorem **T1** is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		43.4%	23
almost surely yes		47.2%	25
almost surely no		0.0%	0
no		1.9%	1
can't tell		7.5%	4
		Mean	1.830
		Valid Responses	53
		Total Responses	53

QSceneComm3: Comments in Scenario 3:

☐	ID	Response
☐	5	Tom knew all the time that T1 was true. He could give a complete and correct proof, after all! What he did not know, however, is _why_ T1 holds. After understanding the overall idea, Tom got an idea why T2 should probably hold, too, but wasn't able to give a detailed proof, so he couldn't be really sure. Knowing both _if_ and _why_ a certain mathematical theorem holds is equally important for the working mathematician. The latter may even be more important for teaching as well as research.
☐	7	This seems unlikely.
☐	13	So Tom had to learn something new during the exam? Quite unusual, AFAIK.
☐	15	Well you don't need do understand the idea behind the prove of some theorem (just reed some books ... you won't be able to see the idea behind if it's not shown to you) ... and to

		some point the idea is not important at all .... just as i said before: symbol processing
☐	23	doobidoo...
☐	26	Having a general idea about how a statement and proof fit into a bigger picture goes a long way toward being convincing.
☐	30	My experience is that when a step in a proof fails, you always had some concern about that step. Nothing "sneaks up" on you. You may (incorrectly) convince yourself the step was correct, but it was a sore point when you first saw it.
☐	48	Once you are sure that you gave a correct proof of theorem T1, and later of theorem T2, you need not revise your opinion on the truth of either T2 or T1.
☐	52	None
☐	55	There is a difference between knowing a theorem is true and being able to prove it in a particular manner.
☐	57	Tom will almost surely know that T2 is true if he takes the time to work through the details carefully. Whether or not he knows T1 has not changed, but his knowledge of it became much more useful and valuable once he understood the main idea that allows the construction of a technical proof.
☐	71	a step by step proof together with the general idea is the basis for correctness
☐	73	He knows the truth of the theorems, because these are well known and proofed theorems. But he wasn't able to reproduce the proof.
☐	76	A proof remains valid even if you can follow it step by step only and do not see a general idea.

Valid Responses	14
Total Responses	76

QMates1: Does Martin Mates know that the Mates conjecture is true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	**Frequency**	**Count**
yes		1.9%	1
almost surely yes		51.9%	27
almost surely no		13.5%	7
no		7.7%	4
can't tell		25.0%	13
Not Answered			1
		Mean	3.019
		Valid Responses	52
		Total Responses	53

QMates2: Did Martin Mates know that the Mates conjecture was true?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
yes		7.8%	4
almost surely yes		52.9%	27
almost surely no		7.8%	4
no		11.8%	6
can't tell		19.6%	10
Not Answered			1
		Mean	2.824
		Valid Responses	51
		Total Responses	52

QCommScene4: Comments on scenario 4:

☐	ID	Response
☐	6	???
☐	13	Pity Mates couldn't witness his triumph.
☐	15	sometime the idea you see looks fine but as soon as you start to lay it out there goes something terrible wrong.
☐	23	Get ready...
☐	26	the details are important - even when i have a general idea, an overall sketch, and an idea of how it fits into a bigger picture, i am suspicious of technical problems until i work them all out.
☐	30	From beyond the grave?! Seriously, you need another possible answer here: with HIGH PROBABILITY, he knew the conjecture was true. ("high" being anything > 1/2.) And did from the moment he first realized the technique.
☐	48	Life and death per se play no roles in the mathematical Univers de Discours. The truly hard-nosed skeptic will stick to his/her opinion on the knowledge of professor Mates.
☐	52	None
☐	55	No Comment
☐	57	But he probably knew *something*.
☐	63	'X knows Y' depends only on what sort of evidence *X* has for Y. It is immaterial whether Y finally turns out to be true or not.
☐	75	Once again, in what sense can we "know" a mathematical statement to be "true"? We can perhaps convince ourselves that it is true (but there may be an error in our reasoning), or

we trust other mathematicians (but they may be wrong), or we trust a computer-checked proof (but there may have been a hardware or software failure). In this way, we can reduce the chance of an error -- but we cannot eliminate it completely.

☐ 76 Many ideas sound good, but difficulties become apparent when working out the details.

Valid Responses	13
Total Responses	76

Qbeauty1: Please select to which degree you accept the following statement:
"Mathematical beauty is objective."

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
strongly agree		5.8%	3
agree		25.0%	13
disagree		51.9%	27
strongly disagree		17.3%	9
		Mean	2.808
		Valid Responses	52
		Total Responses	52

Qbeauty2: Please select to which degree you accept the following statement:
"Mathematicians can see mathematical beauty without checking correctness or truth."

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
strongly agree		7.7%	4
agree		48.1%	25
disagree		38.5%	20
strongly disagree		5.8%	3
		Mean	2.423
		Valid Responses	52
		Total Responses	52

Qbeauty3_A: *Please select either 'yes' or 'no' for* **every** *possibility:*
Mathematical beauty can be a feature of

		yes	no	Total
mathematical theorems	Count	51	1	52
	% by Row	98.1%	1.9%	100.0%
mathematical proofs	Count	52	0	52
	% by Row	100.0%	0.0%	100.0%
mathematical theories	Count	50	2	52
	% by Row	96.2%	3.8%	100.0%
other	Count	45	2	47
	% by Row	95.7%	4.3%	100.0%
Total	Count	198	5	203
	% by Row	97.5%	2.5%	100.0%

Qspecotherbeauty: Specify your last answer if you like:
What else can mathematical beauty be a feature of, besides or instead of mathematical theorems, proofs, or theories?

☐	**ID**	**Response**
☐	5	mathematical applications
☐	6	Some people say they like all kinds of visual representations of functions or whatsoever, fractals, surfaces, origami, puzzles, ...
☐	9	Everything that can be mathematically described.
☐	15	the idea
☐	16	realization of mathamatical structures in nature
☐	17	algorithms
☐	18	Please define beauty.
☐	20	Definitions (if that isn't already subsumed by "theories").
☐	21	Mathematical objects themselves.
☐	23	Geometrical
☐	26	Pictures! examples: ray-traced algebraic surfaces. Escher art. polyhedral sculptures. computer animated popular movies.
☐	30	The gestalt: say, a weaving of arithmetical with geometrical arguments in a pattern never seen before. I suppose you could comprehend this as "theories", but I take that term in a more technical sense.
☐	35	geometry

☐	39	I believe mathematical beauty can be a feature of physical objects and mathematical objects. Symmetries come to mind. Unexpected/unintuitive results can also be beautiful - consider, e.g. polyhedra with trangular faces: all our experience and ituition tells us they must be rigid, yet there exist such polyhedra which are flexible.
☐	41	Ideas or constructions, or even just a way of looking at some line of arguments, a picture.
☐	43	formulas
☐	46	definitions concepts notation
☐	48	Music, dance and ballet, theatrical performances, theatre props, fine arts, photography, ... in short, in all performing and fine arts, where ordering and structure make great art. And math is also about ordering and structure...
☐	52	Definitions, but also for example: vague analogies, wrong proofs with accidental correct conclusion, key ideas that strictly speaking don't make formal sense (yet)
☐	54	property of numbers, unusual alternative ways to explain theorems etc., visualisation
☐	55	I suppose I am distinguising between theorems and formulae(equations). A thorem may say the some concenpts are realted by a formula of a certain kind and the formaul itself may or may not be beautiful.
☐	56	Formulas, germs of ideas, pictures.
☐	57	principals, patterns, and the consistency of the universe.
☐	61	mathematical definitions
☐	62	Concepts (resulting in definitions and notions of mathematical objects)
☐	63	Structures, relationships among them, concepts
☐	67	Questions, conjectures, interpretations, connections with physical reality.
☐	73	The way one individual mathematician finds the truth about his subject.
☐	74	definitions and examples

Valid Responses	29
Total Responses	76

Qbeautytrue: Do you agree that if a mathematical *theorem* is beautiful, it must be *true*?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
strongly agree		21.6%	11
agree		9.8%	5
mostly agree		11.8%	6
mostly disagree		11.8%	6
disagree		21.6%	11
strongly disagree		23.5%	12
		Mean	3.725
		Valid Responses	51
		Total Responses	51

Qbeautycorrect: Do you agree that if a mathematical *proof* is beautiful, it must be *correct*?

(Respondents could only choose a **single** response)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
strongly agree		21.6%	11
agree		9.8%	5
mostly agree		11.8%	6
mostly disagree		13.7%	7
disagree		19.6%	10
strongly disagree		23.5%	12
Not Answered			1
		Mean	3.706
		Valid Responses	51
		Total Responses	52

Qbeautyintheories: What can be beautiful about mathematical *theories*?
(more than one choice possible)

(Respondents were allowed to choose **multiple** responses)

Response	20% 40% 60% 80% 100%	Frequency	Count
consistency of the axioms		15.8%	12
coherence of the theorems		32.9%	25
clarity		61.8%	47
explanatory power		61.8%	47
other		22.4%	17
		Valid Responses	50
		Total Responses	50

Qspecbeautytheories: Specify your last answer if you like:
What else can be beautiful about mathematical theories, besides or instead of the consistency of the axioms, coherence of the theorems, clarity, or explanatory power?

☐	ID	Response
☐	12	- tricky details that shorten the proof - an alleged contradiction to reality
☐	18	Purity
☐	20	Coherence with *other* theories; and/or unexpected relationships (not necessarily coherent!) with other theories.
☐	26	unification of previous theories
☐	39	It's probably related to clarity, but sometimes mathematical theories have a strong analogue in physical phenomena - the way that physical systems behave (or we conceive them to behave!) and out intuitions about matter and space. This correspondence can be very pleasing.
☐	44	surprisingnes
☐	45	Easy to apply for practical problems
☐	46	simplicity presentation applicativity
☐	48	(A) Where applicable: completeness of the axioms. (B) Similarities and differences with other fields of human activity as they emerge when constructing or just studying or applying a mathematical theory
☐	52	simplicity of definitions; close connections with intuitions; surprising ability to shorten proofs or to give results in other areas

☐	56	Ability to draw connections between disparate areas of knowledge. (I guess you could call this explanatory power, but I think it's more than that.)
☐	57	Their beauty. Their pleasant effect upon the human soul when seen and understood.
☐	61	the architecture of the theory - as concretely realized
☐	63	Connections to other theories

Valid Responses	14
Total Responses	76

Created using Perseus SurveySolutions/EFM

C Teiltranskriptionen der Interviews

Teiltranskription von Interview 1

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer: 1:49:46 h

Transkription von Interviewteil I — 11:18–23:45 min (allgemeine Fragen)

EMH: Do you have any comments on the scenarios?
Interviewpartner 1: Well – I mean – I'm not sure that the questions are really – so – very – you know – precisely formulated. In a sense, when you say "Does X know that this is true?" and the answers are "yes", "almost certainly yes", so, "almost certainly" refers to the certainty that X thinks, or the certainty that you have about what X thinks? These two things are different, and the qu – it – there is an ambiguity in the way the question is formulated. You don't know whether you answer it one or the other. And it means different things in different scenarios, so, no I think there is an ambiguity in the way the questions are formulated, so, this might affect the way the answers are interpreted as well.
EMH: Which reading did you choose when you answered?
Interviewpartner 1: Well, I mean, this almost – I think, in – in the different scenarios, I have the impression that sometimes, it's expected that the answers – the questions should be interpreted in one way, and sometimes in the other, so it, yeah ...
EMH: It changed?
Interviewpartner 1: It changes, yeah.
EMH: Did you ever experience a similar scenario in your work or in your studies?
Interviewpartner 1: Well, I mean anytime one is doing mathematics and proving a theorem [... (undeutlich)] there is some degrees of certainty or some degrees of expectation about whether what one is doing is true – at what point you can be reasonably certain that it's true, and so on – so – yeah, this is – uh – [... (undeutlich)] – there's some degree of certainty with which – you know – we accept that something is proved. And of course this goes in various stages. Sometimes – you know – one convinces oneself, you convince yourself that you have an argument for something, that's the first step – you know. Then, you check details in writing it up, that's the second step. Then you communicate it to other mathematicians, maybe in talks or in – uh – some [other (undeutlich)] ways, and this is another step in checking – in gaining some more degrees of confidence about whether something is true. And there's peer reviewing process, getting something published,

refereeing process that's another step and then, even after something is published, there – there's continuous checking by people who use that result, and so on, so there are a lot of different stages or – you know – degrees of certainty that one has about whether something – when something is true.

EMH: What is a formal derivation, or a formal proof?

Interviewpartner 1: Well a formal proof is something where as much as possible every step of the argument is spelled out in mathematical language, and where each step of the argument can be checked by analyzing the – say – the formal language in which it's written.

EMH: Would you say formal proving played an important in role in one of the scenarios?

Interviewpartner 1: Well, um – yes, I think it's – uh – you know the – any – for example – you know – when something is checked by – you know – I mean, it's – there is a difference between having a sketch of a proof and having a complete formal argument. And very often, in writing the proof, that's where a lot of possible problems show up, when you transform a heuristic argument into a formal – a complete formal proof. Yeah.

EMH: And what would you call a formalizable proof?

Interviewpartner 1: Well, it's not a term I that would use often. In a sense, every proof should be put in a – I mean – for something – there has to be a kind of way to write a formal argument for any kind of – well, of course there are computer generated proofs, where, you know it's not a mathematician who is writing a formal argument, so, that – one might consider that an exception or not, depending on whether you consider the algorithm that produces the computer generated proof also as a kind of formal argument or not, but, o.k. – one can make a distinction in those cases. But – in – otherwise – I mean – this – usually – I mean, one can sometimes – you know – compress part of the argument in writing [not the complete formal proof or things (undeutlich)], but in principle, it should always be understood that everything can be sort of decompressed to make it as detailed as one wishes. So [one must make a (undeutlich)] distinction between computer generated proofs as opposed to proofs done in the – in the more traditional way.

EMH: Would you say computer generated proofs provide knowledge?

Interviewpartner 1: They do, although, I mean they – they are often less easy to use in practice – I mean, ok – you can say that a certain statement has been checked by a computer, and so, to some extent – I mean – you do have a confirmation that a certain – that a certain state.. - if you trust the algorithm that produced it – that – you have a confirmation that a certain statement is true. However, I mean – the – these proofs are generally difficult to use in the sense that very often in the – in the usual kind of proofs, the method that is used to prove – for proving something is often more useful than the fact of knowing itself that the result is true or false. A computer generated proof tends to tell you that – just that the result is true or false. But it lacks that extra amount of information that you have in a traditional proof, which is something that you can use, for example, applying it to different kind of problems – applying similar techniques to different kind of problems or so.

