Mathematik IV für Studierende der Physik
Vorlesungsskript

Birgit Richter *
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/richter †

Hamburg, Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

*mit Dank an die Dozent*innen der Vorjahre
†Version vom 14. April 2026

1 Tensorprodukte und Differentialformen

1.1 Tensorprodukte

Wir wiederholen zunächst ein Konzept aus der Linearen Algebra.

Definition 1.1.1
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien V, W und X gegebene $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist eine $\mathbb{K}$-bilineare Abbildung *eine Abbildung*

$$\alpha\colon V \times W \to X,$$

die in beiden Argumenten $\mathbb{K}$-linear ist, für die also $\alpha(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda\alpha(v, w) + \lambda'\alpha(v', w)$ und $\alpha(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda\alpha(v, w) + \lambda'\alpha(v, w')$ für alle $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ und $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ gilt.

Damit ist dann für jede lineare Abbildung $\phi\colon X \to X'$ auch die Abbildung $\phi\circ\alpha\colon V\times W \to X'$ bilinear. Wir stellen uns die Frage, ob es für je zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W einen *universellen* $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \otimes W$ mit einer *universellen* bilinearen Abbildung $V \times W \to V \otimes W$ gibt, so dass *alle* anderen bilinearen Abbildungen $V \times W \to Z$ durch lineare Abbildungen $V \otimes W \to Z$ beschrieben werden können.

Definition 1.1.2
Das Tensorprodukt *zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W ist ein Paar, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \otimes W$ und einer bilinearen Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \kappa\colon & V \times W & \to & V \otimes W \\ & (v, w) & \mapsto & v \otimes w \end{array}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder bilinearen *Abbildung*

$$\alpha\colon V \times W \to X$$

gibt es genau eine lineare *Abbildung $\phi_\alpha\colon V \otimes W \to X$ mit*

$$\alpha = \phi_\alpha \circ \kappa.$$

Wir drücken dies durch das folgende Diagramm aus:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists! \phi_\alpha"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Betrachtung 1.1.3.

1. Damit ist die Theorie bilinearer Abbildungen auf die Theorie linearer Abbildungen zurückgeführt.

2. Wir zeigen zunächst, dass das Tensorprodukt, wenn es denn existiert, bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig ist. Angenommen, es gäbe zwei Vektorräume $V \otimes W$ und $V \tilde{\otimes} W$ und zwei universelle bilineare Abbildungen

   $$\kappa\colon V \times W \to V \otimes W \qquad \tilde{\kappa}\colon V \times W \to V \tilde{\otimes} W.$$

   Man benutzt die universelle Eigenschaft von κ und findet für die spezielle bilineare Abbildung $\tilde{\kappa}$ eine eindeutige lineare Abbildung $\phi_{\tilde{\kappa}}\colon V \otimes W \to V \tilde{\otimes} W$ mit $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa = \tilde{\kappa}$.

Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ erhält man ebenso eine lineare Abbildung $\phi_\kappa \colon V\tilde{\otimes}W \to V \otimes W$ mit $\phi_\kappa \circ \tilde{\kappa} = \kappa$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\phi_{\tilde{\kappa}}"] \\
V \times W \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[dr, "\kappa"'] & V\tilde{\otimes}W \arrow[d, dashed, "\phi_\kappa"] \\
 & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildungen $\kappa = \mathrm{id}_{V\otimes W} \circ \kappa$ und $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa$ beschreiben die gleiche bilineare Abbildung $V \times W \to V \otimes W$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft folgt $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} = \mathrm{id}_{V\otimes W}$. Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ folgt analog $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \phi_\kappa = \mathrm{id}_{V\tilde{\otimes}W}$.

3. Zur Existenz: Wir betrachten $V \times W$ und $\mathbb{K}$ als Mengen und wir benutzen die Menge aller Abbildungen von $V \times W$ nach $\mathbb{K}$, $\mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$. Wir definieren eine Abbildung

$$\delta \colon V \times W \to \mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K}), \quad \delta(v_1, w_1)(v_2, w_2) := \begin{cases} 1, & v_1 = v_2 \text{ und } w_1 = w_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei
$$U := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\delta(v, w), v \in v, w \in W\}.$$

Der Vektorraum U enthält also endliche Linearkombinationen von Abbildungen $\delta(v, w)$.

Wir wollen δ dazu zwingen, bilinear zu werden und bilden den Quotientenvektorraum

$$T := U/X,$$

wobei X der Untervektorraum von U ist, der von allen Elementen in U der Form

$$\delta(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda\delta(v_1, w) - \mu\delta(v_2, w) \text{ und } \delta(v, \lambda w_1 + \mu w_2) - \lambda\delta(v, w_1) - \mu\delta(v, w_2) \quad (1)$$

erzeugt wird, also $X = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(M)$, wobei M die Menge

$$\{\delta(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda\delta(v_1, w) - \mu\delta(v_2, w), \delta(v, \lambda w_1 + \mu w_2) - \lambda\delta(v, w_1) - \mu\delta(v, w_2)\}$$

mit $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $w, w_1, w_2 \in W$ ist. Es sei $\pi \colon U \to U/X = T$ die kanonische Projektion. Nach Konstruktion ist T ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi \circ \delta \colon V \times W \to T$ ist bilinear.

Wir behaupten, dass das Paar $(T, \pi \circ \delta)$ ein Tensorprodukt von V und W ist. Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass $(T, \pi \circ \delta)$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes hat.

Sei dazu also $\alpha \colon V \times W \to Y$ eine beliebige bilineare Abbildung in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum Y. Jedes Element in T läßt sich schreiben als $\pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(v_i, w_i)\right)$. Wir setzen $\phi_\alpha \colon T \to Y$ an als
$$\phi_\alpha(\pi(\delta(v, w))) := \alpha(v, w)$$
und allgemein
$$\phi_\alpha\left(\pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(v_i, w_i)\right)\right) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(v_i, w_i).$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Ist x ein Element aus X, so ist x eine Linearkombination von Elementen wie in (1). Da aber α bilinear ist, gilt

$$\alpha(\lambda u_1+\mu u_2, v)-\lambda\alpha(u_1, v)-\mu\alpha(u_2, v) = 0 \text{ und } \alpha(u, \lambda v_1+\mu v_2)-\lambda\alpha(u, v_1)-\mu\alpha(u, v_2) = 0,$$

so dass $\alpha|_X = 0$ gilt.

