Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 4
Abgabe: 09.11.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Umkehrfunktionen, 1+1+3+2+5 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f_1^{-1} der Bijektion $f_1\colon \{2,3,4,5\} \to \{0,1,2,3\}$ mit $f_1(2) := 3,\ f_1(3) := 0,\ f_1(4) = 2,\ f_1(5) = 1$.

Für für $r \in \mathbb{R}$ seien $\mathbb{R}_{>r} := \{x \in \mathbb{R} | x > r\}$ und $\mathbb{R}_{<r} := \{x \in \mathbb{R} | x < r\}$.

(b) Bestimmen Sie f_2^{-1} für $f_2\colon \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{<1}$ mit $f_2(x) := 4 - 3x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

(c) Bestimmen Sie f_3^{-1} für $f_3\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>3}\,,\ x \mapsto \begin{cases} 2x+3 & \text{falls } x < 2 \\ x^2 - 2x + 7 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$

(d) Es seien $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ Bijektionen für Mengen $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ und $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie für die Umkehrfunktion der Komposition $g \circ f$ die Regel

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

(e) Zeigen Sie für nicht-leere Mengen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ und eine Abbildung $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$, dass ...

- f genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ gibt,
- f genau dann surjektiv ist, wenn es eine Abbildung $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$ gibt.

Man nennt eine Abbildung g mit der ersten bzw. zweiten Eigenschaft in (c) auch ein **Links- bzw. Rechtsinverses** zu f.

Aufgabe 2 (Injektionen, Surjektionen, Bijektionen, 2+3+2 Punkte):

(a) Bestimmen Sie für die quadratische Funktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) := 3x^2 - 4x$ für $x \in \mathbb{R}$ das Bild $q(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass q weder injektiv noch surjektiv ist.
(Hinweis: Scheitelpunktsform.)

(b) Beweisen Sie, dass aber die Einschränkung $q|_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ von q aus (a) injektiv ist.
(Hinweise: Wieder Scheitelpunktsform. Für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r^2 = s^2$ gilt $r = s$ oder $r = -s$.)

(c) Finden Sie eine Selbstabbildung f von $\mathbb{N}$ mit $f(n) \neq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

(Hat eine Selbstabbildung f von $\mathcal{X}$ die Eigenschaft $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathcal{X}$, so nennt man f übrigens **fixpunktfrei**. Hat sie die Eigenschaft $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$, ist also ihre eigene Inverse, so nennt man f **involutorisch**.)

Lehramtsaufgabe (2+2 Punkte):

Im schulischen Mathematikunterricht werden häufig Beispiele aus der Alltagswelt zur Veranschaulichung des Abbildungskonzepts genutzt. Beliebte Beispiele sind Adressbücher oder Getränkeautomaten. Adressbücher werden als Abbildung von einer Menge von Namen zu einer Menge von Adressen betrachtet; Getränkeautomaten als Abbildung von einer Menge von Ziffern auf einem Tastenfeld zu einer Menge erhältlicher Getränke.

Welche Eigenheiten bzw. Sonderfälle dieser Beispiele könnten mit Schüler:innen im Kontext des Abbildungskonzepts (insbesondere bzgl. mathematischer Eigenschaften von Abbildungen) diskutiert werden? Stellen Sie für beide Beispiele jeweils mindestens zwei Eigenheiten bzw. Sonderfälle dar, die mit Schüler:innen zur Veranschaulichung des Abbildungskonzepts diskutiert werden könnten.

(Hinweise: Was bedeutet es mathematisch, dass zwei Personen im Adressbuch die gleiche Adresse haben? Was entspricht einer Fehlermeldung, wenn das entsprechende Fach im Getränkeautomaten leer ist? usw.)