Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 9
Abgabe: 14.12.21 via moodle
bis spätestens 14:15 Uhr

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Verknüpfungen, Halbgruppen, Gruppen, 2+2+3+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Zahlbereich $\mathbb{B} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ die Festlegung

$$x \circledast y := x + y + xy \text{ für } x, y \in \mathbb{B}$$

eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{B}$ ergibt, also $(\mathbb{B}, \circledast)$ eine kommutative Halbgruppe ist. Bestimmen Sie das neutrale Element, *alle* invertierbaren Elemente und deren Inversen in $(\mathbb{Z}, \circledast)$.

(b) Zeigen Sie, dass es in der Halbgruppe $(\mathrm{Abb}(\mathbb{Z}), \circ)$ unendlich viele idempotente Elemente und unendlich viele selbstinverse Elemente gibt.

(c) Zeigen Sie, dass man für $\mathbb{B} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ durch

$$x \divideontimes y := \begin{cases} xy & \text{falls } x > 0 \\ \frac{x}{y} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \text{ für } x, y \in \mathbb{B}\backslash\{0\}$$

eine assoziative, jedoch nicht kommutative Verknüpfung $\divideontimes$ auf $\mathbb{B}\backslash\{0\}$ erhält. Bestimmen Sie das neutrale Element von $(\mathbb{B}\backslash\{0\}, \divideontimes)$ und zeigen Sie, dass $(\mathbb{B}\backslash\{0\}, \divideontimes)$ tatsächlich eine nicht-abelsche Gruppe ist.

Für eine Halbgruppe $(G, *)$, $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$ waren Potenzen $g^n \in G$ rekursiv durch die Festlegungen $g^1 := g$ und $g^{n+1} := g * g^n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(d) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über eine Gruppe $(G, *)$ äquivalent sind:

(a) $(G, *)$ ist abelsch.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $g, h \in G$ gilt $(g * h)^n = g^n * h^n$.

(c) Für alle $g, h \in G$ gilt $(g * h)^2 = g^2 * h^2$.

(d) Für alle $g, h \in G$ gilt $(g * h)^{-1} = g^{-1} * h^{-1}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Produkt- und Restklassen-Gruppen, 2+2+2+2 Punkte):

(a) Seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ Halbgruppen. Zeigen Sie, dass auch $(G \times H, *_\times)$ mit der komponentenweisen Verknüpfung

$$(g, h) *_\times (g', h') := (g *_G g', h *_H h') \text{ für } (g, h), (g', h') \in G \times H$$

eine Halbgruppe ist. Sind $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ sogar Gruppen, so ist auch $(G \times H, *_\times)$ eine Gruppe.

Gemäß (a) ist auch das Produkt von Restklassenringen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ stets eine Gruppe, die nun untersucht werden soll:

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 ist, und bestimmen Sie alle Erzeuger von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.

(c) Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ alle Elemente selbstinvers sind und diese Gruppe *nicht* zyklisch ist.

(d) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $m, n \in \mathbb{N}$, unter der die Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ zyklisch ist. (Hier reicht die Angabe der richtigen Bedingung. Sie brauchen nicht *beweisen*, dass diese notwendig und hinreichend ist.)

Lehramtsaufgabe (2+2 Punkte)

(a) Wo kann man die hier behandelten Strukturen (Halbgruppen, Gruppen, etc.) in der Schulmathematik wiederfinden? Geben Sie verschiedene Beispiele an.

(b) Betrachten Sie die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$. Benennen Sie, welche Eigenschaften von Gruppen Schüler:innen anhand dieser Zahlbereichserweiterung implizit erfahren können. Erklären sie kurz, inwiefern für Schüler:innen damit eine veränderte Interpretation des Minus-Zeichens einhergeht.