Damit ist $\phi_\alpha\colon W/X \to Y$ wohldefiniert und linear. Es gilt nach Konstruktion

$$\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta = \alpha,$$

weil wir $\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta(v, w)$ genau als $\alpha(v, w)$ definiert hatten.

Da die Elemente $\delta(v, w)$ den Vektorraum U erzeugen, erzeugen die Elemente $\pi(\delta(v, w))$ den Quotientenvektorraum. Da wir verlangen, dass $\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta = \alpha$ gilt, ist ϕ_α damit eindeutig festgelegt.

4. Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und sind V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}} V = m < \infty$ und $\dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$, so ist
$$\dim_{\mathbb{K}} V \otimes W = m \cdot n.$$
Es sei $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W. Dann ist $(v_i \otimes w_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $V \otimes W$: Nach Konstruktion von $V \otimes W$ sind die $(v_i \otimes w_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ linear unabhängig und sie erzeugen $V \otimes W$.

5. Die Elemente des Vektorraums $V \otimes W$ heißen *Tensoren*, die Elemente der Form $v \otimes w := \kappa(v, w)$ mit $v \in V$ und $w \in W$ *Tensorprodukte* oder reine Tensoren. Die Tensorprodukte erzeugen $V \otimes W$, aber nicht jedes Element von $V \otimes W$ ist das Tensorprodukt eines Vektors $v \in V$ und $w \in W$.

Bemerkung 1.1.4.

1. Sind V, W reelle oder komplexe Vektorräume und tragen überdies die Struktur eines Hilbertraums, so ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ mit dem durch
$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \cdot \langle w, w' \rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V \quad \text{und } w, w' \in W$$
definierten Skalarprodukt ein Skalarproduktraum. Im unendlichdimensionalen Fall ist dies aber *kein* Hilbertraum. Man kann aber $V \otimes W$ als metrischen Raum vervollständigen, indem man alle Cauchy-Folgen hinzunimmt und Cauchy-Folgen identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Man zeigt dann, das dieser Raum $V \hat{\otimes} W$ eine natürliche Struktur eines Hilbertraum trägt.

2. Es gilt dann für Räume quadratintegrabler Funktionen $L^2(\mathbb{R}^p)\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^q) \cong L^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$.

3. Wenn die Elemente der Hilberträume V und W Wellenfunktionen quantenmechanischer System beschreiben, so beschreiben Elemente des Hilbertraums $V \hat{\otimes} W$ Wellenfunktion des gekoppelten Systems. Tensorprodukte von Hilberträumen treten daher natürlich bei der Beschreibung von Systemen mehrerer Teilchen auf. (Bei identischen Teilchen muss man sich auf Unterräume einschränken, um die Bose- oder Fermi-Statistik des Teilchens zu berücksichtigen.)

Wir definieren nun das Tensorprodukt zweier linearer Abbildungen.

Betrachtung 1.1.5.
Je zwei $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen

$$\phi\colon V \to V' \qquad \psi\colon W \to W'$$

induzieren eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung der Tensorprodukte

$$\phi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'.$$

Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\phi\times\psi"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\phi\otimes\psi"] \\ V' \times W' \arrow[r, "\kappa'"] & V' \otimes W' \end{tikzcd} \tag{2}$$

Da die Abbildung $\kappa' \circ (\phi \times \psi)$ bilinear ist, existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi \otimes \psi$ mit $(\phi \otimes \psi) \circ \kappa = \kappa' \circ (\phi \times \psi)$. Diese erfüllt also

$$(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w) \quad \text{für } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Betrachtung 1.1.6.
Wir wollen diese Strukturen nun auch in Koordinaten bezüglich Vektorraumbasen betrachten. Sei $\mathbb{K}$ ein fester Körper.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis. Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ in dieser Basis als

   $$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad \text{mit } x^i \in \mathbb{K}.$$

   Man nennt manchmal einen Vektor $x \in V$ einen *kontravarianten Vektor* in V.

2. Sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ der Dualraum von V, also der Vektorraum der Linearformen auf V. Die zur Basis $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ duale Basis $\mathcal{B}^{(V^*)} = (e^1, \dots, e^n)$ besteht aus den Linearformen e^i mit $e^i(e_j) = \delta_{ij}$. Wir schreiben Linearformen, also Vektoren $\beta \in V^*$ im Dualraum, als Linearkombination

   $$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^i \quad \text{mit } \beta_i \in \mathbb{K}.$$

   Man nennt manchmal dann auch $\beta \in V^*$ einen *kovarianten Vektor* zu V.

3. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ und $\mathcal{B}^{(W)} = (e'_1, \dots, e'_m)$. Eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ beschreiben wir durch die Bilder der Basisvektoren

   $$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a^i_j e'_i;$$

   (a^i_j) ist die darstellende Matrix von A. Oft vereinbart man, dass über gleiche oben und unten stehende Indizes summiert werden muss, und lässt das Summenzeichen weg: $Ae_j = a^i_j e'_i$ Dies ist die *Einsteinsche Summationskonvention*, die in Differentialgeometrie und allgemeiner Relativitätstheorie häufig verwendet wird.

4. Seien V, V' und W, W' endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi\colon V \to V'$ und $\psi\colon W \to W'$ lineare Abbildungen. Seien $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}^{(V')} = (e'_1, \ldots e'_m)$ sowie $\mathcal{B}^{(W)} = (f_1, \ldots, f_p)$, $\mathcal{B}^{(W')} = (f'_1, \ldots f'_q)$ Basen. Sind dann die darstellenden Matrizen gegeben durch
$$\phi(e_i) = a_i^k e'_k \quad \text{und} \quad \psi(f_i) = b_i^\ell f'_\ell,$$
so folgt aus dem kommutierenden Diagramm (2) in Betrachtung 1.1.5
$$(\phi \otimes \psi)(e_i \otimes f_j) = a_i^k b_j^l e'_k \otimes f'_\ell$$
und folglich für einen allgemeinen Tensor $x^{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes V'$
$$(\phi \otimes \psi)(x^{ij} e_i \otimes f_j) = x^{ij} a_i^k b_j^\ell e'_k \otimes f'_\ell.$$
Die Beschreibung von $\phi \otimes \psi$ in Koordinaten ist also
$$\phi \otimes \psi\colon (x^{ij}) \mapsto (a_i^k b_j^\ell x^{ij}).$$

Bemerkungen 1.1.7.