EMH: But you would say know that the theorem is true when you have a computer generated proof for it?

Interviewpartner 1: Yeah, if you trust that the algorithm – the algorithm works. But assuming that, then it – it tells you that a certain theorem is true or false. It doesn't give you any extra – usually it doesn't give you any extra amount of knowledge. Well, there are cases in which you might still be able to use a similar argument in other cases, there might be more information as well, but – no.

EMH: You said that every proof should be decompressible into a formal proof. Do you really believe that every proof that is accepted by mathematicians, by the community, is decompressible?

Interviewpartner 1: Well – I mean – of course, there are proofs that rely on a lot of pre-existing steps, right. And, very often – you know – when you are checking an argument, like if you are refereeing a paper or something like that, you don't go back to – you know – check that every single thing that is used in that proof – you know – you assume that certain thing like have already been checked, or – unless – okay – something makes you suspicious that there may be a problem, then, in that case you might go back and check previous results that are used in the proof but normally, one sort of only checks that final steps of the – or – what is – what is new in the argument and not what is used that was already known. So, in that sense, ok – these limits, the extent to which you can really expand completely an argument – I mean – you – in principle – you know – one would say that any argument could be – uh – expanded out and reduced to – you know – basic axioms, and then constructed. But, very often from basic axioms to an actual result, there are lots of intermediate steps that rely on previous results and so on, and – you know – this would make it, say [... (undeutlich)] – so, say – in terms of algorithmic time, if you want, certainly not feasible to completely expand it out to [intermediate steps (undeutlich)]. So, I don't think, realistically, one would really do that all the time. Only in special cases where – you know – there is a proof which is particularly controversial or particularly – you know – one is suspicious that something might be wrong [... (undeutlich)], one goes back and tries to check as many steps of the chain, and – I mean – these things – otherwise this – realistically, it doesn't really happen.

EMH: Do you have a special example in mind when you say: This would take too long to do it?

Interviewpartner 1: Well, I mean take a – take a proof of very – you know – of a kind that really involves a lot of tools, I mean something like some example of a proof which has been checked in a lot of details, something like Fermat's Last Theorem – but – of course it – it relies on a huge amount of pre-existing material. And, the general assumption is that things which have been used in the literature, by a lot of people, and that are consistent with a lot of other results, some, it's not even – even in the process of checking very delicate proof like that – you know – it's not really expected that one should go back to step zero. Of course one would check extremely carefully everything that is new, and possibly things that are referred to which are not completely well established in the literature and so which are relatively new, but one certainly does not expect to – to go back to the basic axioms and reconstruct everything from there. There is just too many things that are involved to do that. I mean – for many of those things you would – I mean it – it – I don't think anybody would really feel that it's truly necessary to do that.

EMH: Would that be the same for the classification problem of finite simple groups?

Interviewpartner 1: Well that's an example where you have lots of parts that are sort of computer generated and – and so on. That's in a sense a proof which is much more difficult to check, because it – a lot of parts involve things which are algorithmic, and – you know – in fact every once in a while, somebody finds that there's a problem, then, o.k., usually it's somehow – the problem is fixed, or the proof seems to be robust, but it's not the same kind of – you know – robustness that you have because there are – you know – theoretical results which have been checked against a lot of other results and where – you know – the –the logical structure of the proof is sort of more transparent – you know. This is in a sense the main problem with this kind of partly machine generated proofs that – you know – if you could be absolutely sure that – you know – that the algorithm that does the [. . . (undeutlich)] is faultless, then – that would be ok, but for something which involves a lot of different algorithms doing different things – I mean, checking special cases and so on, the – the possibility of an oversight or something is very high.

Transkription von Interviewteil I — 23:45–34:50 min (Fragen zu Szenario 1)

EMH: Let's look at the scenario with John, the PhD student who proved something, published it, and then later found a counter-example. The more abstract issue here is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. You already said something on this point; do you have another remark that comes to your mind regarding this issue?

Interviewpartner 1: No, I mean, just the fact that – you know – peer reviewing of [... (undeutlich)] is one extra step in trying to make sure that nobody has overlooked a mistake in the proof, but – you know – it's – by – it's also itself not guaranteed to find if there is a problem. It's only one extra layer of checking which is certainly extremely useful because – you know – some – it happens very often that referees report problems in papers – it's an extremely useful process to have but it's not that because something the paper went through a refereeing process it's guaranteed that it's true, that it's correct. It's, well – it's better than if it hadn't been refereed.

EMH: [beschreibt die Resultate der Umfragestudie zur Schlüsselszene von Szenario 1]

Interviewpartner 1: The arrow of time cannot be reversed, so whatever John was thinking before in the talk is not affected by what happens afterwards. Causality only goes one way.

EMH: Would you say the other way of answering [zeigt auf Profilkurve von Cluster 3] is not consistent?

Interviewpartner 1: No, not consistent with the principle of causality – something that happens can not affect it's past. It can affect it's future, so –.

EMH: So you would say these two questions [QJones6 und QJones8] are the same?

Interviewpartner 1: Yes, because how can it – how can what happened before be affected by what happened after?

EMH: Just to have it clear because it is important for me later: you said at the beginning that there are two ways of interpreting the questions [unterbrochen]

Interviewpartner 1: Right – so, here I interpret it as – you know – the degree of certainty that John has at a given time. So, I mean this – is – o.k., if he has that degrees of certainty at a given time, these two questions are exactly the same. They refer to the same moment in time, something else changed afterwards, but it cannot affect what he was thinking before.

EMH: Would you say that truth is not necessary for knowledge?

Interviewpartner 1: It is not ..?

EMH: Necessary for knowledge. You said here, when the counterexample appeared, that almost surely yes, John knows that the Jones conjecture is false. But, as you also explained, he still knew that it was true on the morning before he attended this talk...

Interviewpartner 1: He had a certain degree of certainty that something was true – I mean – the degree of certainty that somebody has can have absolutely nothing to do whether the thing – with whether the thing is true or not – I mean – it's just measure what this person is thinking, so, yeah, he was reasonably convinced that that argument was true.

EMH: So, and the fact that the Jones conjecture is true or the fact that it is not true is not relevant for answering the question: "Does he know that it is true?"?

Interviewpartner 1: No, because it's a question about what a certain person knows, and, might as well be under the impression that something is true which has no ground in reality so to speak .. [because (undeutlich)] lots of people convince themselves that things are true which – for which there is no argument. Otherwise – [you won't have (undeutlich)] all these people believing in religion – that's [lacht] – anyway. So this – I interpret it as a question about what the person believes at a given time.

EMH: Would your answers have changed if the journal proof that they submitted would not have been a traditional proof? Let's just assume the journal only accepts formal proof, and they do not make a peer reviewing process but just put it into the computer and then let it check whether the derivation is correct or not.

Interviewpartner 1: Well – I mean – what – again, it's a question about what John knows, it depends how much trust this person has in computer generated proofs, and, no, it's – you can have a – a better degree of confidence in your argument if it goes through a peer reviewing process, if the argument is formulated in a traditional way and goes through a peer reviewing process, or – you know – you can have a better degree of confidence if you have a proof that has been checked by a machine. This is to some extent an issue about how you feel – um – whether you trust the opinion of a – of whether you trust how the – how a referee would do the job, which – you know – sometimes – I know some people might have doubts about that – you know – maybe the referee is too busy, just looks at the – the paper for five minutes, and says it's o.k. without really checking, and maybe it's that a – the computer that checks a formal argument from beginning to end would be more trustworthy. Other people might think – well – you know – the computer may check but maybe the algorithm is not working for some bug that – you know – nobody knows, and therefore – you know – peer reviewing by a mathema – a human mathematician would be more trustworthy, so, this depends on the degree of confidence that one has in respect of one or the other method.

EMH: We also have a counter-example as a warrant for proof here. Would you generally say that a counter-example is a better warrant for knowledge than a direct proof?

Interviewpartner 1: Well, I mean – a counter-example is usually easier to check. Because – they – you know – it's – a proof, it typically has to give a very general argument that covers large number of cases. A counter-example is essentially one example, so, in general there's – it tends to be easier to check that a counter-example is correct rather than that the general proof is correct.
EMH: So, the participants of the study one year ago also had the chance to comment on the scenarios. I have picked out one comment for you: "How important is the Jones conjecture? How large is the community?"
Interviewpartner 1: Well, of course – I mean – there – if there are a lot of people who are interested in whether a certain statement is true or false there will be a lot more people checking the – the proof that is given, so, I mean, because a lot more people be interested in using the result, and so they will try as much as they can to check that – that it's correct before using it, so, typically in that case, a proof goes through a lot more checking than if it's something were very few people are interested in. So, the likelihood that if there is a problem, it will be spotted, is – you know – much more – it's much more likely if it's a problem that interests a lot of people. So I think this is the reason why it may be relevant to ask this question.

Teiltranskription von Interview 2

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer: 1:24:49 h

Transkription des Interviewteils 13:28–31:10 min (allgemeine Fragen)

EMH: Would you like to comment on the scenarios?
Interviewpartner 2: Um – first that the psychological – uh – relationship between a mathematician – mathematician and the notion of belief in his or whosesoever proofs is more complicated than is suggested by the scenarios or by the questions. [. . . (anonymisiert)] And so you – uh – as I see it – I might be wrong – but as I see it, you're trying to – uh – be more – uh – sociologically precise about this process – procedure of acceptance of the proof. Your considering essentially [only (undeutlich)] scenarios – except for the last one, you're considering the game between two players, so to speak, in which the notion of truth is kind of thrown like a [. . . (undeutlich)] – like a ball, and your asking for changes of the psychological – uh – attitude of players – one of the players after each set. To me, that's not an appropriate context for studying the [. . . (undeutlich)] social acceptance of proof. I mean, in real life, there are more than two players. The attitudes do not change as fast as you assume [. . . (undeutlich)]. At almost no moment, the attitudes are crystallized. There is always a shadow of doubt or a possibility of doubt. For example a proof can – can prove the right thing but contain mistakes [. . . (undeutlich)] they can be serious, and nevertheless, the basic [. . . (undeutlich)] can be sound [. . . (undeutlich)]. Or, mistake can be serious, and – but – but the proof when corrected might prove something – uh – say, – uh – less – uh – less general than the author initially conceived, and [. . . (undeutlich)] but actually, they would discover new things that were not known before this alleged proof appeared or things like that. So my general comment is that the situation is much more complicated, involves more players and more time, and involves more complex psychological attitudes [. . . (undeutlich)].
EMH: You also mentioned that there is some ambiguity in understanding the questions.
Interviewpartner 2: Yes, yes. Every – in every case I would – in order to make sense of the questions, I would practically everywhere replace – uh – the word 'know' by the word 'believe' – or something like that.
EMH: 'To make sense about the questions' – so, the questions do not make sense if you use the word 'know', or they do not make sense in these scenarios, or you just cannot answer them?

Interviewpartner 2: For me, they're – almost never really make sense. When I'm saying 'I know that Fermat's Theorem is true' or something like that, this implies two very different – uh – [uncurls ... (undeutlich)] one of the two very different possibilities. One, I have really worked on this first myself. Then, when Wiles' proof – appeared I worked with [... (undeutlich)] the proof, and I understand [... (undeutlich)], and now I'm completely convinced, so – so – uh – sort of know – believe I would say, I'm convinced that Fermat Theorem is true for such and such reason – roughly speaking my personal – my deep personal involvement with this proof. And the second – uh – meaning of the same word 'believe' or 'convinced' in this case, here I would say [I'm rather (undeutlich)] convinced, I believe that Fermat Theorem is true because I just *know* that – know the history of – of the story. I know how Wiles announced – that Wiles announced his proof, I know that – uh – then – uh – a mistake was found, then Wiles and Taylor corrected it, and there were several seminars at various points of the world working on it, and – uh – all participants were established mathematicians who knew what they're doing, I never read or heard about [... (undeutlich)], but now I am convinced because the proof has passed the general test [as all mathematical proof pass (undeutlich)], application, seminar studies, years [... proof, not ... results (undeutlich)] and other studies, maybe generalizations of the theorems, [several constructions ... (undeutlich)]. I am totally outside of it since I know how it is made, and I have a personal experience with some other results of the same kind, I'm sure that this people worked honestly and correctly, I believe that what we do is ok and Fermat Theorem is true. That's approximately how it works [... (undeutlich)].

EMH: But would say that there are some mathematical statements or theorems of which you *know* that they are true?

Interviewpartner 2: I want – in all cases, I would prefer not to use the word 'know' with respect to truth. To me, knowledge is knowledge of a machinery of definitions, of proofs, and so on. [... (anonymisiert)] And in – uh – and in mathematical context, I would say 'I'm convinced' – or 'I believe that it is true because of such and such circumstances'. I would prefer not to say 'I know that it is true'. And beliefs and convictions are things that really can change with time, sometimes very fast, whereas knowledge to – to my opinion at least – well, that's of course the problem of understanding or feeling the semantics of the word. For me knowledge is not something that can drastically change – uh – in a minute because somebody produced a counter-example or something like that. It's not knowledge, it's beliefs, they can change, convictions can change, but not knowledge, knowledge is something more stable, and more [... (undeutlich)].

EMH: What would you call a formal proof?

Interviewpartner 2: A formal proof is an ideal construct. You practically never see a formal proof of anything at all, because if anything is a little bit interesting, formal proof would be so long that you would never be able to – to concoct it, to write it down, then to read it and so on. So formal proofs are abstractions, like abstraction of a – abstract group or topological space or whatever, but – uh – it is – abstraction which is very essential for – self-consciousness of mathematicians. It is abstraction to which we recede each time we ever present something that we think is a correct proof. Correctness means that somewhere, at the bottom of the [... (undeutlich)] there exist a formal proof, which is a translation of my informal – or somebody else's informal [... (undeutlich)] proof – there it leaks, there everything is explicit, all axioms, all logical steps, and there it is a text written [... (undeutlich)].

EMH: And what would you call a formalizable proof?

Interviewpartner 2: That's exactly a correct proof – uh – which is done in more or less accepted context, and more or less accepted context means [any (undeutlich)] account of set theory or [... (undeutlich)] category theory, or something like that, plus rules of logic of such and such form, or things like that. So formalizable proof is a proof – acceptable proof in one of these universes. If something is obviously non formalizable, then to me it will be obviously not an acceptable proof. That would be an intuitive reasoning, or a sketch of something that might become a proof some time, but it's not a proof.

EMH: Would you say that every proof that is accepted by the community is formalizable?

