Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 7
Abgabe: 30.11.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Äquivalenzrelationen, 3+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} x \sim_1 y :&\iff (x > 0, y > 0) \vee (x = 0 = y) \vee (x < 0, y < 0) && \text{für } x, y \in \mathbb{Z}, \\ x \sim_2 y :&\iff x_1 - 2x_2 = y_1 - 2y_2 && \text{für } x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \end{aligned}$$

zwei Äquivalenzrelationen $\sim_1 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{Z})$ und $\sim_2 \in \mathrm{Rel}(\{-2,-1,0,1,2\}^2)$ definiert werden. Hierbei ist im zweiten Fall $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Geben Sie außerdem alle Äquivalenzklassen von $\sim_1$ und $\sim_2$ konkret durch Auflisten derer Elemente an.

(b) Es seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Mengen. Beweisen Sie, dass durch

$$f \sim g :\iff \text{Es gibt eine Bijektion } \pi\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \text{ mit } \pi \circ f = g$$

für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ definiert wird. Bestimmen Sie speziell für $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{Y} = \{1,2\}$ und $f_*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $f_*(1) := f_*(4) := 2$ und $f_*(2) := f_*(3) := 1$ die Äquivalenzklasse $[f_*]_\sim$.

Aufgabe 2 (Modulo-Rechnen, 1+3+2 Punkte):

(a) Bestimmen Sie (indem Sie fünf Elemente explizit aufzählen, die restlichen mit Pünktchen andeuten) die Äquivalenzklassen

$$[9]_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}, \qquad [-4]_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}, \qquad [3]_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}.$$

(b) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Gleichungen für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\begin{array}{rlrlrl} 147 = -7 & \bmod 10, & x = 2x+1 & \bmod 2, & (x-y)^3 = x^3+2y^3 & \bmod 3, \\ x^2 = x & \bmod 2, & x^6 = x & \bmod 5, & x = x+6 & \bmod 9. \end{array}$$

(c) Zeigen Sie: Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen $\mathrm{kgV}(m,n) \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Z}$ gilt stets

$$[x]_{\mathbb{Z}/mZ} \cap [x]_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = [x]_{\mathbb{Z}/\mathrm{kgV}(m,n)\mathbb{Z}}.$$

(Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass mit $m \mid z$ und $n \mid z$ für $z \in \mathbb{Z}$ stets auch $\mathrm{kgV}(m,n) \mid z$ gilt. Tatsächlich folgt dies aus der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Quotientenmengen und Faktorisierung, 4 Punkte):

Zeigen Sie, dass

$$(m_1, m_2) \simeq (n_1, n_2) :\iff m_1 + n_2 = n_1 + m_2 \qquad \text{für } (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$$

eine Äquivalenzrelation $\simeq$ auf $\mathbb{N}^2$ definiert und $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $(n_1, n_2) \mapsto n_1 - n_2$ surjektiv ist. Folgern Sie mit Resultaten der Vorlesung, dass eine Bijektion $\mathbb{N}^2/{\simeq} \to \mathbb{Z}$ existiert.

Lehramtsaufgabe (1+2+2 Punkte):

Folgende Aufgabe stammt aus einem Schulbuch für die sechste Klasse:

Bei einem Geländespiel der „Vögel" gegen die „Fische" verschlüsseln die „Vögel" Meldungen. Das geschieht mit Hilfe der nebenstehenden Tabelle. Das Wort BACH sieht in der Meldung so aus: 7-6-8-13.
a) Verschlüssele die Meldung: TREFF-KOHLMARKT-1600-ADLER (Zahlen werden nicht verschlüsselt).
b) Die Antwort der Meldung aus a) lautet: 10-14-19-1-10-23-24-25-6-19-9-10-19 – 18-10-14-24-10. Entschlüssele die Antwort.
c) Diesen Code kann man kurz so beschreiben: $y = x +_{26} 5$. Erklär diese Beschreibung.

	x	y		x	y
A	1	6	N	14	19
B	2	7	O	15	20
C	3	8	P	16	21
D	4	9	Q	17	22
E	5	10	R	18	23
F	6	11	S	19	24
G	7	12	T	20	25
H	8	13	U	21	0
I	9	14	V	22	1
J	10	15	W	23	2
K	11	16	X	24	3
L	12	17	Y	25	4
M	13	18	Z	0	5

(a) Beschreiben Sie kurz den mathematischen Hintergrund des Aufgabenteils c) der Schulbuchaufgabe.

(b) Geben Sie zwei Erklärungsansätze an, die Sie von Schüler:innen in Aufgabenteil c) erwarten würden. Begründen Sie, welchen Ansatz Sie als den angemessensten bewerten.

(c) Diskutieren Sie, inwiefern Sie die Schreibweise $y = x +_{26} 5$ für angemessen halten.