1. Aus der Bilinearität von κ folgt, dass sich auch das Tensorprodukt von Abbildungen bilinear verhält:
$$\begin{aligned}(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) \otimes \psi &= \lambda_1\phi_1 \otimes \psi + \lambda_2\phi_2 \otimes \psi,\\ \phi \otimes (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) &= \phi \otimes \lambda_1\psi_1 + \phi \otimes \lambda_2\psi_2.\end{aligned}$$

2. Ebenso folgt für Vektorräume die Verträglichkeit mit direkten Summen:
$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W),$$
und analog im anderen Argument.

3. Man hat kanonische Isomorphismen
$$\begin{aligned} a_{U,V,W}\colon U \otimes (V \otimes W) &\to (U \otimes V) \otimes W\\ u \otimes (v \otimes w) &\mapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$
mit deren Hilfe man die $\mathbb{K}$-Vektorräume $U \otimes (V \otimes W)$ und $(U \otimes V) \otimes W$ identifizieren kann. Das Tensorprodukt ist dann assoziativ.

4. Die Skalarmultiplikation in V liefert kanonische Isomorphismen
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \otimes V & \xrightarrow{\sim} & V \\ \lambda \otimes v & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V \otimes \mathbb{K} & \to & V \\ v \otimes \lambda & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$
mit Umkehrabbildung $v \mapsto 1 \otimes v$ bzw. $v \mapsto v \otimes 1$, mit deren Hilfe man den Grundkörper $\mathbb{K}$ als Eins unter dem Tensorprodukt auffassen kann.

5. Man hat kanonische Isomorphismen
$$\begin{aligned} c_{U,V}\colon U \otimes V &\to V \otimes U\\ u \otimes v &\mapsto v \otimes u, \end{aligned}$$
mit deren Hilfe man die Faktoren vertauschen kann. Es gilt $c_{V,U} \circ c_{U,V} = \mathrm{id}_{U \otimes V}$.

6. Benutzen wir das assoziative Tensorprodukt, so können wir zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V die *Tensoralgebra*

$$T(V) := V^{(0)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \ldots,$$

mit $V^{(0)} := \mathbb{K}$ und $V^{(j)} := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{j}$ mit j Faktoren, bilden. Durch das Produkt

$$\begin{array}{rcl} V^{(j)} \times V^{(\ell)} & \to & V^{(j+\ell)} \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_j, w_1 \otimes \ldots \otimes w_\ell) & \mapsto & v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_\ell \end{array}$$

wird $T(V)$ zu einer $\mathbb{K}$-Algebra, d.h. dass der gegebene $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Produkt versehen ist, das bezüglich der Vektoraddition distributiv ist. Genauer ist $T(V)$ eine $\mathbb{Z}_+$-graduierte assoziative $\mathbb{K}$-Algebra. Sie ist unendlich-dimensional, falls V nicht der Nullvektorraum ist. Die Tensoralgebra von Hilberträumen (und Unterräume davon) tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von Systemen der Quantenstatistik auf, bei denen die Teilchenzahl nicht fest ist.

Bemerkungen 1.1.8.

1. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{lcl} V^* \otimes W^* & \to & (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta & \mapsto & (v \otimes w \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

2. Insbesondere können wir Bilinearformen auf $V \times W$ mit Linearformen auf $V \otimes W$, also Elementen in $(V \otimes W)^*$ identifizieren und somit durch Tensoren in $V^* \otimes W^*$ beschreiben. In der Beschreibung durch Komponenten treten zwei untere kovariante Indizes auf.

3. Wir hatten den Maßtensor einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ kennengelernt. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung. Sei für $u \in U$ das Bild $p := \varphi(u) \in M$ und $(\partial_1\varphi, \ldots, \partial_k\varphi)$ eine Basis des Tangentialraums T_pM. Dann liefert die Restriktion des euklidischen Skalarprodukts des umgebenden Raums $\mathbb{R}^n$ auf T_pM eine (positiv definite) Bilinearform $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ und somit einen Tensor in $(T_pM)^* \otimes (T_pM)^*$.

4. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{lcl} V^* \otimes W & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \alpha \otimes w & \mapsto & (v \mapsto \alpha(v)w) \end{array}$$

ein Isomorphismus. Insgesamt ermöglicht dies einen Kalkül für *endlich-dimensionale* Vektorräume, bei dem alle Homomorphismen – insbesondere multilineare Abbildungen und Multilinearformen – durch geeignete Tensoren beschrieben werden.

Bemerkungen 1.1.9.

1. Hat man in allen Vektorräumen eine Basis gewählt, so kann man Tensoren durch ihre Koordinaten beschreiben:
$(x^{i_1 \ldots i_k}{}_{j_1 \ldots j_\ell})$ beschreibt einen Tensor in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes W_1^* \otimes \ldots \otimes W_\ell^*$.
Eine Basiswechselabbildung im ν-ten Faktor V_ν

$$e_i' = t_i^j e_j$$

führt dann für den Tensor zu neuen Koordinaten $(t^i_j x^{\cdots j \cdots}_{\cdots})$. Für kovariante Indizes ist entsprechend die zu $T = (t_i^j)$ transponierte Matrix zu nehmen.

2. Auf dem Raum der Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist die Spur eine wichtige Linearform:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \cong V^* \otimes V & \to & \mathbb{K} \\ x^i_j e^j \otimes e_i & \mapsto & x^i_j e^j(e_i) = \sum_i x^i_i = x^i_i \end{array}$$

   Im Tensorkalkül setzt man also einen oberen und einen unteren Index gleich und summiert darüber. Diese Operation nennt man auch das *Verjüngen eines Tensors*. Auch ein Tensor mit mehr als einem oberen und unterem Index zum gleichen Vektorraum kann verjüngt werden; dies entspricht einer partiellen Spur.

Definition 1.1.10

1. *Eine* alternierende k-Form *auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$\omega\colon V^k \to \mathbb{K},$$

   die in jedem Argument linear ist, also eine multilineare Abbildung ist, und die verschwindet, sobald wenigstens zwei Argumente gleich sind:

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0,$$

   sobald es i, j mit $i \neq j$ gibt, so dass $v_i = v_j$.

2. *Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit $\Lambda^k V^*$ den Vektorraum aller alternierenden k-Formen $V^k \to \mathbb{K}$. Speziell setzt man $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$. Es ist $\Lambda^1 V^* = V^*$.*

Bemerkungen 1.1.11.

1. Eine alternierende Linearform kann durch eine lineare Abbildung $V^{(k)} \to \mathbb{K}$ beschrieben werden.

2. Ist die Charakteristik von $\mathbb{K}$ ungleich 2 (wie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so ist allgemeiner eine alternierende k-lineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha\colon V \times V \times \ldots \times V \to W$$

   mit der Eigenschaft, dass für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ gilt:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Charakteristik von $\mathbb{K}$ immer ungleich 2 ist.