Interviewpartner 2: Yeah, of course, this is not a statement that can safely itself be formalizable. But that – that's my belief and – well, if you wish – I mean – uh – one should say well this is a hygienic belief – I mean, that's more or less a definition of what we – as mathematicians as a community, what we are thinking about or speaking about when we are talking about proofs [... (undeutlich)].

EMH: What do you think about the proof for the classification of finite simple groups in this context. Would you say it is formalizable?

Interviewpartner 2: Oh yes.

EMH: Would you say that formal proving played an important role in one of these scenarios?

Interviewpartner 2: Well, no, I think – but let me look again [Pause, blättert]. Well, in so far as we are really speaking about mathematicians, or aspiring mathematicians, not just students that would like to pass this particular exam and then to become journalist or something like that. Uh – I think – yes – formal proof played a role, although – in all of the situations, except for probably Mates's situation, it was in the background.

The Mates case, because he is mathematician who knows what is a proof, he can – uh – estimate what time he needs to move from the stage [at his sixtieth when (undeutlich)] he has a convincing sketch to the full proof, so certainly, the notion of formal proof is somewhere in the background [... (undeutlich)].

EMH: Have you ever experienced a similar scenario that comes to your mind?

Interviewpartner 2: Well – um – I like to formulate the things in terms of what usually is called a mistake [... (undeutlich)] or something like that. In my published papers – uh – was a couple of mistakes and one [major (undeutlich)] mistake, which most fortunately for me [were (undeutlich)] – one of them was found very late after the publication and the general acceptance of the proof, I think – fifteen years or something like that. Uh – but – uh – fortunately, already the person who found it was able to sketch a roundabout way to – to sort of not correct this mistake, but sort of bypass it by slightly changing the intermediate statement, [... (undeutlich)] showing that the changed statement could be used in order to prove the main theorem. Then another person was able to prove that this intermediate statement is still correct although my proof was wrong, so even the whole issue was correct, so I was very much relieved about it. And one – uh – paper [... (undeutlich) very very happy ...] contained the most stupid mistake one can imagine. I used [some false elementary identity (anonymisiert)].

EMH: Oh, yes!

Interviewpartner 2: [lacht] But it was – but the – it was found not in this way, not that somebody found [lacht] that – that I used this stupid identity, no. What they did found – find – I think actually one graduate student of mine – what he did find – so, my statement said that for [a set of cases (anonymisiert)], something is correct. And he found out that [for some cases (anonymisiert)], everything seems o.k., but for [one case (anonymisiert)], something is wrong, geometrically. It was some geometric picture. I was totally astounded, I looked through the paper and didn't find the mistake, and I looked through again, and then found the place. And when I have corrected it, then, really [the cases for which everything seemed o.k. were the only cases (anonymisiert)] for which the statement was true. (Lacht) So everything sort of fit – fitted together, we both were very happy that everything was o.k.. That was one of these stories that I have. And – uh – and – uh – I think, one more story, it was not so interesting as this [... emotion ... (undeutlich)], so to speak, but the student could. And – uh – my own example and – by general disposition, I'm very tolerant to – to honest mistakes. That's not a problem that a person made a mistake in his or her published work, we are all prone [... (undeutlich)] professionals [... (undeutlich)] making mistakes, even in published papers. The problem is how a person – uh – reacts on this mistakes, the problem is how serious it is in the sense that it can be avoided or corrected or things like that. So it's – it's – what we do as professionals, but we should be honest about it and don't take it too dramatically.

Transkription des Interviewteils 32:00 min – 42:23 min (Fragen zu Szenario 1)

EMH: The more abstract issue behind the scenario is of course that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this general issue? I think you already said much about this, but could you summarize this in a few words?
Interviewpartner 2: Well, again, I would use the word 'know' more sparingly than it is used in the scenarios, I would replace it by 'believe' – uh – 'convinced', things like that. Uh – the – in all scenarios, what you describe is kind of the first steps of a newborn proof, and working on this first steps you usually don't know whether it's a proof or not. It was in the case of – uh – exam, of an exam, because professor – probably [. . . (undeutlich)] something quite standard [. . . (undeutlich)] something that has been written down, checked, explained to students many many times, so professor knows, is convinced, believes, everything, that this theorem is true, whereas the student himself probably is – uh – very unsure about it. What he knows is that he must explain this proof at the test in a convincing way. Uh – hardly he knows more about it unless he is a born mathematician, then he can have stronger convictions.
EMH: Now I'll confront you with some quantitative results from the questionnaire study — would you say the other way of answering [zeigt auf Profilkurve von Cluster 3] is consistent, is plausible? Why or why not? And would you, by the way, explain your own way of answering [zeigt auf Profilkurve von Cluster 1] a bit?
Interviewpartner 2: Well, I think that the second way of answering [entspricht Cluster 3] is inconsistent – um – is inconsistent, at least – uh – if I do what I always did here, replace the word 'know' by the word 'believe' or 'is convinced'. Uh – as I told you, the exact meaning of the word 'know' in this context I'm not even sure,I must interpret it – and, why I think this way – well, the proof is written, the advisor decided that it's ok, the referee decided that it's ok, so, of course he now knows – well – *believes*, is convinced that the conjecture is true. Uh – five years after – uh – he himself he has construct the counter-example. He is shocked, professor Jones is shocked, so – but, of course both believe in this counter-example, so, both think it is [real (undeutlich)]. And – uh – the morning before the talk, he is – of course, I mean, nothing changed – uh – after publication and acceptance [. . . (undeutlich)].
EMH: Would your answers have changed if we suppose the story was a little bit different, that the journal where they published was a journal that only accepted formal derivation

as a proof, and they do not do peer reviewing processes, but they just put the proofs into a machine to check them?

Interviewpartner 2: This is impossible – I mean, it's an unrealistic option in the present. It might become more realistic later on. There is a mathematical theory, you probably heard about it – uh – computer assisted checks of proofs where the computer – computer doesn't check the formal consistence of the whole proof [. . . (undeutlich)]. What computer does – it – it – uh – picks random fragments of a proof. So, this [lacht] – even this procedure is not formal. So I don't believe that this scenario, that journal accepts only formal proofs – I don't believe that it is in any way realistic one, so I cannot discuss it.

EMH: Whose point of view you did take when answering the questions? Was it the one of the person who ascribes knowledge, or the one of the person whom knowledge is ascribed to?

Interviewpartner 2: No, I – neither one, I was answering from my personal viewpoint.

EMH: Ok.

Interviewpartner 2: Which is that of a practising mathematician [. . . (undeutlich)].

EMH: You not switched into one of them.

Interviewpartner 2: [No . . . (undeutlich)].

EMH: We have here a direct proof for the Jones conjecture versus a counter-example. Would you say that generally, counter-examples are the better warrants for knowledge than direct proofs?

Interviewpartner 2: No, I would say that counter-examples are quite often more convincing than the proofs, because – the proof, because usually, they are more focussed. Uh – the proof that – of the fact that this is a counter-example is usually much shorter than the proof of a general statement – uh – so they are somehow local. They do not reveal you where exactly was your mistake in the long, previous proof, but they just tell you that – in rather obvious ways that the statement you believed before is wrong. And if the statement is wrong, then something was wrong with the proof. So, it is a kind of roundabout way of finding a mistake in the proof – you didn't find it, you just say 'No no no, this cannot be [save (undeutlich)]'. So, counter-examples in many cases are more convincing, but preceeding proofs [. . . (undeutlich)].

EMH: A comment I got on this scenario was 'How important is the Jones conjecture? How large is the community?'. What do you think about this?

Interviewpartner 2: Well, probably it agrees – I – I'm not sure I – I interpret it correctly – but probably it agrees with what – uh – I was saying that process by which the truth, or otherwise – um – statement, is verified by a certain collective verification process. The size of the collective, and in particular the fact whether there are good, honest professionals in the [community (undeutlich)] – it depends on the importance of something. If just one person asked the question, another proved it and a third one checked it, probably a community is not – uh – big enough in order to – to convince everybody else that everything is ok. So, the importance of the question is a parameter which – uh – influences the size of people who seriously [… (undeutlich)]. So, if this interpretation is the same one which was in mind of this person, then I agree with him.

Teiltranskription von Interview 3

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer: 1:47:44 h

Transkription des Interviewteils 14:00–23:30 min (allgemeine Fragen)

EMH: Do you have any comments on the scenarios?
Interviewpartner 3: Uh – no, they – uh – they are realistic, I think, and they – they are funny sometimes and – uh – yeah, and uh – so – so – so at least for one of those scenarios, or maybe for two, I – I have seen – uh – how you discussed this in your report and – uh – what general scores where – and I – yeah I – uh – so – so there are two matters – so the objective truth of a theorem and the subjective feeling about being true or not and – uh – yeah, that – that can change – change in time – and – uh – that's – uh – how you evaluate – uh – the truth or the probability of truth of a certain theorem. So that – uh – that's how things work and – uh – yeah, so – uh – so, I – I don't see contradictions – uh – between that you first think the theorem is true and then next think – uh – theorem is false. Because you can have overlooked – uh – some – um – detail of the proof – there's some error in the proof and – [which will (undeutlich)] come out later.
EMH: Did you ever experience a similar scenario?
Interviewpartner 3: Yeah, yeah, quite recently, or maybe one year ago, I had – uh – submitted a paper to a journal and – uh – yeah – some theorems, and of course I think that the theorems were true when I submitted the paper. And then the referee discovered an – an error in one of the proofs – he didn't say the theorem was wrong but then – uh – I saw that even the theorem was wrong, but I could repair – modify the theorem – um – correct – with a corrected proof and – uh – yeah, then the referee also agreed that – uh – that the new theorem – um – had a correct proof so – so – um – of course I – I also believed then that the new theorem was true and – uh – I think – uh – then the paper was accepted, and – uh – I have not seen other objections by anybody so, yeah – so that – so I have such experiences myself, yeah. [I don't know (undeutlich)], I think that's the way mathematics works – uh – on the one hand there is a kind of general agreement among mathematicians – um – about truth in – um – mathematics and correctness of proofs, but when you write down proofs yourself – uh – or – um – you always write them down in a – informal way and not in a completely formalized way, so you may have overlooked – uh – things by which they are [. . . (undeutlich)] and – uh – only – uh – if other mathematicians look at the proof – and – uh – yeah – as

many as possible – uh – then the certainty that the proof is correct and the theorem is true will – uh – increase – I mean – uh – but even then – uh – even – um – theorems which have been published long ago and – uh – many people have looked at it, but if – if the proofs are very long and technical then still – uh – much later – uh – there may come up some error in the proof and – uh – and – uh – well, if it is a theorem which has been used often, then if the theorem is wrong then the chance is big that by – that by using the theorem some contradiction has come up, but if the theorem has not been used often then – uh – then it may have been remained like this and – uh – yeah – uh – until someone is – uh – wanting to use it and checks the proof and sees that there is some error and tries to – um – correct it and then finds that – that the embedded theorem is really wrong because he can find a counter-example or something like that. Yeah, that's the way mathematics works and – yeah – way around is to – to write down completely formalized proofs, but that's usually too tidious to do and – um – or to – um – to work with computerized proofs and – well, that's a new development, I – I – have no – uh – experience with this except computer algebra, and that's only verifying part of a theorem and not a completely formalized proof.

EMH: How would you define formal proof, what does it mean to you?

Interviewpartner 3: Well, that every logical step is inside the – uh – inside the proof so so it – it must be also in very – very phrased in logical terms.

EMH: Would you say that in one of these scenarios, formal proving played a role?

Interviewpartner 3: In one of these scenarios? No, I – I don't think in one of your scenarios you had – uh – completely formalized proof – uh – no.

EMH: What would you call a formalizable proof?

Interviewpartner 3: Well, a formalizable proof. So, I tend to believe that – um – that – um – every correct mathematical proof is also formalizable, and – uh – now – but – but – say for – uh – the proof of Fermat's Last Theorem it may be a very long job to do that.

EMH: Would you say that the proof about the classification of finite simple groups is a formalizable proof?

Interviewpartner 3: Yeah, so – I may distinguish between formalizable and correct, so – so, while you are formalizing it may turn out that it's not correct – or – or – yeah, but – um – yeah, I think in principle, it's formalizable, this classification of – uh – finite simple groups, yes.

EMH: What does 'in principle' mean?

Interviewpartner 3: Well, it – with the present technology – uh – so – so, just – just by hand, it's – yeah – it may not be doable for one person in a lifetime and – and maybe

even for – for this group of persons who have been working on this it may not be doable, but – um – maybe with advanced future computer technology it may be doable, yeah.
EMH: Would you call a proof which turns out to be not formalizable still a rigorous proof, or not a proof at all, or . . . ?
Interviewpartner 3: Yeah. Yeah, but – but – yeah, I believe – but that's maybe somewhat naïve – but I believe that – that every proof is formalizable – uh – and – every correct proof [unterbrochen]
EMH: O.k.
Interviewpartner 3: Yes, yeah.
EMH: So, not only the proofs that are there at present, but also –
Interviewpartner 3: Yeah, yeah.

Transkription des Interviewteils 24:50 min – 38:45 min (Fragen zu Szenario 1)

EMH: The general issue behind scenario 1 is refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. What are your comments on this more general issue?
Interviewpartner 3: Uh – yes – uh – having checked it by a referee – yeah – is a good thing but – uh – yeah – so – you have only a few – um – possibilities for choice here, and here I said 'yes' – maybe – um – I was now – um – going into the skin of – of John, and John is just a beginning graduate student and I think, John would really think 'yes', but – I as an older [person] – um – yeah – would – yeah – I think that there is a probability – um – for each result – uh – for each theorem – um – if it is true, and – um – yeah – so, maybe from my point of view, not from the point of view of John, but from my point of view, I still would think 'almost surely', so with a very high probability but, well, then the referee – um – might have looked at the paper only in a superficial way, then it may have been only one referee and – so – still there may be some doubt – yeah – yeah – but John as a beginner would certainly have thought 'yes' here – yeah – yeah.
EMH: This was on question 4.
Interviewpartner 3: Yeah. So, in general, as I already said – uh – the probability that a theorem is true, and that – uh – well, theorem is true if the proof is correct, so the – so the – the probability that the proof is correct increases as – as more people – um – have looked at a proof – uh – or – uh – not [only (undeutlich)] more people but also – uh – better people – um – better mathematicians, so maybe the better journals [they work with (undeutlich)] better referees, or there could be more referees and so, for – for a very important result there is a whole team of referees, and – so like Fermat's Last – um – Theorem – um – so then, if the referees agree – um – then – such a big – uh – high

level team – then the probability is very high that it is true, but, on the other hand, if the theorem is – if the proof is very long and complicated and technical, of course then it is again more chance that something has been overlooked. So, on the one hand the probability increases if there is a high level of – team of referees, but – but – uh – as the proof is longer and more technical, it – um – decreases again, by this compared to rather – um – theorem with rather short and – uh – elegant proofs, yeah – yeah.

