Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 3
Abgabe: 02.11.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Bilder, Urbilder, Abbildungseigenschaften, 2+2+2+2+3 Punkte):
Wir betrachten die Multiplikations-Abbildung $p\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$$p(m,n) := m\cdot n \text{ für alle } (m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $p(\{(2,9),(3,6),(4,3),(9,2)\})$ und das Urbild $p^{-1}(\{24\})$.

(b) Entscheiden Sie, ob p injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(c) Bestimmen Sie das Bild $p(\{3\}\times\mathbb{N})$ von $\{3\}\times\mathbb{N}$ und das Urbild $p^{-1}(p(\mathbb{N}\times\{2\}))$ des Bildes $p(\mathbb{N}\times\{2\})$ unter p.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ beliebige Mengen und $f\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ eine Abbildung von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$.

(d) Füllen Sie im Folgenden die Lücken:

Behauptung. Für alle Teilmengen $B\subset\mathcal{Y}$ gilt

$$\text{generell } f(f^{-1}(B))\subset B \text{ und bei surjektivem } f \text{ sogar } f(f^{-1}(B)) = B\,.$$

Beweis. Wir zeigen „$\subset$“ (generell): Sei $y\in f(f^{-1}(B))$. Nach Definition des Bilds gibt es $x\in$ $\boxed{}$ mit $f(x)=y$. Nach Definition des Urbilds bedeutet $x\in$ $\boxed{}$ gerade $\boxed{}$. Aus $y=f(x)$ und $\boxed{}$ ergibt sich dann $y\in B$.
Wir zeigen für surjektives f auch „$\supset$“ und damit „$=$“: Sei $b\in B$. Insbesondere ist $b\in\mathcal{Y}$, und nach Definition der Surjektivität gibt es $x\in$ $\boxed{}$ mit $\boxed{}$. Aus $\boxed{}$ und $b\in B$ folgt dann $f(x)\in B$, und nach Definition des Urbilds bedeutet dies $\boxed{}$.
Es folgt $f(x)\in$ $\boxed{}$. Aus $\boxed{}$ und $f(x)\in$ $\boxed{}$ ergibt sich schließlich $b\in f(f^{-1}(B))$. $\square$

(e) Beweisen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv,
(ii) $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle Teilmengen $A\subset\mathcal{X}$,
(iii) $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$ für alle Elemente $x\in\mathcal{X}$.

(Hinweis: Hier bietet sich ein sogenannter Ringschluss an, bei dem die drei Implikationen „(i) $\implies$ (ii)“, „(ii) $\implies$ (iii)“, „(iii) $\implies$ (i)“ separat gezeigt werden. Da man durch „Zusammensetzen“ dieser Implikationen auch die Umkehr-Implikationen „(i) $\impliedby$ (ii)“, „(ii) $\impliedby$ (iii)“, „(iii) $\impliedby$ (i)“ erhält, sind so die drei Äquivalenzen schneller bewiesen.)

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Abbildungseigenschaften, Komposition, 4+2 Punkte):
Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ beliebige Mengen und $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sowie $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ Abbildungen. Dann ist die *Komposition* von f und g die Abbildung

$$g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$$

mit

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \text{ für alle } x \in \mathcal{X}.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} f, g \text{ sind beide injektiv} &\implies g \circ f \text{ ist injektiv} \\ g \circ f \text{ ist surjektiv} &\implies g \text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

(b) Geben Sie ein Beispiel von Abbildungen $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ an, so dass $g \circ f$ sogar bijektiv, aber g nicht injektiv und f nicht surjektiv ist.

Lehramtsaufgabe (2+2 Punkte):
Mengenlehre war lange Zeit fester Bestandteil im deutschen Mathematikunterricht. Dies geht auf eine Reformbewegung der 1960er Jahre zurück, die unter der Bezeichnung „Neue Mathematik“ bekannt ist. Die „Neue Mathematik“ war mit dem Ziel verbunden, abstrakte Strukturen so früh wie möglich in den Mathematikunterricht zu integrieren. So wurden Inhalte, die Sie in den letzten zwei Wochen in Ihrem Mathematikstudium kennengelernt haben, in den 1960er und 1970er Jahren bereits im Mathematikunterricht der Grundschule behandelt. Folgender Ausschnitt stammt beispielsweise aus einem etwas älteren Schulbuch für die fünfte Klasse. Die Abkürzung w. A. steht für wahre Aussage.

Beispiel: Überprüfe anhand der Mengen $A = \{-5; -1; 1\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \{-1; 1; 2; 4\}$, ob $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ein Gesetz ist!

Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Linke Seite:} & B \cap C = \{1; 2; 4\} & \Rightarrow A \setminus (B \cap C) = \{-5; -1\} \\ \text{Rechte Seite:} & \left.\begin{array}{l} A \setminus B = \{-5; -1\} \\ A \setminus C = \{-5\} \end{array}\right\} & \Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{-5; -1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{w. A.}$$

(a) In diesem Ausschnitt sollen die Schüler:innen die Gleichheit

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

für beliebige Mengen A, B und C anhand eines Beispiels überprüfen. Welche falsche Vorstellung kann entwickelt werden, wenn das Beispiel und seine Lösung in dieser Form unkommentiert im Buch stehen?

(b) Gestalten Sie für das Schulbuch eine kurze Ergänzung (Text oder Illustration) zu der Aufgabe, um dieser falschen Vorstellung vorzubeugen.