Definition 1.1.12 *Das* k-fache äußere Produkt *eines* $\mathbb{K}$-Vektorraums V *ist ein Vektorraum $\Lambda^k(V)$, zusammen mit einer k-multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge\colon V \times \ldots \times V \to \Lambda^k V$, so dass es für jede k-lineare alternierende Abbildung $\alpha\colon V^k \to W$ genau eine lineare Abbildung $\phi_\alpha\colon \Lambda^k V \to W$ gibt, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \Lambda^k V \arrow[dd, dashed, "\exists!\phi_\alpha"] \\ V^k \arrow[ur, "\wedge"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Durch diese universelle Eigenschaft ist $\Lambda^k V$ bis auf eindeutige Isomorphie charakterisiert. Die Existenz des äußeren Produkts zeigt man, indem man den Vektorraum $\Lambda^k V = V^{\otimes k}/L$ mit

$$L := \operatorname{span}\big(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k - \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)} \mid \sigma \in \Sigma_k, v_j \in V\big)$$

betrachtet.

1. Wir schreiben
$$\wedge(v_1, \ldots, v_k) =: v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^k V.$$
Wir werden gleich diesen Ausdruck noch einmal anders für den Fall von Linearformen einführen, also für $\Lambda^k V^*$.
Da die Abbildung $\wedge\colon V^k \to \Lambda^k V$ alternierend ist, gilt
$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)}.$$

2. Eine alternierende k-Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V kann als ein Element (eines Unterraums) des $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V^{\otimes k})^*$ angesehen werden. Diese kann man natürlich als Elemente in der Komponente $(V \otimes \ldots \otimes V)^* \cong V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ der Tensoralgebra TV^* des Dualraums auffassen.

Allerdings ist das Produkt zweier alternierender k-Formen in der Tensoralgebra nicht mehr alternierend. Wir müssen daher für alternierende Formen ein anderes Produkt einführen.

Definition 1.1.13
Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen. Wir definieren das äußere Produkt *oder* Dachprodukt *$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$ durch*

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det\left((\varphi_\ell(v_j))_{1 \le \ell, j \le k}\right)$$

Bemerkung 1.1.14.
Man zeigt leicht: Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*, so bilden die Elemente $\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_k}$ mit $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

Dazu betrachte eine zu (φ_i) duale Basis $(e_i)_i$ von V. Man zeigt dann, dass eine beliebige alternierende Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ sich eindeutig schreiben lässt als

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Es folgt $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ für $0 \le k \le n$ und $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = 0$ für $k > n$.

Satz 1.1.15.
Es gibt genau eine bilineare Abbildung (genannt *äußeres Produkt* oder *Dachprodukt*)

$$\begin{array}{rcl} \wedge\colon \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* & \to & \Lambda^{k+\ell} V^* \\ (\omega, \sigma) & \mapsto & \omega \wedge \sigma, \end{array}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\ell) = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\ell)$$

für alle 1-Formen $\varphi_j, \psi_j \in V^*$.

Definition 1.1.16

1. *Wir definieren das* äußere Produkt *oder* Dachprodukt *alternierender Formen durch die Abbildung aus Satz 1.1.15. Speziell setzt man für $a \in \mathbb{K} = \Lambda^0 V^*$: $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a \cdot \omega$.*

2. *Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V nennt man die direkte Summe*

$$\Lambda V = \oplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

die äußere Algebra *von V.*

Bemerkungen 1.1.17.

1. Die Dimension der äußeren Algebra eines Vektorraums V der Dimension $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ ist

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda V = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Insbesondere ist die äußere Algebra eines endlich-dimensionalen Vektorraums endlich-dimensional.

2. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass das Dachprodukt assoziativ ist,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

für alle $\omega_i \in \Lambda^{k_i}$ und alle Werte von $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Ferner ist das Dachprodukt alternierend: Für $\omega \in \Lambda^k V$ und $\sigma \in \Lambda^\ell V$ gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{k\ell} \sigma \wedge \omega. \tag{3}$$

3. Die äußere Algebra von Hilberträumen tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von fermionischen Vielteilchensystemen auf.

1.2 Differentialformen und der Stokessche Integralsatz

Wir folgen [F3, §19-§21].

Betrachtung 1.2.1.

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bei der Einführung des Differentials hatten wir df als Abbildung

$$U \to (\mathbb{R}^n)^*, p \mapsto df(p) = df_p$$

aufgefasst. Für jedes $p \in U$ ist $\mathbb{R}^n$ der Tangentialraum T_pU der n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit U.

- Wir wollen im Folgenden die Tangentialräume T_pU für verschiedene p auseinanderhalten. Wenn wir die Vereinigung $\sqcup_{p\in U} T_pU$ bilden, so sei diese stets disjunkt:

$$\bigsqcup_{p\in U} T_pU = \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_pU.$$

Man nennt den Dualraum $T_p^*U := (T_pU)^*$ auch den *Kotangentialraum* von U in p. Ebenso betrachtet man wieder die disjunkte Vereinigung $\sqcup_{p\in U} T_p^*U$.

- Wir fassen jetzt das Differential df auf als Abbildung

$$U \to \sqcup_{p\in U} T_p^*U \text{ mit } p \mapsto df(p) \in T_p^*U,$$

wobei die Linearform $df(p) \in T_p^*U$ auf einem Tangentialvektor $v \in T_pU$ den Wert

$$df(p)(v) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot v_j$$

hat.

- Speziell betrachten wir für die Koordinatenfunktionen x_j jetzt die Differentiale $dx_j : U \to \sqcup_{p\in U} T_p^*U$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$; es gilt

$$dx_j(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \delta_{k,i} = \delta_{i,j}.$$

Also ist für jedes p die Menge $dx_1(p), \ldots, dx_n(p)$ die zur kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$ duale Basis von $T_p^*U \cong \mathbb{R}^n$, und es gilt

$$df(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot dx_j(p).$$

Im Sinne der folgenden Definition ist das *totale Differential df* von f eine Differentialform erster Ordnung.