EMH: I will now show you some of the results from scenario 1 I got from the posting of the online questionnaire. Do you think the other way of answering [zeigt auf Profilkurve von Cluster 3] is consistent or plausible, and could you explain how you answered here [zeigt auf Profilkurve von Cluster 1]?

Interviewpartner 3: Yeah but if you – I've answered here very positively – uh – then – so – after the paper has been accepted, John knows, or knows almost surely, that the Jones conjecture is true, then he will stay in this opinion until – uh – someone comes up with the counter-example – so – so – um – yeah, so I think, this is contradictory, if you say here in question 6 (QJones6) 'yes', and then in – uh – question 8 (QJones8) – uh – 'no'.

EMH: Ok.

Interviewpartner 3: So – yeah – so my – yeah, because you ask here about subjective opinions, John's opinion about – uh – the truth of the – uh – conjecture. And – then – you may also say that this is an – uh – objective truth about the Jones conjecture, but you didn't ask about that, you asked about subjective opinion.

EMH: So you took the point of view of John throughout the whole scenario?

Interviewpartner 3: Yes.

EMH: When I interpret this way of answering (Cluster 1), I might derive that objective truth is not necessary for knowledge. People answer positively that John knows that the Jones conjecture is false after this counter-example appeared, and at the same time, having the same information, answer that he knew that the Jones conjecture was true on the morning before the talk. The Jones conjecture cannot be true and false at the same time of course. Would you agree with that, or do you have another comment?

Interviewpartner 3: So, objective truth is not – ?

EMH: Necessary for knowledge. I would try to derive this from this way of answering (Cluster 1). Would you agree with that, or would you say 'no, it's not possible to infer this'?

Interviewpartner 3: Uh – yeah – well – um – well, I – uh – I believe in mathematics that there is objective truth, and – and it is general – um – we generally try as mathematicians to – to come as closely to this objective truth as – um – as possible, but – uh — yeah

– we may fail in this – and – uh – for a while and then – yeah – may correct or be corrected later, so – uh – yeah – there may be a tension between objective truth and – and subjective truth, so – uh – yeah, I don't know if this answer – or maybe I have not understood you question completely – correctly – yeah – yeah.

EMH: Just when you say 'I know that a certain statement is true', does this imply that the statement has to be true objectively or not?

Interviewpartner 3: Um – yes – uh – well, maybe sometimes I say 'I know that this mathematical statement is true' but – uh – yeah – and sometimes the – uh – these statements are – have so – such easy proofs, and so many people have already – um – checked these proofs that it is really almost absolutely certainty that it is true, but – uh – it is also annoying to say everytime 'I know almost surely that' – uh – 'it is true', but – um – as I said before – um – subjectively we are converging, we – or, we try to converge to the objective truth, and – uh – yeah – depending on the statement, we may be closer or – or less close – uh – so – but there is a certain probability that – um – in our subjective – um – feeling – um – if it is true – um – yeah – so – [lange Pause] – yeah, I think I just repeat my words [... (undeutlich)] – yeah.

EMH: There is another general theme regarding this scenario: counter-examples as a warrants for knowledge. Would you say that counter-examples are generally better warrants for knowledge than direct proofs?

Interviewpartner 3: Yeah – it – uh – depends on the – if – if the objective – uh – true statement is – that something – um – is not general – that is not generally hold, then of course this can be – um – the easiest way to proof it is by counter-example. So if the Riemann conjecture is not true then – um – yeah – then it would any easy way to prove it by counter-example, by giving this ones – this zero which is not on the critical line. Yeah, and – yeah. But if you have a true theorem – um – objectively true theorem – um – which says that in all cases, something holds – yeah, there are infinitely many cases, then – uh – yeah – then there is no way to proof it by counter-example, but for the – you have to use another way to prove it. But – but as long as you are not sure about the truth then – uh – yeah – then you are – yeah, maybe somewhat depending on how much you are believing that it's true, but – if you are not yet very sure, then you – um – will move – or – uh – try things on both sides. On the one hand finding – trying to find counter-examples, on the other hand trying to find proof.

EMH: One comment that I got from one of the participants of the first study on this scenario was "How important is the Jones conjecture? How large is the community?".

Interviewpartner 3: Yeah – that – I also said that – so, how many people, and – uh – how well qualified people have looked at this, and – uh – yeah.

Teiltranskription von Interview 4

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer: 1:55:53 h

Transkription des Interviewteils 16:45–36:18 min (allgemeine Fragen)

EMH: Do you have any comments on the scenarios?
Interviewpartner 4: So one thing – math is – in – in a sense is – is something personal – uh – I'm not really interested if other people understand something – it – it's – if I understand something, then it's something for – for me, something I understand. So – so the questions of whether somebody understands something don't mean that much to me. This is all about other people and – uh – other questions would be: when – when do I und – think I understand something? And this – this will probably depend on – on lots of – of other things. So these – it's – it's hard to answer these questions, in a sense.
EMH: Could you give some details: What would this depend on, when you say 'a lot of other things'?
Interviewpartner 4: Um – so – uh – I don't – I'm not sure, I can refer back to some of these scenarios?
EMH: Yes, of course.
Interviewpartner 4: So – so in scenario – um – scenario 1 and 2 were – I think it was 2 – was – was the guy with the –
EMH: Scenario 2 was with the picture.
Interviewpartner 4: – with the picture, yes. So, he – he reinterpreted things. He looked at – at the topic from different sides. This is not in – in scenario 1. And – and certainly, when I – when I'm looking at – at something, I'm – and – and think or am enthusiastic that I proved something, I don't think that I proved something, or I would think that I understand it. I try during – probably during next the – certainly if it's a relevant thing – during the next few weeks try to shoot holes in it, look at it from different directions – uh – ask questions why – uh – why isn't this true, why does it work this way not that way, if – if – through different angles – try to convince myself that it's actually true – that – that it has to be true, by looking at it from different sides. And – and that was only apparent in – in scenario 2, so I – I think I was slightly more confident in – my answers were slightly more confident – did I do that? – that the understood the theorems in scenario 2. [blättert] But also these things are – uh – it's all – one night he – he thinks he has something, and the next – uh – the next day, all kinds of things are happening. I – uh – I myself – [that I was (undeutlich)] I partly was thinking about – I'm only

convinced that something is true, if I – during a longer time look at it and – and – half – half forget the thing and – and – and reiterate the – the argument later. So, that's the type of comment I didn't see in the scenarios but it – that's something I – I usually think about.

EMH: Did you ever experience a similar scenario?

Interviewpartner 4: I suppose so, possibly all scenarios, but I've – I've also found that – that I had to come back to my idea that something might work – um – later on, so that's [what (undeutlich)] – why I'm af – I'm always a bit more careful– uh – certainly in the – in the moment – [where (undeutlich)] all these people and I would also be very enthusiastic that something might be true, but this enthusiasm also makes that you're less careful in – in trying to shoot holes in – in the argument. Uh – so – so, this type of this – this last guy who – who almost died, and – and has all this knowledge and intuition and so on, but the mere fact that he thinks he needs one or two years to work out everything in detail – uh – I – I would never think that I – I proved a theorem if – if I knew it would that long to fill out the details, then I certainly wouldn't believe it.

EMH: Is there a special anecdote that comes to your mind?

Interviewpartner 4: Not really, but it – it – um – it has happened that – that – uh – when I wrote something out, thinking that it was relatively detailed, that still, the – the next line, I looked at it, or – or that even – even once that the referee looked at it, that there were – uh – somewhat incomplete arguments, which I still had to – had to work out. Uh – so, in that sense it's – it's a – it's often, at – at least in my case – I work a lot with intuition, so the – the formulas and pictures combined together to work out something – uh – and in – you have to be very careful with intuition, so I – I always – I – I need a longer time to check and work out the details, and – and I have found on – on some occasions that – uh – looking – looking at what I did a few weeks later, say – uh – the worst parts which I thought I needed to – to work out more in detail. Often an intuition is somewhat correct, but – uh – it turns out to be almost always correct, but that's not the same as – as giving a – a detailed proof that other – other mathematicians can – can check. And that is a more time consuming – consuming process. This has happened in – just in daily work, this happens.

EMH: What would be formal proof for you?

Interviewpartner 4: So, in – in a sense – uh – I don't know what a [. . . (undeutlich)] – uh – I'm happy when I'm convinced that something is true. [lacht] Just said, this – this is a – at one time I may be kind of convinced, and – and later on, I may still find that there are some details to be precised – um – and no mathematician works from – from axioms and – and – uh – clearly indicates what at each step goes into it, and what's the conclusion to the next step, it – it no longer works that way. Um – so I'm not sure about – uh – the formal proof is probably different for – uh – for different mathematicians, you asked what it means for me, I think. [lacht] Um – it's – it's a bit hard to tell. So, I – I have to be convinced that it's true, I have to be – uh – able to look at it at a later time, and – and still re – be able to reproduce the – the arguments – um – I have to be able – uh – to understand both the – the global picture, that was also in one of the scenarios, uh – so, to have an overview – at – of – of the proof, explain to myself what the global idea is and why it works like – like this, and also to be able, and that's the details, to follow the proof from – from step to step, the logical consequences, but in – in practice you – you don't always write down every tiny detail, because that takes too much paper. Um – does – does that come close to an answer?

[Die restliche Aufzeichung dieses Interviews konnte aufgrund zu schlechter Tonqualität bisher nicht transkribiert werden. Ich verwende in den Kapiteln 4 und 5 ausschließlich Auszüge aus dem transkribierten Teil des Interviews.]

Transkription von Interview 5

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer (beide Teile): 2:09:52 h

Transkription von Interviewteil I — 13:35–45:36 min (allgemeine Fragen)

EMH: Do you have any comments on these scenarios?
Interviewpartner 5: Yeah, I wasn't quite sure how to interpret these questions – so – what – what exactly was meant that someone did know or does know – um – it is – uh – I – uh – well, I rather interpreted it as – uh – the – the level of belief – of – that this person had about his work. And – um – and as – so the change of [hope (undeutlich)] between the stages of – of the work on a mathematical problem. Right – yes, otherwise it's – um – yeah, ok.
EMH: Did you ever experience a similar scenario?
Interviewpartner 5: Uh – yes, surely – it is a very standard situation, and a very sensitive – uh – a problem to most mathematicians. I don't know – I – uh – I used to envy mathematicians who are – uh – who can write down proofs they start to believe once these proofs are on paper. And – so – I understand – uh – there is a skill of mathematicians who do completely believe their written proofs and who – uh – rather believe the sort of pictures that they have in their minds. And they have a general sort of graphical and intuitive idea why this statement that – um – they are trying to establish – why it is proof or why it should be proof – sorry – why it is true or why it should be true. I personally don't really believe in written proofs – um – because it is – it is only theoretically possible to check a proof line by line and so get confident that this is correct, while it is rather – the right way of understanding the contribution that this new proof brings to ask yourself and ask the person who delivers the proof question of why this time – uh – there is a successful solution to the problem – uh – there is a proof – has been found. And – um – in the previous fifteen years – or five years – or whatever the story or – uh – how long the story was, nobody succeeded in proving this. So what is really new, what is the new idea that – uh – has been brought with this proof? And if you see this idea, if you feel that there is really a new contribution that makes something work that previously – uh – did not work. Then – then you see that there is a great chance that now there is something that wasn't before. And – um – and if you – uh – suspect that – uh – solution is to easy – you know – it is sort of too good to be true – and this is sort of a – uh – test that you can put. And – uh – also – well, of course it is a huge problem

in mathematics of how you check proofs. And – um – all working mathematicians of course have experience with this – say in capacities of referees, of papers and so on – and – and there are – so for me, for example, methodology of how to referee a paper, on – and a question of correctness. That – um – I would sort of start to read it – well – first, introduction, start – trying to understand what exactly is the statement that is – uh – has been promised to be proved in the paper. And once I do understand this, I go in the back of the paper where the proof ends, and see – and try to find – uh – the key argument that made the proof work. And – uh – if, at this stage, I don't see exactly why this argument works, then I go one step back and see – uh – what is the proof of this key argument is based on. So, what is the previous step – was the previous step. And if I still – if I'm still suspicious that – uh – something is – uh – I don't quite believe the argument given there – looks quite suspicious – I go a step back again to the beginning of the proof, and in this way, in this chain of proof I – I'm trying to find where it breaks. Or, if it's non breaking, I would see the spark of – sparkle of new idea that finally makes it work and makes me believe that it works. Uh – and then – uh – ok, I can check for example quality of writing of intermediate lines that – uh – I can confirm that – uh – I can believe general technical details. But the crucial thing is to see whether there is an idea, and – uh – so, for me mathematical proof are not what they – uh – mean in formal sense. So I don't believe that it is possible to have – uh – a theorem – well – really big theorem checked line by line. Uh – so – this process that I tried to describe is only part of what I believe is a true test of correctness of mathematical statements. It is more or less through digesting this theorem in mathematical practice. So you see if you – uh – if – say, in one of these scenarios people started to play with this theorem – in – that to use it in mathematical practice – so, it is like a complex thing that people try to use in this position and in that position, and in this regime and in a harder regime in – uh – say – like a car that you take with you in desert or wilderness and ride it. And if it – uh – if it's wrong, than you will spot somehow it doesn't fit into some of your non-mathematical context. And this is basically how – so – how things are being really tested and errors are discovered. And if there is the – sort of – sometimes, it might be a kind of a finite statement, which sort of ends the line of inquiry into mathematical problem. And there is the proof that has been accepted – and – uh – nobody the – after that cares about using this. Then this would be – uh – suspicious situation. After few years I would – uh – and even people who worked on this theorem would loose their confidence in the fact that the theorem has been proved, if it hasn't been in use. That's just my experience, and that's how I do mathematics and teach my graduate students and also help them out in situation when they fall into this sort of traps – you know – I had recently – well –

communication with another – a student of mine who found a mistake in his proof – so to say that he believed he – was working – well, usually this just means that people found some – uh – so, when people claim they have proved something, this often can be just – uh – that they found some maybe even crucial steps towards the proof – and – uh – either – uh – on the level of writing down this proof, or could be on the level of refereeing or something that a gap in the proof or just error would be found which doesn't necessarily mean that this does destroys completely the existing proof or the existing argument. It quite often means that there is – that something has been done half way, but then – you know – but it was to quick to announce the full proof. So what's – just deceptively looked like full proof but was only part of the proof, but – uh – which nevertheless means some problems. So, often – um – just unsuccessful proofs are – are just beginning of something more successful.

