Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 11
Abgabe: 11.01.22 via moodle
bis spätestens 14:15 Uhr

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus, 2 + 2 + 2 + 3 Punkte):
Seien $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ mit $|a| \geq |b| > 0$. Unter der Bedingung, dass $|r| < |b|$, ergeben sich eindeutige Werte für q und r in der folgenden Gleichung:

$$a = qb + r.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$.

(b) Als nächstes stellen wir analog zur obigen Gleichung weitere wie folgt iterativ auf:

$$\begin{aligned} b &= q_1 r + r_1 \\ r &= q_2 r_1 + r_2 \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Dabei seien $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ und es gelte $\ldots < |r_2| < |r_1| < |r|$.

Geben Sie eine Abschätzung an, wie lange (gemessen in Abhängigkeit von a oder b) auf diese Weise weitere Gleichungen iterativ erzeugt werden können.

(c) Angenommen, die letzte der Gleichungen, wie in **(b)** beschrieben, lautet:

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + r_{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = r_n$.

(d) Nutzen Sie die, wie in **(b)** beschriebenen Gleichungen, um zu zeigen, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $\mathrm{ggT}(a, b) = \alpha a + \beta b$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Homomorphismen additiver Gruppen, 2 + 2 + 2 + 2 Punkte):

Ein **Homomorphismus** von Gruppen $(G, +)$ und $(H, +)$ ist eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ mit $\varphi(g_1+g_2) = \varphi(g_1)+\varphi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$. Ein solcher erfüllt automatisch $\varphi(0_G) = 0_H$ sowie $-\varphi(g) = \varphi(-g)$ für alle $g \in G$ und ist als **strukturerhaltende Abbildung** aufzufassen.

Die Homomorphismen zwischen den ***hier stets additiv aufgefassten*** Zahl- und Modulogruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$ können wir wie folgt klassifizieren.

Zeigen Sie:

(a) Jeder Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ hat die Form $\varphi(x) = mx$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ mit einem $m \in \mathbb{B}$.

(b) Jeder Homomorphismus $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ mit $k \in \mathbb{N}$ hat die Form $\psi(x) = [mx]_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ mit einem $m \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

(c) Der einzige Homomorphismus $\chi\colon \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{B}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{B} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ ist $\chi \equiv 0$.

(d) Der einzige Homomorphismus $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ist $\alpha \equiv 0$, jeder Homomorphismus $\beta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ hat die Form $\beta(x) = mx$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit einem $m \in \mathbb{Q}$, und insbesondere ist jeder Homomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, außer der Nullabbildung, bijektiv.

Lehramtsaufgabe (2 + 1 + 2 Punkte):

(a) Stellen Sie vor dem Hintergrund strukturerhaltender Abbildungen mögliche Ursachen für Schüler*innenfehler der folgenden Art dar:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$
$$5^a \cdot 5^b = 5^{a \cdot b}$$

mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

(b) Kennen Sie weitere Fehler dieser Art aus Ihrer Schulzeit?

(c) Wie könnte man Fehler dieser Art im Schulunterricht thematisieren?