Definition 1.2.2
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer Differentialform *der Ordnung k oder kurz einer k-Form auf U versteht man eine Abbildung*

$$\omega : U \to \bigsqcup_{p\in U} \Lambda^k T_p^*U \text{ mit } \omega(p) \in \Lambda^k T_p^*U.$$

Bemerkung 1.2.3.
Nach Bemerkung 1.1.14 ist für jedes $p \in U$ durch $dx_{j_1}(p) \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}(p)$, $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k T_p^*U$ gegeben, und jede k-Form ω auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich also darstellen als

$$\omega(p) = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} f_{j_1\ldots j_k}(p) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen $f_{j_1\ldots j_k} : U \to \mathbb{R}$.

Definition 1.2.4
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} f_{j_1\ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

eine k-Form auf U.

1. *Die Differentialform ω heißt* stetig differenzierbar *(bzw. stetig, bzw. r-mal stetig differenzierbar), wenn alle $\binom{n}{k}$ Koeffizientenfunktionen $f_{j_1\ldots j_k}$ diese Eigenschaft haben.*

2. *Für eine stetig differenzierbare Differentialform ω der Ordnung k definieren wir nun eine $(k+1)$-Form $d\omega$, die* äußere Ableitung *der Differentialform ω, durch*

$$d\omega := \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} df_{j_1\ldots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Natürlich lässt sich $d\omega$ dann als Linearkombination der Basiselemente $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k+1}}$ ausdrücken: Man schreibt

$$d\omega := \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} \frac{\partial f_{j_1\ldots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

und ordnet die Indizes so um, dass sie strikt monoton wachsend angeordnet sind.

Satz 1.2.5.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

1. (Linearität) Seien ω_1, ω_2 stetig differenzierbare k-Formen auf U und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2.$$

2. (Leibnizregel) Sei ω eine stetig differenzierbare k-Form und η eine stetig differenzierbare ℓ-Form. Dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. Für jede zweimal stetig differenzierbare k-Form ω auf U gilt $d(d\omega) = 0$.

Dass $d^2 = 0$ gilt, besagt, dass d ein Randoperator ist, mit dessen Hilfe man Kohomologiegruppen definieren kann – in unserem Fall deRham Kohomologie. Wer mehr dazu erfahren möchte, ist auf [MT] verwiesen.

Beweis.

1. Die erste Behauptung ist eine Folge der Differentiationsregeln.

2. Die zweite Behauptung folgt aus der Produktregel für die Koeffizientenfunktionen und der graduierten Symmetrie (3) aus Bemerkung 1.1.17.1: Für

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{|J|=\ell} g_J dx_J$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \textstyle\sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (\textstyle\sum_I df_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J g_J dx_J) + (-1)^k (\sum_I f_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J dg_J \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Symmetrie der Hesseschen Matrix:

$$d^2\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} = 0.$$

□

Wir führen weitere Notation ein:

Definition 1.2.6
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung versehen ist.

1. *Das* vektorielle Linienelement *ist das n-Tupel von 1-Formen* $\mathrm{d}\vec{s} := (dx_1, \ldots, dx_n)^T$ *auf U.*

2. *Das* vektorielle (Hyper-)Flächenelement *ist das n-Tupel von $(n-1)$-Formen,* $\mathrm{d}\vec{S} := (dS_1, \ldots, dS_n)^T$ *auf U mit*

$$dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{dx_i}^{\textit{auslassen}} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beispiel 1.2.7.
Wir betrachten Differentialformen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Differentialformen verschiedener Ordnung und ihre äußeren Ableitungen.

1. Eine stetig differenzierbare 0-Form auf U ist eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$. Ihr Differential $df = \partial_1 f dx^1 + \ldots \partial_n f dx^n = \langle \operatorname{grad} f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ ist eine 1-Form.

2. Betrachte das *Volumenelement* $\mathrm{d}V := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Jede stetig differenzierbare n-Form auf U ist von der Form $c\,\mathrm{d}V$ mit einer stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktion $c\colon U \to \mathbb{R}$, und hat äußere Ableitung 0.

3. Sei ψ eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form. Schreiben wir mit einem Vektorfeld b und dem vektoriellen Hyperflächenelement $d\vec{S}$,

$$\psi = \langle b, d\vec{S}\rangle = b_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - b_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + (-1)^{n-1} b_n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1},$$

so ist die äußere Ableitung die n-Form

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \ldots + \partial_n b_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = (\operatorname{div} b) \cdot \mathrm{d}V.$$

Konkret für $n = 3$ sieht dies so aus: Die 2-Form

$$\psi = \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

hat die äußere Ableitung

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} b) \cdot \mathrm{d}V.$$

4. Sei φ eine stetig differenzierbare 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben dann die 1-Form mit einem Vektorfeld a in der Form $\varphi = \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$, und rechnen nach, dass gilt:

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1) dx_1 \wedge dx_3 + (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \langle \operatorname{rot} a, \mathrm{d}\vec{S}\rangle \end{aligned}$$

mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, -dx_1 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_2)^T$.

Wir haben so die Differentialoperatoren Rotation, Divergenz und Gradient durch Differentialformen verstanden.

Definition 1.2.8
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. *Eine stetig differenzierbare k-Form ω auf U heißt* geschlossen, *falls $d\omega = 0$ gilt.*
2. *Für $k \geq 1$ heißt eine stetige k-Form ω auf U* exakt, *falls es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η auf U gibt, so dass $\omega = d\eta$ gilt.*

Lemma 1.2.9.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede auf U stetig differenzierbare exakte k-Form ist geschlossen.

Beweis.
Zu einer exakten k-Form ω finden wir nach Definition 1.2.8 eine $(k-1)$-Form η mit $\omega = d\eta$. Dann gilt wegen Satz 1.2.5.3

$$d\omega = d^2\eta = 0.$$

□

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x}$ ganz in U liegt.

Theorem 1.2.10. [Lemma von Poincaré.]
Ist eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist jede geschlossene k-Form auf U mit $k \geq 1$ auch exakt.

Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$. Es reicht aus, k-Formen der Form

$$\omega = f(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

auf U zu betrachten. Hierzu definieren wir die $(k-1)$-Form

$$I(\omega) := \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

wobei die 1-Form dx_{i_α} ausgelassen wird. Das Integral ist definiert, weil $tx \in U$ liegt, da U sternförmig ist. Dann gilt

$$(*) \qquad \omega = \ dI\omega + Id\omega.$$

Für eine geschlossen Form ω folgt hieraus sofort $\omega = dI\omega$, so dass ω exakt ist.