EMH: You said that mathematical proof is not formal proof to you, or mathematical proof does not work in a formal way, right? What do you mean by 'formal proof'?

Interviewpartner 5: Well, you see, [... (anonymisiert)] I even teach students what formal proof is. And we are supposed to know what – what proof is. And the definition as such is that you have – um – sort of well written system of axioms that – um – are in the foundations of your theory or are given to you – um – and you – you have – um – sort of fixed inference rules or – um – well understood inference rules, and so you work within this framework, and step by step produce the facts and – uh – however which end up with a theorem. And – uh – as I said it – it is grossly simplified definition of what happens in practice. That – uh – of course in practice, when we know that there are now proofs that are ten thousand pages long, and we even know that people who announced this proof to be correct – well, some of them are long dead by now – and the proof is known not to be correct, and nevertheless the – you know – it is now kind of matter of belief that people really believe that basically it is correct, and so, the – it is a work in progress that polishes the proof, and I – personally I like to use this expression that – uh – that some proofs are locally everywhere wrong, but globally correct. So, you can even have – say – proof consisting of a hundred of lemmas, and thirty of them are wrong, as written, but – uh – that's not the point, it is just the errors in writing down. In – um – you know – there is a big picture, there is the real understanding of why it is true, and then, it is the process of writing down these details, and not all people are good in this. I – I know of – say – one of my recent graduate students is almost incapable of writing down proofs. But he really knows mathematical truths. It – uh – he was my only student whom I could ask about things that I didn't know, and once, he would come up with an answer, which he often would. Um – I would know that this is really true. And then the problem is to extract from him why – why it is true – which – which is the proof, right. If you can extract from – uh – from the pictures that it is true – from a general idea that why it must be true, you want to extract more and more detail – why this is true, why do you believe that this is true, and – can you – um – check this in – um – could we check this in detail that this is true – um – and if you do this to the end, then you have a full proof. But often it is rather deceptive that – such things. But again, it is – you know – I'm – uh – I believe that it could be – um – you know – very individual way of thinking about mathematics. I believe that – uh – most mathematicians are much better with actual proofs – uh – than I am. But it is just my individual believe that that's what goes on in reality.

EMH: Can you make any sense of the term 'formalizable proof'?

Interviewpartner 5: Well – yes, this is – um – this is more or less maybe this – this story I have been saying about this inf – very informal student – very informal person – or, there are well respected mathematicians which – which are like this. I think it – you see – it very much depends on – both on style of mathematician, on a personal – uh – well – temper maybe – uh – it – attitude of particular mathematicians, but also – uh – it – uh – depends on the field – uh – on the field in mathematics, where – uh – in some fields, uh – proofs are very close to be – uh – very close to be formal proofs, so – uh – and – and this would be – field where you can do calculations from the beginning to the end – and – uh – usually algebraic calculations. And – and there are much less formalizable fields where – uh – well, usually would think of geometry – where you really have to operate with very complex shapes, and rely on your – uh – geometric imagination – well, doesn't have to be geometry and algebra – um – but – uh – well, few years ago there was the millennium lecture by Michael Atiyah – uh – were he – uh – expressed some of his ideas about – um – different approaches to – uh – to how to do mathematics, and how to – um – get results – um – which in the end – um – always are called theorems in mathematics, and he says that there is a way – there are two sort of diametrically – um – well, two opposite approaches to – to this. One is algebraic, and one is geometric. And, algebra – you do algebra when you need lot of time and almost no space. Which means, when you do on a small piece of paper, you do calculations step by step with the aim to finish at a certain figure or certain combination. And the – um – opposite approach is – is geometric one, and – which needs space, and no time, and – space, you need to see a picture – uh – just once, as a whole. And – and this just comes to you as – as a holistic picture with – and you see that – that it is right. And then you know that – that there is the theorem behind this picture. But to work out this theorem, you would need algebra. So you would need time to – to put it in these details. But both are present in every day mathematical work, but can be present in different people in different combinations. And, also it's present in different proofs in different combinations, and in different fields of mathematics. And, uh – so for example – uh – physicist, or mathematical physicist, who are very close to mathematicians. And mathematicians often – um – sort of wander into these areas where physicist work. And – uh – what is a proof for physicist is not a proof for – for mathematician. And – and so there is a similar – uh – scale inside the mathematical community. Or – but somewhere, in the very – on the very, maybe bottom or very top of this scale, there are proofs which are hundred percent correct, and – uh – hundred percent formal proofs. But I suppose that these would be proofs of very simple statements.

EMH: Would you still call proofs that are somewhere in between these two extremes formalizable? Would you say that, in principle at least, all mathematical proofs that are accepted are formalizable?

Interviewpartner 5: Well, I personally – uh – believe that real proofs – uh – I mean, proofs of real mathematics, mathematics that are of interest to people, and not – not just test examples or – uh – high school examples, but real – um – mathematics that people work to extract knowledge. Uh – the – uh – I don't expect that to be formalizable – um – well, in real terms. Well, when I say 'in real terms' – well, this – um – yeah – well, it is – you know, what – what I'm saying is probably not quite mathematically correct – uh – statement – well, I'm – I'm not trying to say 'mathematically correct statement', it is more like I'm trying to formulate my individual philosophy. And, as I – as I already said, my philosophy is that – um – even if it is possible in – in theory, uh – which – uh – but, even this I doubt – uh – I don't think it is – it – it is clearly impossible in practice to put anything real in a formal – um – well, in – in a formal proof. It is – well, let me – let me just compare it to – um – another quite similar situation. It is – so – um – to – to check the correctness of – of mathematical proof, it is like – um – to write down a software program that operates, in this case, some complex system. And – uh – you can certainly do it in practice – do such thing in – uh – in practice – and – uh – it will work, and – um – if – if your mathematical practice – uh – if your system worked on – on something which – which has only finitely many – um – combinations in it, then you can be sure that – you can – you can feel that you can check at least it – verify, that in the end, it works as – as it must. But you know that in practice, there is always room for small errors, for – because it is many people working on this – and it is – it is multi-layer system, that, even if you are hundred percent sure in these last steps that you yourself has done, uh – you used someone's – um – previous small blocks and statements, and – um – whether you understood the meaning of this in the same way, or there ways a slight difference in understanding and at some later stage, you have to – um – if you are going to do it really seriously up to the end, you have to clarify, you have to formalize this thing and that thing and so on. So, there is always a room that – that your system, your software, that – um – you know – takes care of how the airplanes – um – fly and so on, have – have a probability of having some error inside, which – which each of this error could be corrected, and basically it is a correct system. But – um – correct in the same way as – you know – this – this complex system written down by – just by – maybe hundreds of people. And – and it is written down as a formal system, one by one, and each of this can be checked and understood. But altogether it is above of our – um – ability to understand.

Transkription von Interviewteil II — 0:00–23:43 min (Fragen zu Szenario 1)

Interviewpartner 5: *Zwischenkommentar in der Pause:* I don't know – maybe it is quite – uh – arguable what – um – what I answered. Uh – yeah, I think that we – we still do believe that – uh – or we – um – maybe I – I shouldn't think of myself as a mathematician if I don't believe that the proofs are formalizable. I think – uh – I think – uh – we act on assumption that the proofs that we produce – that they are formalizable. Although – uh – of course – uh – formalizable not in real time. That's probably more – uh – honest answer. Or maybe more – more true answer.
EMH: (*Fortsetzung des Interviews*) In this first scenario, the more general issue is that of refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. Do you have any additional comments on this general issue?
Interviewpartner 5: Well, it is – it is – um – in agreement with – with – uh – well, I tried to fill in these boxes in agreement with – with what I said later that – uh – you know – even if it is a refereed paper – uh – that – uh – went through all the right procedures – uh – one cannot be – um – hundred percent sure that – uh –that it is correct that – uh – some people say that final responsibility lies – lies with author. And in the – uh – in the depth of his or her heart the author feels – uh – if – uh – if everything is ok with – uh – with a paper – uh – and must know – um – if – um – if there is someone that he hasn't checked properly – uh – hasn't tested maybe properly. Um – yeah, so – so this sort of story – uh – absolutely doesn't surprise me.
EMH: You mentioned before that you were not sure about how to interpret the questions, this 'know'. What interpretation did you choose? Did it change for some scenarios?
Interviewpartner 5: Yeah, as I said – uh – yes, so – um – I – I would – I replaced this verb 'know' by the word – uh – 'believe'. That – uh – that – uh – at various stages of

– uh – of – proofs and – um – of the proof process and – um – presentation of results – um – you have this feeling that you believe – and some mathematicians just say this that – um – I believe in this statement – uh – I – I buy this – um – statement or I do not – and – uh – yeah – so – so for me, this – this scenario shows – um – it is a possible scenario of how it can develop that – uh – how it – uh – a change of mood that you start with firmly believing that now you know why it is true and – um – and then the next moment you have doubts and – uh – although you see formal – um – lemmas and intermediate – um – calculations seem to be working, you – you start feel that – that something is wrong maybe with picture or – um – with – with some details that – um – might be more complex than they looked – um – initially and so on.

EMH: Which point of view did you take when you answered? Did you take John's point of view or did you take the point of view of an external observer?

Interviewpartner 5: Yes, I think that I – um – I interpreted this ques – this questions as asking about John's point of view. That – uh – if I were in his place, and – uh – what my feeling might be in – uh – in this stages of the process.

EMH: [beschreibt die Resultate der Umfragestudie zur Schlüsselszene von Szenario 1] Could you say a few words about why you answered exactly this way [zeigt auf Profilkurve von Cluster 2], and then tell me if you think that the other ways of answering [zeigt auf Profilkurven von Cluster 1 und 3] are still plausible, or even inconsistent in your view?

Interviewpartner 5: Well – uh – you see – the main difference is that – yeah, actually, the only difference with the first group [entspricht Cluster 1] is that in the – in the answer to – uh – the question that – uh – after the counter-example has been found that – uh – does John know that the conjecture is false. Um – I don't think that he – well, I would necessarily believe immediately that the conjecture is false. I think that – um – what – what might happen in – um – in cases like this is that – uh – that the theorem – say, can be salvaged at this – that – it might be that the conjecture is false as it stands. But – um – so, this – the counter-example – we should look closer at the meaning of counter-example, work on – on this, and – um – and see if – um – maybe – maybe there were two different ways of formulating this conjecture – uh – and sometimes – well, some statements can be – uh – false – um – in – in their formal interpretation, but – um – in the way what – what you really want to know about the things they – they can be and should be corrected. And in this form – uh – they're right. So, if – uh – you know – if the theorem has – has some history, if – if it is not just – as it looks in this case, that some statement that – uh – really – that actually nobody worked with, so rather sort of superficial statement which has answers 'yes' or 'no' and that's it, then of course this is probably what – what should be right answer. That once you have shown a counter-example then you give up and say 'that' – uh – 'that's it'. But if – if it is really – uh – deep – um – statement, and really deep theorem that was the proof of this conjecture which by the sound of it it must be because it is something that – um – well the conjecture was worked for many years – um – is it – yes – um – well, in this case it doesn't say – so, fifteen years was in the – well, anyway, if – if we think of it as – as a – something that has history and – uh – has a deep content in it, then this often can be a case that something can be salvaged from – from – uh – from existing proof. Right – so, now you also wanted – um – to – um – to say how I see this yellow [entspricht Cluster 3]?

EMH: Right.

Interviewpartner 5: Well – uh – I – I see the meaning of this answer in that – that people – maybe by answering so, they just – they interpretation of what 'know' means – what does it mean that John knows – that, he falsely believes that he knows, but – uh – in fact the – he didn't know. Because for – uh – for mathematicians who answer – who think in this way, to know is to have a real proof. And so, if – if the proof was incorrect, if the proof was – um – deceptive, then actually John didn't know what – what he was doing. Yes, but, as I said, I – my interpretation was that John sincerely believed in – and – um – yes, so, this is just about the meaning of this word 'know'. I know of these mathematicians who – who – uh – firmly believe that if a mathematician worked on a theorem and – um – finished the proof, and says – um – 'that's the proof' – uh – 'the final point in the proof, and now I know that this is correct, because I – I finished the proof', and I think it is very naïve to – to think that – uh – this is the end of – uh – of the process. Uh – it – it would never be true for – for human beings. And – uh – moreover, I – uh – of – of these examples – um – in – in my life experience, of these people, who – um – whom I also respected for – for their firm stance on – on this – that if mathematician says 'yes, this conjecture is true', then it can only be based on – on his hundred percent correct proof, and this mathematician never makes mistakes. And then – um – five or ten years later, I – I just found that – um – the same very respected mathematician published – um – a incorrect proof, which was just proof of false statement, that – and – um – you know – this is just ordinary human story. So this is the difference between interpretation of 'know'.

EMH: There is another issue behind this scenario: proof by counter-example versus more or less direct proof. When you find that a theorem is not right as it stands by showing a counter-example, do you think that is a better warrant than showing that a theorem is correct by proving it directly?

Interviewpartner 5: Proving that the theorem is not correct? Uh – what – usually – in – uh – also in formal terms, 'statement A is true' or 'statement A is false', both are – uh – statement about validity of something at the same level. But – uh – in – in practice – I mean – in fact, these can be different quality of – of statements. Usually, what people call theorem it is some – some universal statement. And counter-example – uh – gives a particular example when this universal statement fails. So, in this sense they are not – um – at the same level. But – uh – it also is true that usually – yeah, counter-examples is easier to believe. I think first of all because they are much more concrete – um – usually. Um – so you – uh – it – it is a kind of things that you can – uh – touch with your hands and check it – um – just by turning it over – [. . . (undeutlich)] into it from each side, and – and so you see it as a concrete thing. And theorems – uh – as opposed to this is – is usually more abstract statements and so more difficult to – to prove – to check. Because you – you have to give argument that shows that whatever examples, it is always the case. Um – so – yes, but – uh – yeah, the issue of counter-examples or examples are – is – is – yes, of course is quite important in mathematical practice in the sense that – um – it is – gives you confidence that – um – that it – because it is more concrete level of checking – well, in this case falsity of some statement. But – uh – yeah of course there are theorems that sound like – um – there is something that has certain properties. And to prove such thing, you really have to produce – uh – a counter-example or series of counter-examples with this property – um – yes, and when it is – when it is a different – difficult thing, it is usually also difficult to – to check that this – um – the – the submitted – uh – counter-examples they possess all these properties that were promised.

