Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 2
Abgabe: 26.10.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Mengen und Mengen-Operationen, 3+3+3+4 Punkte):

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind (*Ergebnis reicht!*):

$$\{1,9,5,1\} \cap \{0,2,1\} \subset \{0,1\}\,, \qquad \{6,7\} \supset \{6,7\} \cup \{\emptyset\}\,,$$

$$(\{1,2,3\} \setminus \{1,3,5\}) \sqcup \{3\} \sqcup \emptyset = \{2,3\}\,, \qquad \mathbb{N}\times\{1,2\} \text{ und } \{3\}\times\mathbb{N} \text{ sind disjunkt}\,,$$

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \{(i,j)\} \right) = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\,, \qquad \bigcap_{i=5}^{7} \{i-1, i, i+1\} = \{5,6,7\}\,.$$

(b) Schreiben Sie folgende Mengen jeweils als Liste $\{\dots\}$ ihrer Elemente (*Ergebnis reicht!*):

$$(\{1,3\} \times \{2,4,2\}) \setminus \{(1,4)\}\,, \qquad \mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\{\emptyset, 5\})\,,$$

$$\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid n = 3m+1\}\,, \qquad \bigcup_{i=2}^{7} \left(\bigcap_{j=3}^{3i} \{j, j+1, j+2, j+3, j+4, \dots\} \right).$$

(c) Beweisen Sie das (in der Vorlesung schon behauptete) Distributivgesetz

$$(M_1 \cup M_2) \cap N = (M_1 \cap N) \cup (M_2 \cap N)$$

und die allgemeine Regel

$$M \setminus (M \setminus N) = M \cap N\,.$$

Stellen Sie die hierbei auftretenden Mengen auch graphisch dar.

(d) Seien M_1, N_1, M_2, N_2 Mengen. Entscheiden Sie, ob Einsetzen von ‚$\subset$' oder ‚$\supset$' für die folgenden beiden Kästen (insgesamt 4 Möglichkeiten) eine allgemein gültige Mengen-Inklusion ergibt:

(i) $(M_1 \times N_1) \cup (M_2 \times N_2) \quad \boxed{} \quad (M_1 \cup M_2) \times (N_1 \cup N_2)\,,$

(ii) $(M_1 \times N_1) \cap (M_2 \times N_2) \quad \boxed{} \quad (M_1 \cap M_2) \times (N_1 \cap N_2)\,.$

Geben Sie für alle Möglichkeiten *Beweis oder Gegenbeispiel* an. (Wo ‚$\subset$' und ‚$\supset$' beide gelten, darf man natürlich auch ‚$=$' schreiben und dies auf einmal beweisen.) Stellen Sie die Situation für sinnvoll gewählte $M_1, N_1, M_2, N_2 \subset \mathbb{R}$ graphisch dar.

Aufgabe 2 (Umgang mit formaler Sprache, 2+4 Punkte):

(a) Beschreiben Sie folgenden Mengen möglichst kurz und prägnant, aber auch sehr präzise in Worten:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}\colon n \neq 4m\}\,,$$
$$\{q \in \mathbb{N} \mid \neg\forall n \in \mathbb{N}\colon n^2 \neq q\}\,,$$
$$\{(\ell, m, n) \in \mathbb{N}^3 \mid (\ell < m) \vee (\ell < n)\}\,,$$
$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \forall t \in \mathbb{N}\colon (((\exists p \in \mathbb{N}\colon m = pt) \wedge (\exists q \in \mathbb{N}\colon n = qt)) \Longrightarrow t = 1)\}\,.$$

(b) Drücken Sie in formaler Sprache (erlaubt sind Junktoren, Quantoren, Mengen-Notation, Zahlen, Variablen, Grundrechenarten, Gleichheits- und Ungleichheitszeichen), *aber ganz ohne Worte* aus:

- die Menge T_n der natürlichen Zahlen, durch die eine gegebene natürliche Zahl n teilbar ist (also, kurz gesagt, die Menge T_n der Teiler von n),
- die Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen mit genau zwei Teilern (also, kurz gesagt, die Menge der Primzahlen).

(Man kann $p \in \mathbb{P}$ hier entweder über die Zahl der Elemente von T_p oder direkt über die Teiler 1 und p kodieren. Gehen und geben Sie idealerweise beide Möglichkeiten an.)

Lehramtsaufgabe (3 Punkte):

Bereits in der Grundschule wird die folgende Teilbarkeitsregel gelehrt:

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 *teilbar, wenn ihre Quersumme durch* 3 *teilbar ist.*

Ein Fünftklässler fragt Sie: „Warum ist das eigentlich so?“ Verfassen Sie eine kindgerechte Antwort auf diese Frage.

Kleines Ankreuz-Quiz (freiwillig; nicht zur Abgabe; Besprechung in Lernwerkstätten)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind!

1) Für beliebige Mengen A, M, N gilt $(M \setminus N) \setminus A = \ldots$ $\square$ $M \setminus (N \setminus A)$, $\square$ $M \setminus (N \cap A)$, $\square$ $M \setminus (N \cup A)$.

2) Für beliebige Mengen A, M, N gilt $(M \cup N) \setminus A = \ldots$ $\square$ $(M \setminus A) \cup (N \setminus A)$, $\square$ $(M \setminus A) \cap (N \setminus A)$, $\square$ $(M \setminus A) \cup N$.
Für beliebige Mengen A, M, N gilt $(M \cap N) \setminus A = \ldots$ $\square$ $(M \setminus A) \cap (N \setminus A)$, $\square$ $(M \setminus A) \cup (N \setminus A)$, $\square$ $(M \setminus A) \cap N$.

3) Für eine beliebige Menge M gilt ...
$\square$ $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, $\square$ $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.
Für eine beliebige Menge M gilt ...
$\square$ $M \in \mathcal{P}(M)$, $\square$ $M \subset \mathcal{P}(M)$, $\square$ $M \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, $\square$ $\{M\} \in \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\{M\} \subset \mathcal{P}(M)$, $\square$ $\{M\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.