Die Gleichung $(*)$ folgt durch direkte Rechnung: Es gilt

$$\begin{aligned} dI\omega &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + k\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Wir schreiben das Integral im zweiten Summanden um:

$$\begin{array}{rcl} k\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t & = & t^k f(tx)\big|_0^1 - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t \\ & = & f(x) \ - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t \end{array}$$

und rechnen die Ableitung des Integrals im ersten Summanden aus:

$$d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] = \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx)\mathrm{d}t\right] dx_\beta .$$

Damit finden wir insgesamt für den ersten Summanden in (*):

$$\begin{array}{rcl} dI\omega & = & \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx)\mathrm{d}t\right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots dx_{i_k} \\ & & + f(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - \left[\int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} . \end{array}$$

Wir berechnen auch explizit den zweiten Summanden in $(*)$: wir finden

$$d\omega = \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(x) dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} Id\omega & = & \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \cdot t^k \partial_\beta f(tx)\right] x_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ & & + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \cdot t^k \partial_\beta f(tx)\right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \end{array}$$

Der Vergleich liefert nun $(*)$. □

Bemerkung 1.2.11.
Aus dem Poincaréschen Lemma, zusammen mit den Beispielen 1.2.7, folgt für jede sternförmige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^3$:

1. Ist $a\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{rot} a = 0$, so existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $a = \mathrm{grad}\, f$.

   Denn führt man wie in Beispiel 1.2.7.4 eine 1-Form $\varphi := \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ ein; dann ist

   $$d\varphi \overset{1.2.7.3}{=} \langle \mathrm{rot} a, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = 0.$$

   Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.10 gibt es eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit

   $$\varphi = df \overset{1.2.7.1}{=} \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$$

   also $a = \mathrm{grad}\, f$.

   In der Elektrostatik gilt für das elektrische Feld $\mathrm{rot} E = 0$. Daher gibt es eine skalare Funktion V, das elektrische Potential, mit $-\mathrm{grad}\, V = E$.

2. Ist $b\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{div}\, b = 0$, so existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $b = \mathrm{rot} a$.

   Zum Beweis führen wir wie in Beispiel 1.2.7.3 eine 2-Form $\psi := \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ ein; dann ist nach 1.2.7.3 die äußere Ableitung $d\psi = \mathrm{div}\, b \mathrm{d}V = 0$. Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.10

gibt es eine 1-Form φ mit $\psi = d\varphi$. Schreiben wir $\varphi = \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ mit einem Vektorfeld a, so folgt

$$\langle \mathrm{rot}a, d\vec{S}\rangle \overset{1.2.7.4}{=} d\varphi = \psi = \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$$

und somit $b = \mathrm{rot}a$.

Für das magnetische Feld gilt $\operatorname{div} B = 0$; also existiert ein Vektorfeld A, das Vektorpotential, so dass $B = \mathrm{rot}A$.

Definition 1.2.12
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} f_{j_1 \ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

eine k-Form auf U und $\varphi \colon V \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\varphi^* \omega := \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} (f_{j_1 \ldots j_k} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{j_k}.$$

eine k-Form auf V, der Rücktransport *oder* Pullback *$\varphi^* \omega$.*

Wir halten ohne Beweis die wichtigsten Eigenschaften des Rücktransports fest:

Satz 1.2.13.

1. Der Rücktransport φ^* ist linear: für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und ω_1, ω_2 k-Formen gilt

$$\varphi^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \varphi^*(\omega_1) + \lambda_2 \varphi^*(\omega_2).$$

2. Der Rücktransport ist verträglich mit dem Dachprodukt,

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta).$$

3. Der Rücktransport ist verträglich mit der äußeren Ableitung: Ist φ zweimal stetig differenzierbar und ω eine stetig differenzierbare k-Form, so gilt

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

4. Ist weiterhin $W \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\psi \colon W \to V$ stetig differenzierbar, so ist

$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = \psi^*(\varphi^* \omega).$$

Wir brauchen explizitere Formeln für den Rücktransport.

Beispiel 1.2.14.
Seien $V \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $\varphi \colon V \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Differentiale der Koeffizientenfunktionen $\varphi_i \colon V \to \mathbb{R}$ liefern 1-Formen

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

1. Für den Rücktransport einer 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ auf U finden wir deshalb

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{n}(f_i \circ \varphi)d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i \circ \varphi)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)dt_j$$

2. Sei $k = m$, so dass die zurückgezogene Form höchstmöglichen Grad hat. Da Differentialformen alternierend sind, folgt

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \det\frac{\partial(\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,\ldots,t_k)}dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k.$$

Es folgt für den Rücktransport einer m-Form auf $\mathbb{R}^n$ zu einer m-Form auf $\mathbb{R}^m$:

$$\omega = \sum_{i_1<i_2\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$\varphi^*\omega = \left(\sum_{i_1<i_2\ldots<i_k}(f_{i_1\ldots i_k}\circ\varphi)\det\frac{\partial(\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,\ldots,t_k)}\right)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k.$$

3. Insbesondere gilt im Fall $m = k = n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\varphi^*\omega = f\circ\varphi(\det \mathrm{d}\varphi)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n. \tag{4}$$

Formen höchstmöglichen Grades transformieren sich also mit der Determinante.

Definition 1.2.15
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine n-Form

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

auf U heißt über $A \subset U$ integrierbar, *wenn die Koeffizientenfunktion f über A im üblichen Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann setzt man*

$$\int_A \omega := \int_A f(x)\mathrm{d}^n x.$$

Insbesondere existiert für jede stetige n-Form das Integral über jedes Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 1.2.16
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Gilt für alle $x \in U$, dass $\det((d\varphi)_x) > 0$, bzw. dass $\det((d\varphi)_x) < 0$, so heißt der Diffeomorphismus φ orientierungserhaltend, *bzw.* orientierungsumkehrend.