EMH: One comment I got on this scenario was: 'How important is the Jones conjecture? How large is the community?' What do you think about it?

Interviewpartner 5: Yeah, well, it is uh – yeah it is – it is – agrees so – to – with one of the things that – um – I commented on this except – uh – see, it is – it's probably the same question as – uh – if this has been digested in this five years, or even more, which made – uh – this – uh – former student John – um – established mathematician – if it – if it has been digested by – by broad mathematical community, and – uh – so – so, this is exactly how – how broad this community is, and how deep this interest – uh – to – to this conjecture that has been proved. So, you see, if – if today someone – well, ok, let – maybe we can go back several years when the solution of Fermat's – uh – problem or proof of – uh – Fermat's theorem – uh – has been – um – announced – was announced – uh – yeah, of course – of course it is – so many people tried to – um – understand the content of it, although – I don't know – three or four really could – uh – read it, and then the – the rest just – uh – believed – uh – people who – who claimed that they checked the proofs. Yeah, so – so I think – I think this is the essence of this comment, is – is – it is about – you know – the real process of – um – testing – um – the validity – checking the validity of – of a statement – of – of theorem is not just that is has been accepted for publication, it – it went through a process of refereeing, but – uh – how many people really used it – really looked into it – uh – and adapted it for their purposes – uh – yeah that's – um – and this is the same sort of comment.

Teiltranskription von Interview 6

- Durchgeführt im Januar 2008
- Gesamtdauer: 1:41:26 h

Transkription des Interviewteils 13:10–35:55 min (allgemeine Fragen)

EMH: Do you have any comments on the scenarios, or any comments generally concerning your way of answering?
Interviewpartner 6: Yeah – so – um – it occurred to me that – that – um – that it's – it's actually not completely clear to me what your – what your possible answers mean. Maybe – um – so – so let's look at on of the questions. So – and – and so maybe we have to do it all over again. So, 'Does John know that the Jones conjecture is true?' and then – um – then – I – there – so there are two possibilities – I mean – he either knows that the conjecture is true, or he doesn't know that the conjecture is true – and – the – then this is giving like a probability distribution that I add to one of these two possibilities, and the other possibility is that– that there is like a continuum from – from – um – knowing and not knowing, and that I'm sort of placing here at a point in this continuum. And I have all interp – give the interpretation it in the sec – in the second way. But I realize that you might mean it in the other way, and – and – I mean that your – that your question is actually asking the other question. So – um – so that – that somehow – um – although even John may not know this – but – like knowing is something that is completely abstract, that sort of – you know – is a state that a person is in without maybe knowing it that he is in, and then – and that you ask me in what state is – um – is – is John here – and – and then I give like a probability of being in one state or the other, and – so I don't know what – what your – your – this is not so clear from – from the scenario what you – want to do here – um – yeah – o.k., but anyway – so – so, I – my interpretation is that – that there is this sort of continuum from knowing something and not knowing something whether it is true and – um – and that – that I have put it, or I think it should be.
EMH: No, I'm absolutely fine with this.
Interviewpartner 6: Oh yeah, sure, but – I –
EMH: It's just finding out about your own interpretation.
Interviewpartner 6: O.k., yes. So that's my interpretation, that – I think – that – that was – was good to – um – to clarify maybe, and – um – yes, and apart from that I – I sort of can recognize all the scenarios. Uh – uh – I also realize that with the student scenario – um – I think – there's – there – I realize that I make quite a difference between sort of –

you know – um – knowing mathematics as a – um – as – uh – knowing the mathematics that has been established, like – you know – we know that – um – the moon is – uh – is a big rocky ball, although I've never been there, and as far as I'm concerned it could be a cheese, but – it's sort of – you know it's – it's sort of cultural heritage and – and that's kind of knowledge that is – that makes it sure, while with the – the more research kind of way it is adding to this body of knowledge, which is a quite different – um – aspect, I think – I mean – then – uh – yeah – that's – I mean – then you are really sort of putting a brick on the building, and – and it's something else than knowing that the bricks are in the building – yeah. Ok, so – so that – that sort of – there knowledge is something – uh – is quite – um – I th – yeah, that's different, I think. For instance, I – I know that certain theorems are true, although I certainly don't know – um – the proof of them, like – I don't know – Fermat or something – I mean – I mean, I – if you say 'Is Fermat's Theorem true?' I say 'yes', if somebody writes me a paper as a editor of a journal or whatever, you have – and – and usually, if it is some – you know you have these [cranks (undeutlich)] – they send you a paper that they found a – uh – a simple counter-example – um – then I almost throw it away, without looking at it, right, because I know this is – this is going to be nonsense. If something el – I mean – on the other hand, knowing my own – the things I've proved myself, I have sort of a much more delicate opinion about it, because I know that we make errors, and that I made errors, and that – that we have to correct them again, et cetera, and [sometimes (undeutlich)] you cannot correct them, like with this counter-example to the Jones conjecture – and – ok, so – yes, that – I think that's sort of the comment – and – uh –.

EMH: Did you ever experience a similar scenario?

Interviewpartner 6: I – I have published a – a paper with an error in it, yes. So – um – and I found out – uh – or – or somebody wrote me about it about a year later or so, and then it was clear that it was an error.

EMH: And what happened then?

Interviewpartner 6: What then, I said that was an error, and – um – I mean, I – I wrote to this guy that he was completely correct, and I think, in a later paper I – I made a referral to this that it was – uh – not correct – it was not very important but it was – it was wrong, yeah.

EMH: Ok.

Interviewpartner 6: And – and more often – I mean – so – so – um – what you – uh – this – this was actually when – when doing my PhD thesis, and you learn from this – from this kind of things that you should be – um – or, of course everybody know – a – a second year student knows that he should be careful, but – um – you learn something about the – uh – yeah, the way to be careful, or – or rather – the – the way that you have to understand something before you – there are several sort of levels of understanding in mathematics, I think. You can sort of – if you see a proof then you can sort of – it – start reading it, and say ok, is it all – can I understand all the co – the – the implications. And – um – and this can be very clear, or can sometimes be a little bit blurred in that you are on – on the point of sort of believing it right – I mean – it's rather than – than – actually seeing it, and – uh – if you ever write – write a paper yourself then – then all steps should be on the level of completely seeing it, and not sort of bel – so – so this picture story is – is a little bit shady, right. In some sense he sees it, but then, apparently, not really – yeah. O.k., so – um – and, of course you also under – experience more or less what this – this student experiences all the time, that you think, especially with things that you are not – I mean – your own expertise, you – you sort of know at – at – hopefully know at the deepest level, but – but even there, you – you sometimes see that you actually find out that you never looked at it in a right way, and should sort of – I mean, that's what progress comes from, that you realize that you should look at it in a different way. And, with things that you are in the – in the process of understanding – um – it happens that – that you have – um – a definition, and that you think you understand it, and that you come back to it for one reason, or somebody tells you something about it, and that you realize that you never understood it at all but now you understand it, at least that's what you think, and then maybe this happens three times with the same definition, so – yes. And that's what – I think that's what happens with – in your scenario with – uh – with Tom, I think, because he – well, I mean – apparently, he – he learns it – I mean – he – he learns it pretty well, he knows the details, but he maybe learned it by heart rather than by – by really understanding what's going on, and – and – although he maybe thought that he was understanding what is going on, but apparently he didn't, in the sense that he could not apply it to a theorem T2. And – and now he has a better understanding of it, that's for sure. But, if you come up with theorem T3, which can be proved – I – it's not clear that he can do now everything that can be done with it, or that – that his – his professor can do with it, yeah, that's the way it is, right? Ok – yeah, so – I think.

EMH: What do you mean when you say 'formal proof'?

Interviewpartner 6: Huh – formal proof, uh – yeah. [lange Pause] What do I say when I say – um – actually, I don't think I ever used that phrase. And – um – you know – let – let me try to give sort – sort of a – a formal proof is a proof – or, I would consider it – um – maybe where – let me explain what I would not consider a formal proof. A proof where – where there is somewhere in the sentence 'it is easy to see that' or 'it is left as an exercise to the reader that' is not a formal proof. And – um – so – yeah, I would say

– a formal proof is – is a proof that every – um – let's say, everyone working in the field from graduate students – or maybe even master students – um – would recognize as a correct proof. And – um – I mean, this is probably not a definition that you can really do something with, but – but it's – it's – it works very – yes, so – so, I think a proof tries to explain why the theorem is true, or why the author thinks the theorem is true, and – and so – so, I think, I – I would rather say what is a good proof than what is a formal proof, but – um – yeah, I think – I know about this – this sort of computer aided proofs that are terrible, and – um – they're probably quite formal – so, I mean it – I think that is a formal proof, and first of all I know nothing about this kind of – um – things, and second I think that it is completely useful – useless for – for serious mathematics, but – um – I mean – writing 20 pages to prove the Pythagorean Theorem is sort of – in – in – things that are – maybe – well, you know – um – formally computer checkable et cetera – uh – I don't think that's a useful thing, but – who am I.

EMH: Can you make any sense of the term 'formalizable proof'?

Interviewpartner 6: Yes, so, that is maybe – that would be then my def – my good proof. Yes – um – but I – I wouldn't say – no, I think I – I – um – of course that – that – that would mean a proof that could be made into a formal proof – I mean, for which you could figure out an algorithm to – um – to make it a formal proof, and – yeah, I'm not really sure that – maybe, if you – if you come back to what a formal proof would be, it is like – um [lange Pause] – yeah, so – so I – uh – I – I think about what I learned about computer programming long time ago, that – um – that sort of a computer language – um – as these rules – like something – can be something or something else etc., and then – um – then a correct programme is – is – uh – a statement that – that through all these rules can be reduced to sort of the empty statement – the void statement, and at some point of this process maybe the printer goes on and – and – the zeros of the Riemann Zeta Function are sort of put out this printer, but the – the correctness – um – of the programme comes from the fact that these rules eventually end up with sort of – the empty set, and in some sense that is maybe also mathematics, that if you really understand it, it turns out to be nothing at all. Um – but – so, then a correct proof would sort of be – um – a set of logical – I mean a – that would give you a set of lo – logical operations, or rules, or sort of – you know – reduction rules, and then – then it would be a statement that – that – so, formalizing this proof would be the whole – the formalized proof would be the whole reduction of the statement of the theorem, through all these – you know – these rules and – and – you know – bringing in the axioms et cetera, to something that would be empty set in the end. And, if – if – of course nobody does that, and a f – and a – um – and then a formalizable proof would be sort of a proof that would help ordinary people to do this process, in the sense that it is maybe not clear if you have the – the statement of the theorem, and you have all your rules and regulations of what you can do at any time and you can go – uh – off at infinity, and there's sort of a track you have to run, and this track is not clear at all – I mean – you could sort of – um – write down the – the – I mean, you have all these jokes about the decimal – um – development of pi, right, that if you go long enough that you find all of Shakespeare's work in it – in there, and so, in that sense – doesn't – I mean, the fact that – that it's there doesn't really help you very much. If you have to do all the decimal – uh – evaluations of pi, and go slightly further than – than the number of el – of particles in – in the universe to the power of number of particles in the universe or something like that. So, that doesn't really help you, but – so – but in some sense – so, then a formalizable proof would be sort of a proof that would reduce this very much – uh – so – sort of set of rules that you would be able to get at this formal things in – in sort of – well – finite time, in – in the sense of – of – um – years or something.

EMH: O.k.

Interviewpartner 6: Yes? O.k.

EMH: Would you say formal proving played a role in any of these scenarios?

Interviewpartner 6: No. Certainly not. Otherwise they would have known it for sure – all the time. If they had – if they had been able to give a formal proof. I – I think actually that – that if you – if you take any theorem here it's impossible to write down a formal proof – I mean – humanly speaking. Maybe it's sort of possible to – to write a programme that will write [that formal proof it consist of two .. (undeutlich)] – I mean – but – yeah. O.k.?

EMH: When you take your definition or your notion of formalizable proof, would you say all accepted theorems in mathematics have formalizable proofs?

Interviewpartner 6: Um –

EMH: Or, all accepted proofs in mathematics are formalizable?

Interviewpartner 6: So by accepted you mean sort of – you know – it's published and everybody thinks it's true?

EMH: Yes.

Interviewpartner 6: Um – yes – um – probably not. I think actually that – that there – there must be somewhere something that – that all the people who have thought about it believe that it is true and it's actually false – I – I think that happens – so – so although it is acc – I mean there are examples in – in the history that people believe that – that certain – for something like 50 years that something was right, and then found out that it was wrong after all, and – so – I – it – it cannot be that all proofs are formalizable. If

formalizable actually means that – or – if formalizable proof – uh – assumes that – that the theorem is true [lacht] – uh – then – uh – then it can't be true – yeah.
EMH: Ok.
Interviewpartner 6: But I think they look like formalizable proofs, that is – that is – I mean.
EMH: How do they do that?
Interviewpartner 6: I don't know – I don't know how they do that, but I – I – so – so I think that all the people who have looked at these proofs think they are formalizable. And – and so they sort of look like formalizable proofs, but I'm not sure how – how that – does, but – so – so the – the people who look at it say 'O.k., this – this I think is – is proof, or could be made into a formalized super-proof', but maybe they are wrong – I mean – sometimes they must be wrong, and – um – yeah. Right?

