Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 1
Abgabe: 19.10.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Aussagenlogik, 3+2+2+3+3 Punkte):

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (*Ergebnis reicht*):

$$(12 \text{ ist gerade}) \wedge \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\right), \qquad (\neg(8 \text{ ist gerade})) \vee \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2\right),$$

$$(16 \text{ ist Quadratzahl}) \vee (4 + 4 = 8), \qquad (1 + 1 = 1) \Longrightarrow (2 \text{ ist gerade}),$$

$$(17 \text{ ist ungerade}) \Longrightarrow (3 \cdot 3 = 9), \qquad 7 \text{ ist gerade } \Longleftrightarrow (49 \text{ ist gerade}).$$

Es seien im Folgenden A, B, C Platzhalter für mathematische Aussagen.

(b) Beweisen Sie durch Ausfüllen der folgenden Wahrheitstafel das Kontrapositions-Prinzip, gemäß dem $A \Longrightarrow B$ zu $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$ äquivalent ist:

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \Longrightarrow B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{\neg B}$	$\boldsymbol{(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)}$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

(Mit anderen Worten kann dieses Prinzip auch dadurch ausgedrückt werden, dass $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A))$ eine Tautologie ist.)

(c) Weisen Sie mittels einer Wahrheitstafel nach, dass $A \Longleftrightarrow B$ äquivalent zu $(\neg A) \Longleftrightarrow (\neg B)$ ist, dass also

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \Longleftrightarrow (\neg B))$$

eine Tautologie ist.

(d) Beweisen Sie anhand einer weiteren Wahrheitstafel (dieses Mal mit 8 Zeilen), dass das logische Distributivgesetz

$$((A \wedge B) \vee C) \Longleftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

eine Tautologie ist.

Die Verneinung von Und-/Oder-Aussagen regeln die de Morganschen Gesetze. Das sind die beiden Tautologien

$$(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \qquad \text{und} \qquad (\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)).$$

(e) Folgern Sie aus (c), (d) und den gerade genannten Gesetzen, dass auch das andere logische Distributivgesetz

$$((A \vee B) \wedge C) \Longleftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$$

eine Tautologie ist. (Hinweis: Verneinungen einsetzen, äquivalente Formeln ersetzen.)

Aufgabe 2 (Prädikatenlogik, 2+3 Punkte):

(a) Formulieren Sie eine zur Verneinung der folgende Aussage äquivalente Aussage, die weder mit einem logischen ‘Nicht’ noch mit ‘Es gibt keine...’ beginnt: ‘Es gibt eine größte Primzahl.’

(b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (*Ergebnis reicht*):

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon 2n{-}1 \in \mathbb{N}\,, \qquad \exists n \in \mathbb{N}\colon (n{+}1)^2 = n^2{+}3\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\colon \exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m\,.$$

Dabei steht $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen.

Lehramtsaufgabe (2+2 Punkte): Als Anlass zum mathematischen Argumentieren und Kommunizieren in der Beobachtungsstufe eignen sich logische Probleme wie das folgende:

Gegegeben sind vier Karten. Jede Karte hat auf der einen Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl.
Behauptung: Wenn eine Karte auf der einen Seite einen Vokal trägt, dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl.
Aufgabe: Welche Karten muss man umdrehen, um die Behauptung zu testen? Es sind so wenig wie möglich, aber so viele wie nötig umzudrehen.

$\boxed{\text{E}}\ \boxed{\text{L}}\ \boxed{6}\ \boxed{9}$

Folgende Lösung stammt von einem Fünftklässler:

Wenn hinter E eine gerade Zahl steht stimmt die Behauptung.
Wenn hinter E eine ungerade Zahl steht stimmt die Behauptung nicht.
Deswegen mus man nur E umdrehen um die Behauptung zu testen.

(a) Erläutern Sie auf Grundlage der Lösung, welches Verständnis bei dem Schüler vorliegen könnte.

(b) Wie würden Sie als Lehrkraft auf die Antwort des Schülers eingehen?