Satz 1.2.17.
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Sei U zusammenhängend; dann ist φ entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

eine stetige n-Form auf V. Ist φ orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \;=\; \int_A \varphi^*\omega;$$

ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \;=\; -\int_A \varphi^*\omega.$$

Beweis.
Das folgt sofort aus dem Transformationsverhalten (4) von Differentialformen in Beispiel 1.2.14 und dem Transformationssatz für Integrale. □

Definition 1.2.18
Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

1. *Unter einem* Atlas $\mathfrak{A}$ *für M versteht man eine Menge $\{\varphi_j : T_j \to V_j : j \in J\}$ von Karten von M, deren Bilder M überdecken, also $\bigcup_j V_j = M$.*
2. *Lässt sich für M ein Atlas $\mathfrak{A}$ finden, so dass für je zwei sich schneidende Karten aus $\mathfrak{A}$ der zugehörige Kartenwechsel-Diffeomorphismus τ orientierungserhaltend ist, so nennt man die Untermannigfaltigkeit M* orientierbar. *(Orientierbarkeit ist eine Eigenschaft.)*
3. *Ist M versehen mit einem solchen Atlas, so nennen wir $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$* orientierte *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. (Die Wahl einer Orientierung ist eine Struktur.)*
4. *Alle weiteren Karten von M, die wir einem Atlas $\mathfrak{A}$, der eine Orientierung definiert, hinzufügen können, so dass der Atlas immer noch eine Orientierung definiert, nennen wir* positiv orientiert*; alle anderen Karten negativ orientiert.*

Man kann eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M als Äquivalenzklasse von Atlanten verstehen. Wenn M zusammenhängend ist, so gilt: Entweder ist M nicht orientierbar, oder es existieren genau zwei Orientierungen: Zu jeder Orientierung $\mathfrak{A}$ gibt es auch noch die *entgegengesetzte Orientierung* $-\mathfrak{A}$.

Definition 1.2.19
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k-Form auf U. Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$. Sei A eine kompakte Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M.

Es soll das Integral von der k-Form ω über $(M, \mathfrak{A})$ erklärt werden. Man beachte, dass der Grad der Form gleich der Dimension der Untermannigfaltigkeit ist.

- *In dem Fall, in dem es eine einzige Karte $\varphi \colon T \xrightarrow{\sim} V \subset M$ gibt mit $A \subset V$, setzt man*
$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$
Aus Satz 1.2.17 folgt, dass dies unabhängig von der gewählten Karte φ ist.
- *Es gebe nun endlich viele bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Karten*
$$\varphi_\ell \colon T_\ell \xrightarrow{\sim} V_\ell \subset M, \ell = 1, \ldots, m, \text{ mit}$$
$$A \subset \bigcup_\ell V_\ell$$
mit einer der Überdeckung $(V_\ell)_\ell$ untergeordneten lokal-integrierbaren stetigen Teilung der Eins
$$\alpha_j \colon \bigcup_\ell V_\ell \longrightarrow \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, m.$$

Wir setzen

$$A_j := A \cap \operatorname{supp}(\alpha_j) \subset V_j.$$

und nennen die k-Form ω integrierbar *über A, falls ω über alle A_j im Sinne der vorgehenden Betrachtung integrierbar ist. Dann setzen wir*

$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega).$$

Man zeigt (wie bei der Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten), dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins ist.

Definition 1.2.20

1. *Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$ orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und φ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Karte. Man nennt für einen Punkt $p \in M$ die Basis $((\partial_1\varphi)(p), \dots, (\partial_k\varphi)(p))$ des Tangentialraums T_pM und alle gleich-orientierten Basen des Vektorraums T_pM (bezüglich $\mathfrak{A}$)* positiv orientiert.

2. *Ist $n \geq 2$ und M spezieller eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung, so ist ein bezüglich $\mathfrak{A}$* positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld *auf M ein stetiges Vektorfeld ν auf M, so dass für jedes $p \in M$ der Vektor $\nu(p)$ ein Einheits-Normalenvektor auf M ist, und so dass gilt: Ist $(v_1, \dots, v_{n-1})$ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Basis von T_pM, so ist $(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1})$ eine bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$.*

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [F3, §20].

Bemerkungen 1.2.21.

1. Wenn eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Orientierung $\mathfrak{A}$ besitzt, so existiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld.

2. Eine Orientierung einer Hyperfläche lässt sich umgekehrt durch ein Einheits-Normalenfeld ν charakterisieren.

3. Für ein Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂A sprechen wir von der *kanonischen Orientierung* des Randes ∂A, wenn die Orientierung durch das *äußere* Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Wir erinnern an das vektorielle (Hyper-)Flächenelement aus Definition 1.2.6: Dies ist ein n-Tupel von $(n-1)$-Formen, $\mathrm{d}\vec{S} := (dS_1, \dots, dS_n)^T$. Somit ist für ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $\langle f, \mathrm{d}\vec{S} \rangle$ eine stetige $(n-1)$-Form auf U.

Wir wollen die Integration von Differentialformen und von Funktionen in Beziehung setzen.

Satz 1.2.22.
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und $M \subset U$ eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ orientiert sei. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle \mathrm{d}S(x).$$

Symbolisch wird die Aussage auch in der Form $\mathrm{d}\vec{S} = \nu \mathrm{d}S$ geschrieben. Man beachte, dass auf der linken Seite eine $(n-1)$-Form und auf der rechten Seite eine reellwertige Funktion integriert werden.

Beweis.
Wir betrachten nur den Spezialfall einer parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$: Es sei U offen im $\mathbb{R}^3$ und $M \subset U$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die mit nur einer Karte $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} M$ beschrieben wird, wobei T offen im $\mathbb{R}^2$ ist.

Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $K \subset M$ kompakt. Wir wollen zeigen:

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).$$

Für $t \in T$ ist der Einheitsnormalenvektor im Punkt $\varphi(t) \in M$ gegeben durch das Vektorprodukt

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi||}$$

Wir rechnen dann

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_K f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \int_K f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \int_K f_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi^* f_2 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 + \varphi^* f_3 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} \right) \right. \\
&\quad + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \right) \\
&\quad \left. + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \right) \right) \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \right\rangle \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei erst die Definition des vektoriellen Flächenelements $d\vec{S}$ eingesetzt, dann die Definition 1.2.19 des Integrals und die Definition 1.2.12 des Rücktransports und dann die Kettenregel, gefolgt von der Definition des Kreuzprodukts.

Unser Zwischenergebnis ist das in Definition 1.2.15 definierte Integral einer 2-Form über die Teilmenge $\varphi^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^2$. Dieses Integral ist:

$$\begin{aligned}
\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle \varphi^* f(t), \partial_1\varphi \times \partial_2\varphi\rangle \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t))\rangle \underbrace{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}_{dS(x)} \\
&= \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.23

1. *Sei $H_k \subset \mathbb{R}^k$ der* Halbraum

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

Wir versehen den Rand ∂H_k mit der durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld ν mit $\nu(x) = e_1$ für $x \in \partial H_k$ gegebenen Orientierung.

2. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subset M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt* Randpunkt *der Teilmenge A relativ zur Untermannigfaltigkeit M, falls in jeder Umgebung von p sowohl Elemente von A als auch von $M \setminus A$ liegen. Die Menge aller dieser Randpunkte bezeichnen wir mit $\partial_M A$. Dies ist eine Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M.*

3. *Wir sagen, ein Kompaktum $A \subset M$ habe* glatten Rand *$\partial_M A$, wenn gilt: Es existiert für jedes $p \in \partial_M A$ eine Karte $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} V$ von M mit $p \in V$, so dass $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$ und $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial_M A \cap V$ gilt. Eine solche Karte von M nennen wir* randadaptiert.

Man zeigt:

Betrachtung 1.2.24.

1. Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand, so ist $\partial_M A$ eine kompakte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2. Ist die Untermannigfaltigkeit M zusätzlich orientiert, so erhält man eine *induzierte Orientierung* auf dem Rand $\partial_M A$: Man wähle nur randadaptierte Karten, die positiv orientiert sind, und schränke diese auf den Rand $\partial_M A$ ein.

3. Im Fall $k = n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, A wie in 2, ist die auf $\partial_M A$ durch die kanonische Orientierung von M induzierte Orientierung diejenige, die durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Der folgende Satz ist schon ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

Lemma 1.2.25.
Sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form im $\mathbb{R}^k$ mit $k \geq 2$, mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H_k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Beweis.

- Wir schreiben die $(k-1)$-Form ω als

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

mit C^1-Funktionen $f_1, \ldots, f_k$. In der von der randadaptierten Karte induzierten Karte $\beta\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$ des Randes mit $(t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \ldots, t_{k-1})$ gilt

$$\beta^* \omega = f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1};$$

also folgt für das Randintegral

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) \mathrm{d}^{k-1} t.$$

- Wir berechnen das Integral der k-Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

über den Halbraum $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$. Für jedes feste $(x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ folgt, da die Komponentenfunktion f_1 kompakten Träger hat

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k).$$

Es folgt durch weitere Integration:

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für $2 \le j \le k$ gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \pm \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für festes $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ hat die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_k)$ kompakten Träger. Also verschwindet das Integral in der Klammer. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\partial H_k} \omega.$$

□

Wir können nun den Stokesschen Integralsatz in seiner vollständigen Form formulieren:

Theorem 1.2.26 (Stokesscher Integralsatz im $\mathbb{R}^n$)**.**
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subset U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit $k \ge 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand $\partial_M A$, wobei wir $\partial_M A$ mit der von M induzierten Orientierung versehen:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega.$$

Der Stokessche Integralsatz gilt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Beweis.

- Wie im Beweis des Gaußschen Integralsatzes führen wir zu einem randadaptierten Atlas ein feine beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins $\alpha_{p,\epsilon}$ ein und zerlegen die $(k-1)$-Form ω:

$$\omega = \sum_p \alpha_{p,\epsilon}\omega.$$

Es genügt wieder, den Stokesschen Integralsatz für die einzelnen Summanden zu beweisen.

- Wir nehmen daher an, dass $M \cap \mathrm{supp}(\omega)$ kompakt und ganz in einer Karte $\varphi \colon \Omega \to V \subset M$ aus dem randadaptierten Atlas enthalten ist. Die Differentialform $\varphi^*\omega$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ kann daher durch Null zu einer auf ganz $\mathbb{R}^k$ stetig differenzierbaren Differentialform $\tilde{\omega}$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Es gilt

$$(*) \qquad \int_A d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) \overset{1.2.13.3}{=} \int_{H_k \cap \Omega} d\varphi^*\omega = \int_{H_k} d\tilde{\omega}.$$

- Betrachte die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \quad \mathbb{R}^{k-1} & \to & \mathbb{R}^k \\ (u_1, \ldots, u_{k-1}) & \mapsto & (0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \end{array}$$

und

$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^{k-1}.$$

Dann ist

$$\psi := \varphi \circ \beta\colon \Omega_0 \to V_0 := \partial_M A \cap V$$

eine Karte des Randes $\partial_M A$. Dann ist

$$(**) \qquad \int_{\partial_M A} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \psi^* \omega = \int_{\Omega_0} \beta^* \varphi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^* \tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$

Die Gleichheit von $(*)$ und $(**)$ und somit die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.2.25.

□

Korollar 1.2.27.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U. Dann gilt für jede orientierte, kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset U$

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis.
Da M kompakt ist, wähle im Stokesschen Satz 1.2.26 $A = M$. Da die Mannigfaltigkeit M keinen Rand hat, ist $\partial M = \emptyset$. □

Wir leiten aus dem Stokesschen Satz 1.2.26 zwei klassische Integralsätze ab.

Bemerkungen 1.2.28.

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Betrachte eine parametrisierte Fläche $M \subset U$ im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei ein differenzierbares Vektorfeld $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ gegeben, das mit dem vektoriellen Linienelement $\mathrm{d}\vec{s}$ aus Definition 1.2.6 eine 1-Form $\omega := \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ liefert.

   Sei $A \subset M$ ein Kompaktum in der Fläche M mit glattem Randweg $\varphi\colon [a,b] \to M$, der positiv umlaufend sein soll. Dann erhalten wir mit $d\omega = \langle \mathrm{rot} F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ aus Beispiel 1.2.7.4

$$\begin{array}{rcl} \int_A \langle \mathrm{rot} F(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x) & \overset{1.2.22}{=} & \displaystyle\int_A \langle \mathrm{rot} F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_A d\omega \\ & \overset{1.2.26}{=} & \displaystyle\int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle \\ & = & \displaystyle\int_{[a,b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t. \end{array}$$

   Dies ist der klassische Satz von Stokes.

2. Der klassische Satz von Gauß ist der Spezialfall $k = n$ des Satzes von Stokes 1.2.26. Mit der $(n-1)$-Form $\omega = \langle F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ ist hierbei wie in Beispiel 1.2.7.3

$$d\omega = (\operatorname{div} F) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

   Wir finden

$$\begin{array}{rcl} \int_A \operatorname{div} F \mathrm{d}^n x & = & \displaystyle\int_A d\omega \overset{1.2.26}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{S}\rangle \\ & \overset{1.2.22}{=} & \displaystyle\int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle dS(x). \end{array}$$

Literatur

[FL] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg, Wiesbaden, 2005

[F3] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011

[H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[H01] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[Koe] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Grundwissen Mathematik, Band 2, 1983

[K2] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004

[MT] Ib Madsen, Jørgen Tornehave, *From Calculus to Cohomology, De Rham Cohomology and Characteristic Classes*, Cambridge University Press, 1997

[RS] Michael Reed und Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972

[R1] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin/Heidelberg

[T] Hans Triebel, *Höhere Analysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[W] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2007