Transkription des Interviewteils 36:08 min – 55:00 min (Fragen zu Szenario 1)

EMH: I would like to ask you about the general issue behind scenario 1: it is refereed proof as a warrant for mathematical knowledge. Do you have any comments on this general issue?
Interviewpartner 6: On ref – on referee – ? [unterbrochen]
EMH: Refereed proof, yes.
Interviewpartner 6: Well – um – refereed proof does – does not say everything – um – it just means that somebody has seen the paper, and if it is done correctly, he actually went through the proofs and he believes that it is true, and – and this is very much biased by – well – let's say, the human factor. In the sense that – um – let's say – [a famous mathematician (anonymisiert)] published a – comes up with a paper, and I have to referee it – which is not very likely because I'm not really in his subject but – you know – somebody – in fact that is – that would be the – the – so, I'm sort of at the border of this subject, and [he (anonymisiert)] writes the paper, and sends it to this journal, and then I'm already preoccupied with the fact that [he (anonymisiert)] is a very well known mathematician, and so that it probably will be o.k.. And then, I also know that sometimes it goes outside of my expertise, and then I have to – um – uh – well, you know – there – these things where you start to sort of 'yes, this – this really seems plausible, but I'm not really sure if it's true' – um – and then – then – you end up with the question 'O.k., so, is this because – um – I don't have enough knowledge, the – that I – or should he explain this?' and then, maybe I write 'Well, you know, maybe he should explain this a little bit further', or maybe I don't write this, and maybe it's wrong. And so – um –

there's this – this whole – yeah. And then there's the time pressure, so – I mean – you get this, and you have all this – this stuff that you have to do, and then they ask you to write – to – to review this 50 pages paper, which you are sure that if you are really going to check all the details that you are sort of 'O.k., that – that's probably o.k.'. Then – um – yeah, so you – you – you have a tendency of believing that, and then besides you – you always think 'Well, you know, he's publishing it, not I, so it's his responsibility that it is o.k.', and – um – so, well. So, the – in – ideally, the – this referee has nothing else to do, he knows the subject better than the guy who wrote about it, and – um – and he will sort of look at this, and – and study it, and say 'Yes, this is – this is all correct' – I mean – now we are only discussing the correctness part, right? Not whether it is worth publishing in the paper – in – in this particular journal, which is a quite different question. But – so – so let's first consider whether it is sort of – if – if the referee thinks it's true. And in fact, the referee is – is at best – um – sort of similar like the author there. So, instead – so, if the author publi – uh – thinks it's o.k., it – I think – well, let's be pessimistic, it has a probability of 95 % to be o.k.. And so, if then the referee goes over, then he thinks it's also ok, then this – this is also, generally speaking a probability of 95 %, so, altogether – you can multiply this or whatever – uh – you have a big chance that it is fine. And that is basically how it works, I think – um – but, it's – it's never – it's never going to be – uh – full proof. I don't think it does exist, actually. Although there are many things that are full proof, but it's a little bit like – you know, with – with – um – with medicine that are tested, and they are pretty strict about this, so you – I think you have a nine – something like – if something is – is admitted you have something like 99 – maybe point 9 % chance that it is working actually – I mean, at a test, which means that if you have some – how many medicines do you have in – in – on the market, tens of thousands – so there must be at least some hundred that are [lacht] not working at all. And so – I – this – this is the same with – with this referee. Is th – is this answering your question [worth (undeutlich)]?

EMH: Yes. [beschreibt die Resultate der Umfragestudie zur Schlüsselszene von Szenario 1] Would you explain a bit why you answered this way [zeigt auf Profilkurve von Cluster 1], and then say something about what you think about the other way of answering [zeigt auf Profilkurve von Cluster 3] in this case?

Interviewpartner 6: O.k., so – [Pause] yes, I – I think this is not really – I mean – here, it is – this is – this is after the – the – so, this is when the paper is published right? And so, here he believes – everybody agrees that the answer is that John sort of *knows* – I mean – whatever you mean by knowing, but if you ask John here 'Is the theorem true?' – or 'Is the conjecture is true?' then he will say 'Yes, I proved this', and he will even say this on the morning of this talk, I believe, so – so that's why I think that on the morning of the talk, nothing has changed – I mean – something changes in the talk with John, poor John, but – um – but so, I would say that at this point, he still believes it. Of course you can say that – yeah, can you say that? [Pause] If you believe that some – that you can only know something if it is true, then of course he never knew it, because – but then it is – then you should say always – uh – the – then you should sort of look back here and said 'Well, he thought he knew it, but he didn't know it because it was not true' you should have said this at – at every stage, I think – uh – unless that – that here, so – or where this – this – this is – um – where it ends, but – um – yeah – hmhm – yeah, but so – so, I cannot – I could imagine that people would say 'Well, you know, knowing is something that – um – um – yeah, what is knowing, right? [lange Pause] – hm – ok, so – so – in – in – so, look – with – with hindsight, you would say that – that he never knew it unle – until this moment, and maybe he doesn't even know it now, because it's still possible that, eventually, the conjecture is true, and – but with a different proof maybe, and – um – um – this is kind of missing in the scenario – I mean – he constructs a counterexample, but did he – did he find the error in his proof?

EMH: It's not said.

Interviewpartner 6: It's not said, right? Um – I mean – that is what I would – I – yeah – o.k.. Anyway, it's like asking if the people in – in the year of thousand – if – did they know that the earth was flat? They were certainly convinced that it was flat, but can they – can you know that the earth i – is flat if it is not flat? And that's a little bit what's goi – I mean – it's li – more like what 'knowing' actually – I mean, can you now something that is not true? This – uh – yeah. And so, if you believe – so, now we say 'Well' – ok, at this – at this moment, we say 'In the medi – medieval ages, people didn't know that the earth was ea – was round', but we never say 'They knew it was flat', somehow. I mean, this – this – although, I think if you would asked – have asked – you know – I don't know who you would have to ask, but – you would have asked people in the medieval ages, they would have said 'Yes, we surely know that the earth is flat', if – if they were that convin – convinced. And so, this is a little bit playing around here also, because – um – yeah, well – but anyway, so – so, I think I can – I could imagine if you say 'Well, you know, he never knew it', so – um – 'because it's false so he cannot know it', and then you should have answered it all 'no' – so, in some sense – yeah, I'm not really know about this – um – but if you put yourself in the position of this – this John, then he – then – and you ask him, which is probably the only way to find out what he thinks, then he would say that he knows it. And, if you say 'Well, but suppose now that in ten years, somebody finds out that – that there is an error', then he said 'Well, then I was wrong, but I think there's no error and I know it'.

EMH: So you put yourself in John's position all the time when you were answering?

Interviewpartner 6: Yes, when I – when – when I – um – yes, although, if I would have looked to the whole – uh – list in advance, I would say, well, you know – then – then I would sort of put myself in – in the position of John – uh – at this moment of time, and I would say, well – then – then even John say 'I never knew it – I – I thought I knew it, but I never knew it', and then I would come up with – with 'no' all the time.

EMH: Is this also true for the other scenarios, that you took the point of view of the protagonist of the scenario?

Interviewpartner 6: Yeah, I think so, yes.

EMH: I've picked out one comment on scenario 1 from the survey results: 'How important is the Jones conjecture? How large is the community?' – what do you think about this?

Interviewpartner 6: Yeah – the Jones conjecture – I would say that – that – well, the way you s – a world famous expert on holomorphic functions – I would say – three hundred people, at most, maybe two hundred, maybe even [... (undeutlich)] – depends a little bit on how you define the community – but, to have three hundred people – if you are a world famous expert on something – even Wiles cannot get – yeah, three hundred people would be sort of [the max (undeutlich)], I think.

EMH: In which way is this important for judging the way of answering in this sce.. ? [unterbrochen]

Interviewpartner 6: For this scenario – um – o.k., so, it makes a difference if – if – um – so – so, you know – there – there's all this – this statements about – first Jones is a – is a world famous expert, so – so it means she's teaching in – uh – I don't know, Harvard or something, that's what you think of, and then you write that it is send it to a – uh – mathematical journal of high reputation, so it's send to *Acta Mathematica* or something like that, and so it's – it's – it means that – this – this describes something about the size. You cannot be a world – uh – famous expert on something that nobody else does. And it also – and the size – you know – this – uh – I – I believe in [it's su... (undeutlich)] – that – that there is this probability going on, so it means that – that it – went to a good journal means that the journal thought – uh – of looking for good referees, maybe sent it not to one, but just – but to three referees, and – um – and they all looked at it, so – so it was established more surely than that it would have been sent to some journal of – uh – [a tiny mathematical society with very few members (anonymisiert)]. So, you – you – so – so, that – that puts the – the scenario in – in a framework, in – uh – and it makes it – makes it very likely that if it's accepted and – uh – the – the referee report is positive that it is o.k.. And of course it happens, even with *Acta Mathematica* sometimes [things are not right (undeutlich)], so – yes.

Literaturverzeichnis

[1] Aberdein, Andrew (2007), „The Informal Logic of Mathematical Proof“, in: B. Van Kerkhove & J. P. Van Bendegem (Hrsg.), *Perspectives on Mathematical Practices: Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education*, Dordrecht: Springer, 135–51.

[2] Azzouni, Jody (1994), *Metaphysical Myths, Mathematical Practice: The Ontology and Epistemology of the Exact Sciences.* New York: Cambridge University Press.

[3] Azzouni, Jody (2004), „The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice“, *Philosophia Mathematica* 12 (2), 2004, 81–106.

[4] Azzouni, Jody (2005), „How to Nominalize Formalism“, *Philosophia Mathematica* 13 (2), 135–159.

[5] Azzouni, Jody (2006), *Tracking Reason*, New York: Oxford University Press.

[6] Azzouni, Jody (2010), „Why Do Informal Proofs Conform to Formal Norms?“, *Foundations of Science*, 14 (1–2), 9–26.

[7] Bacher, Johann (2002), *Clusteranalyse. Anwendungsorientierte Einführung*, München: Oldenbourg.

[8] Bassler, O. Bradley, „The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective“, *Synthese*, 148, 99–133.

[9] Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (1983), *Philosophy of Mathematics — Selected Readings. Second Edition*, Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Berk, Lon A. (1982), „Hilbert's Thesis: Some Considerations about Formalization of Mathematics“, Dissertationsschrift, Massachusetts Institute of Technology.

[11] Bloor, David (1973), „Wittgenstein and Mannheim on the Sociology of Mathematics“, *Studies in History and Philosophy of Science*, 4 (2), 173–191.

[12] Bloor, David (1996), *Scientific Knowledge: A Sociological Analysis*, Chicago: Chicago University Press.

[13] Bloor, David (2004), „Sociology of Scientific Knowledge“, in: I. Niiniluoto et al. (Hrsg.), *Handbook of Epistemology*, Dordrecht: Kluwer, 919–962.

[14] BonJour, Laurence & Sosa, Ernest (2003), *Epistemic Justification*, Oxford: Blackwell.

[15] Bourbaki, Nicholas (1968), *Elements of Mathematics: Theory of Sets*, Reading, Mass.: Addison Wesley.

[16] Brandom, Robert, „Truth and Assertibility“ (1976), *The Journal of Philosophy*, 73, 6, 137–149.

[17] Brendel, Elke (1999), *Wahrheit und Wissen*, Paderborn: mentis.

[18] Brendel, Elke (2007), „Kontextualismus oder Invariantismus? Zur Semantik epistemischer Aussagen“, in: A. Rami & H. Wansing (Hrsg.): *Referenz und Realität*, Paderborn: mentis, 11–37.

[19] Brenner, Patricia (1984), *From Novice to Expert: Excellence and Power in Clinical Nursing Practice*, Addison-Wesley.

[20] Carston, Robin (1991), „Implicature, Explicature, and Truth-Theoretic Semantics“, in: Steven Davis (Hrsg.), *Pragmatics. A Reader*, New York: Oxford University Press, 33–51.

[21] Chalmers, David (2002): „Does Conceivability Entail Possibility?“, in: T. Gendler und J. Hawthorne (Hrsg.), *Conceivability and Possibility*, Oxford, 145–200.

[22] Chateaubriand, Oswaldo (2008), „Proof and Practice: Response to Norma Goethe“, In: Walter A. Carnielli & Jairo J. da Silva (Hrsg.), *Logic, Language, and Knowledge. Essays on Chateaubriand's Logical Forms*, *Manuscrito – Rev. Int. Fil.*, 31 (1), 387–392.

[23] Corfield, David (1997)„„Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics“, *Studies in History and Philosophy of Science*, 28 (1), 99–121.

[24] Corfield, David (1998)„„Beyond the Methodology of Mathematics Research Programmes“, *Philosophia Mathematica*, 6, 272–301.

[25] Corfield, David (2000)„Argumentation and the Mathematical Process", in: G. Kampis, L. Kvasz, M. Stöltzner (Hrsg.), *Appraising Lakatos — Mathematics, Methodology and the Man*, Dordrecht: Kluwer.

[26] Corfield, David (2003), *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge University Press.

[27] Cramer, M., Koepke, P., Kühlwein, D., Schröder, B., & Veldman, J. (2009), „The Naproche Project – Controlled Natural Language Proof Checking of Mathematical Texts", in: Norbert E. Fuchs (Hrsg.), *CEUR Workshop Proceedings*, Vol. 448, ISSN 1613-0073, http://ceur-ws.org (Zugriff am 11.11.2009).

[28] Cummins, R. (1998), „Reflections on Reflective Equilibrium'', in: W. Ramsey & M. DePaul (Hrsg.), *The Role of Intuition in Philosophy*, New York: Rowman & Littlefield, 113–127.

[29] De Cruz, H., Neth, H., Schlimm, D. (2010), „The Cognitive Basis of Arithmetic", in: Benedikt Löwe, Thomas Müller (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, London: College Publications, 2010, 59–106.

[30] DeRose, Keith (2002), „Assertion, Knowledge, and Context", *The Philosophical Review*, 111 (2), 167–203.

[31] Descartes, René (1641), *Meditationes de prima philosophia. Meditationen über die Grundlagen der Philosophie*, Hamburg: Meiner, 1992.

[32] Detlefsen, Michael (1992), *Proof, Logic and Formalization*, London: Routledge.

[33] Dreyfus, Hubert L. & Dreyfus, Stuart E. (1986), *Mind over Machine: The Power of Human Intuition and Expertise in the Era of the Computer*, New York: Free Press.

[34] Dummett, Michael (1973), *Frege: Philosophy of Language*, New York: Harper & Row.

[35] Dummett, Michael (1975), „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 80, 5–40.

[36] Ernest, Paul (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press.

[37] Esfeld, Michael (2005), „Normativität der Bedeutung und normative Wissenschaftsphilosophie“, in: Bernward Gesang (Hrsg.), *Deskriptive oder normative Wissenschaftstheorie?*, Frankfurt a.M.: Ontos Verlag, 205–223.

[38] Everitt, B. S., Landau, S. & Leese, M. (2001), *Cluster Analysis*, London: Arnold.

[39] Fleck, Ludwik, *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache*, Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 1980.

[40] Geist, Christian, Löwe, Benedikt & Van Kerkhove, Bart (2010), „Peer Review and Knowledge by Testimony in Mathematics“, in: Benedikt Löwe, Thomas Müller (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, London: College Publications, 2009, 155–175.

[41] Gesang, Bernward (Hrsg.) (2005), *Deskriptive oder normative Wissenschaftstheorie?*, Frankfurt a.M.: Ontos Verlag.

[42] Gettier, Edmund (1963), „Is Justified True Belief Knowledge?“, *Analysis*, 23, 121–123.

[43] Girle, Rod (2000), *Modal Logics and Philosophy*, Teddington: Acumen.

[44] Gödel, Kurt (1944), „Russels mathematische Logik“, aus dem Englischen übersetzt von Hans-Joachim Metzger, in: A. N. Whitehead & B. Russell, *Principia Mathematica*, 4. Aufl., Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 1999, V–XXVIII. Erstveröffentlichung in: Paul A. Schilpp (Hrsg.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, New York: Tudor Publishing Company, 1944, 125–153.

[45] Goethe, Norma B. (2008), „Revisiting the question about proof: philosophical theory, history, and mathematical practice“, In: Walter A. Carnielli & Jairo J. da Silva (Hrsg.), *Logic, Language, and Knowledge. Essays on Chateaubriand's Logical Forms*, *Manuscrito – Rev. Int. Fil.*, 31 (1), 361–386.

[46] Greiffenhagen, Christian (2008), „Video analysis of mathematical practice? Different attempts to 'open up' mathematics for sociological investigation“, *FQS — Forum: Qualitative Social Research*, 9 (3), Art. 32.

[47] Grice, H. Paul (1975), „Logic and Conversation", in: P. Cole and J. Morgan (Hrsg.), *Syntax and Semantics. Vol 3: Speech Acts*, New York: Academic Press. (Wiederabdruck in [48].)

[48] Grice, H. Paul (1989), *Studies in the Ways of Words*, Harvard: Harvard University Press.

[49] Grundmann, Thomas (2003), *Der Wahrheit auf der Spur*, Paderborn: mentis.

[50] Grundmann, Thomas (2008), *Analytische Einführung in die Erkenntnistheorie*, Berlin: de Gruyter.

[51] Hartmann, Stephan (2005), „Transdisziplinarität – Eine Herausforderung für die Wissenschaftstheorie", in: M. Carrier & G. Wolters (Hrsg.), *Homo Sapiens und Homo Faber*, Berlin: de Gruyter, 335–343.

[52] Hartmann, Stephan & Fahrenbach, Ludwig (2005), „Normativität und Bayesianismus", in: Bernward Gesang (Hrsg.), *Deskriptive oder normative Wissenschaftstheorie?*, Frankfurt a.M.: Ontos Verlag, 177–204.

[53] Heintz, Bettina (2000), *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Wien: Springer.

[54] Hesse, Mary (1980), *Revolutions and Reconstructions in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

[55] Hudson, Robert (1994), „Reliability, Pragmatic and Epistemic", *Erkenntnis*, 40, 71–86.

[56] Husserl, Edmund (mit e. Einl. hrsg. v. Klaus Held) (1985), *Die phänomenologische Methode*, Ausgewählte Texte I., Stuttgart: Reclam, 1985.

[57] Kaufman, Leonard & Rousseeuw, Peter (1990), *Finding Groups in Data*, New York: Wiley.

[58] Kitcher, Philip (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York: Oxford University Press.

[59] Klammer, Bernd (2005), *Empirische Sozialforschung*, Konstanz: UVK.

[60] Knorr Cetina, Karin (1984), *Die Fabrikation von Erkenntnis*, Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

[61] Knorr Cetina, Karin (1999), *Epistemic Cultures. How the Sciences Make Knowledge*, Cambridge: Harvard University Press, 1999. Deutsch als: *Wissenskulturen. Ein Vergleich naturwissenschaftlicher Wissensformen*, Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 2002.

[62] Koepke, Peter (2009), „Naturalness in Formal Mathematics“, eingereicht bei Calculemus 2009, Ontario, Canada.

[63] Kompa, Nikola (2001), *Wissen und Kontext*, Paderborn: mentis.

[64] Krantz, S. G. (2005), *Mathematical Publishing. A Guidebook*, Providence RI: American Mathematical Society.

[65] Kuhn, Thomas (1962), *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: Chicago University Press.

[66] Lakatos, Imre (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press. Deutsch als: *Beweise und Widerlegungen*, hrsg. von John Worrall & Elie Zahar, Braunschweig: Vieweg, 1979.

[67] Lakoff, George & Nunez, Rafael (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

[68] Larvor, Brendan (2001), „What is Dialectical Philosophy of Mathematics?“, *Philosophia Mathematica*, 9 (1), 212–229.

[69] Latour, Bruno & Woolgar, Steve, *Laboratory Life. The Social Construction of Scientific Facts*, Princeton: Princeton University Press, 1986.

[70] Leng, Mary, (2002), „Phenomenology and Mathematical Practice“, *Philosophia Mathematica*, 10 (1), 3–14.

[71] Leng, Mary, (2002), *Proof, Practice, and Progress*, Dissertationsschrift, Graduate Department of Philosophy, University of Toronto.

[72] Lenzen, Wolfgang (1980), *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit*, Wien: Springer.

[73] Lewis, David (1969), *Convention*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

[74] Livingston, Eric (1986), *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics*, London: Routledge.

[75] Löwe, Benedikt & Müller, Thomas (2008), „Mathematical Knowledge is Context-Dependent“, *Grazer Philosophische Studien*, 76, 91–107.

[76] Löwe, Benedikt & Müller, Thomas (2009), „Data and Phenomena in Conceptual Modelling“, erscheint in: *Synthese* (online veröffentlicht 2009).

[77] Löwe, Benedikt & Müller, Thomas (Hrsg.) (2010), *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, London: College Publications.

[78] Löwe, Benedikt & Müller, Thomas (2010), „Skills and Mathematical Knowledge“, in: Benedikt Löwe, Thomas Müller (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, London: College Publications, 265–280.

[79] Löwe, Benedikt, Müller, Thomas & Müller-Hill, Eva (2010), „Mathematical Knowledge as a Case Study in Empirical Philosophy of Mathematics“, in: B. V. Kerkhove, J. D. Vuyst & J. P. V. Bendegem (Hrsg.), *Philosophical Perspectives on Mathematical Practice*, London: College Publications.

[80] Maaß, Jürgen (1985), *Mathematik als soziales System*, Dissertation, Universität Essen.

[81] MacFarlane, John (2005), „The Assessment Sensitivity of Knowledge Attributions“, *Oxford Studies in Epistemology*, 1, 197–233.

[82] MacKenzie, Donald A. (1995), „The Automation of Proof: A Historical and Sociological Exploration“, *IEEE Annals of the History of Computing*, 17 (3), 7–29.

[83] MacKenzie, Donald A. (2001), *Mechanzing Proofs*, Cambridge, MA, London: MIT Press.

[84] Mancosu, Paolo (2001), „Mathematical Explanation: Problems and Prospects“, *Topoi*, 20, 97–117.

[85] Mancosu, Paolo (Hrsg.) (2008), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press.

[86] Mancosu, Paolo (Hrsg.) (2008), „Mathematical Explanation: Why It Matters", in: Paolo Mancosu (Hrsg.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press, 134–150.

[87] Manin, Yuri I. (1977), *A Course in Mathematical Logic*, New York, Heidelberg, Berlin: Springer.

[88] Manin, Yuri I. (1981), „A Digression on Proof", *The Two-Year College Mathematics Journal*, 12 (2), 104–107.

[89] Markowitsch, Jörg (1997), *Metaphysik und Mathematik. Über implizites Wissen, Verstehen und die Praxis in der Mathematik*, Dissertation, Universität Wien.

[90] Mates, Benson (1958), „On the Verification of Statements about Ordinary Language", *Inquiry*, 1, 161–171.

[91] Mates, Benson (1997), *Elementare Logik*, Unveränd. Nachdruck der 2., verb. Auflage von 1978, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

[92] Mayring, Philipp (2002), *Qualitative Sozialforschung*, 5. überarb. Auflage, Weinheim u. Basel: Beltz Verlag.

[93] Mayring, Philipp (2007), *Qualitative Inhaltsanalyse*, 9. Auflage, UTB.

[94] Meggle, Georg (1999), „Kommunikation und Rationalität", in: Herbert E. Wiegand (Hrsg.), *Sprache und Sprachen in den Wissenschaften. Geschichte und Gegenwart*, Berlin/New York: de Gruyter, 48–63.

[95] Moser, Paul (1991), „Justification in the Natural Sciences", *Brit. J. Phil. Sci.*, 39, 557–575.

[96] Moulines, S. Ulises (2008), *Die Entwicklung der modernen Wissenschaftstheorie (1890–2000)*, Hamburg: Lit Verlag.

[97] Mühlhölzer, Felix (2005), „Naturalismus und Lebenswelt – Plädoyer für eine rein deskriptive Wissenschaftsphilosophie", in: Bernward Gesang (Hrsg.), *Deskriptive oder normative Wissenschaftstheorie?*, Frankfurt a.M.: Ontos Verlag, 49–73.

[98] Müller-Hill, Eva (2008), „Mathematisches Wissen, Beweise und *Degrees of Proofness*“, in: I. Witzke (Hrsg.), *18$^{\text{th}}$ Novembertagung on the History, Philosophy and Didactics of Mathematics: Mathematical Practice and Development Throughout History*, Berlin: Logos.

[99] Müller-Hill, Eva (2009), „Formalizability and Knowledge Ascriptions in Mathematical Practice“, *Philosophia Scientiæ*, 13 (2), 21–43.

[100] Müller-Hill, Eva, Spies, Susanne (2010), „Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik“, erscheint in: M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel, M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven*, Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

[101] Muntersbjorn, Madeleine (2007), „Mathematical Progress as Increased Scope“, in: B. Van Kerkhove & J. P. Van Bendegem (Hrsg.), *Perspectives on Mathematical Practices: Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education*, Dordrecht: Springer, 107–117.

[102] Neurath, Otto (1931), „Empirische Soziologie“, in: Ders., *Wissenschaftliche Weltauffassung, Sozialismus und Logischer Empirismus*, hrsg. von Rainer Hegselmann, Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 1983, 145–234.

[103] Newen, Albert & Bartels, Andreas (2007), „Animal Minds and the Possession of Concepts“, *Philosophical Psychology*, 20 (3), 283–308.

[104] Newen, Albert & von Savigny, Eike (1996), *Analytische Philosophie. Eine Einführung*, München: Fink-Verlag.

[105] Nichols, Shaun, Stich, Stephen & Weinberg, Jonathan M. (2003), „Metaskepticism: Meditations in Ethno-Epistemology“, in: S. Luper (Hrsg.), *The Sceptics*, Aldershot, U.K.: Ashgate, 227–247.

[106] Nidditch, P. H. (1957), *Introductory Formal Logic of Mathematics*, London: Univ. Tutorial Press.

[107] Popper, Karl (1935), *Logik der Forschung*, Tübingen: J.C.B. Mohr, 1969.

[108] Prediger, Susanne (2001): „Mathematik als kulturelles Produkt menschlicher Denktätigkeit und ihr Bezug zum Individuum“, in: Lengnink, Katja,

Prediger, Susanne & Siebel, Franziska (Hrsg.), *Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik, Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft 2*, Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft, 21–36.

[109] Prediger, Susanne (2004), *Mathematik Lernen in interkultureller Perspektive*, München/Wien: Profil Verlag.

[110] Prediger, Susanne (2006): „Mathematics — Cultural Product or Epistemic Exception?“, in: Benedikt Löwe, Volker Peckhaus & Thoralf Räsch (Hrsg.), *The History of the Concept of the Formal Sciences*, Studies in Logic 3, London: College Publications, 217–232.

[111] Pritchard, Duncan (2010), „Contextualism, Scepticism and Warranted Assertibility Manœuvres“, in: J. Keim-Campbell, M. O'Rourke & H. Silverstein (Hrsg.), *Knowledge and Skepticism*, Cambridge, MA, London: MIT Press, 85–104.

[112] Putnam, Hilary (1992), „Brains in a Vat“, in: K. DeRose and T.A. Warfield (Hrsg.), *Skepticism: a Contemporary Reader*, Oxford: Oxford University Press.

[113] Rav, Yehuda (1999), „Why Do We Prove Theorems?“, *Philosophia Mathematica*, 7 (3), 5–41.

[114] Restivo, Sal (1988), „The Social Life of Mathematics“, *Philosophica*, 42 (2), 5–20.

[115] Rouse, Joseph (1991), „The Dynamics of Power and Knowledge in Science“, *The Journal of Philosophy*, 88 (11), 658–665.

[116] Sellars, Wilfrid (1968), *Science and Metaphysics*, London, New York: Routledge & Kegan Paul Ltd., The Humanities Press.

[117] Stanley, Jason & Williamson, Timothy (2001), „Knowing How“, *Journal of Philosophy*, 98 (8), 411–444.

[118] Steinbring, Heinz (2005), *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction — An Epistemological Perspective*, Berlin, New York: Springer.

[119] Steiner, Mark (1975), *Mathematical Knowledge*, Ithaca, London: Cornell UP.

[120] Steiner, Mark (1978), „Mathematical Explanation“, *Philosophical Studies*, 34, 135–151.

[121] Stenning, Keith (2002), *Seeing Reason*, New York: Oxford University Press.

[122] Swain, Stacey, Alexander, Joshua, Weinberg, Jonathan M. (2008), „The Instability of Philosophical Intuitions: Running Hot and Cold on Truetemp“, *Philosophy and Phenomenological Research*, 76 (1), 138–155.

[123] Thomann, Marius (2010), *Die Logik des Könnens*, Berlin: Logos.

[124] Tragesser, Robert (2000), „Gian-Carlo Rota and the Phenomenological Philosophy of Mathematics“, *Philosophia Mathematica*, 8 (3), 3–8.

[125] Vervloesem, Koen (2010), „Mathematical Concepts in Computer Proofs“, in: PMP Proceedings, 61–88.

[126] Wakin, M., Rozell, C., Davenport, M. & Laska, J. (2009), „Letter from the Editors“, *Rejecta Mathematica*, 1 (1), 1–3.

[127] Weinberg, J.M., Gonnerman, C., Buckner, C. & Alexander, J., „Are Philosophers Expert Intuiters?“, *Philosophical Psychology*, erscheint.

[128] Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand (1910, 1912, 1913), *Principia Mathematica*, 3 Bände, Cambridge: Cambridge University Press.

[129] Wiedenbeck, Michael & Züll, Cornelia (2001), *Klassifikation mit Clusteranalyse: Grundlegende Techniken hierarchischer und K-means-Verfahren*, ZUMA How-to Reihe 2001 (10), `http://www.gesis.org/Publikationen/Berichte/ZUMA_How_to/`.

[130] Wittgenstein, Ludwig (1953), *Philosophische Untersuchungen*, in: Werkausgabe in 8 Bd., Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1984, 225–618.

[131] Woodward, Jim (1989): „Data and Phenomena“, *Synthese*, 79, 393–472.

[132] Woodward, Jim & Bogen, James: „Saving the Phenomena“, *The Philosophical Review*, 97 (3), 303–352.