Topologie (Bachelor)

Wintersemester 2015/16

Christoph Schweigert

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bereich Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 3.05.2016)

Inhaltsverzeichnis

Literatur:

Literatur, die ich bei der Vorbereitung häufig herangezogen habe:

- B.v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer 2001
- R. Stöcker, H. Zieschang, Algebraische Topologie, Teubner 1994
- G. Laures, M. Szymik, Grundkurs Topologie, Spektrum, 2009
- L.A. Steen, J.A. Seebach, Counterexamples in Topology, Dover, 1995

Dieses Skript basiert auf einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 2015/16, an der Universität Hamburg gehalten habe. Ich danke meiner Kollegin Birgit Richter für die Überlassung ihrer Unterlagen zu der Vorlesung Topologie. Frederik Bartelmann, Lukas Müller, Louis-Hadrien Robert, Patrick Schattauer, Leonard Wienke und Jan-Ole Willprecht, danke ich für zahlreiche Hinweise zum Skript.

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws15/tskript.pdf`
als pdf-Datei. Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen an
`christoph.schweigert@uni-hamburg.de`!

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Einleitung

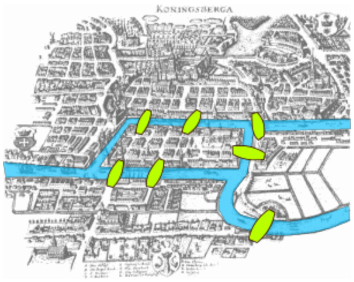
Die Topologie ist ein fundamentales Teilgebiet der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften mathematischer Strukturen, die unter stetigen Verformungen erhalten bleiben, wobei der Begriff der Stetigkeit in sehr allgemeiner Form definiert wird.

Die Topologie ist eine Grundlagendisziplin und neben der Algebra zweiter Stützpfeiler für eine große Anzahl anderer Felder der Mathematik. Sie ist besonders wichtig für Geometrie, Analysis, Funktionalanalysis und die Theorie der Lie-Gruppen. Sie hat Anwendungen in der mathematischen Physik und tiefe Beziehungen zu Mengenlehre und Kategorientheorie. Die mengentheoretische Topologie kann hierbei als Grundlage für all diese Teildisziplinen angesehen werden.

Die moderne Formulierung der Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie hat sich relativ spät herausgebildet. Einige Meilensteine:

- 1904: Explizite Definition topologischer Räume über den Umgebungsbegriff durch Felix Hausdorff (mit Trennungsaxiom), cf. Definition 1.2.4 und Satz 1.2.6.
- 1906: Definition des metrischen Raums durch Fréchet, cf. Kapitel 1.2.
- 1925 Definition von Topologien im heutigen Sinn durch Alexandroff, cf. Kapitel 1.3.

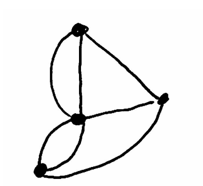
Topologische Probleme wurden schon früher untersucht, zum Beispiel 1736 durch Euler beim Königsberger Brückenproblem. [1]



Die folgenden zwei verwandten Fragen können gestellt werden:

- Gibt es einen Rundweg, bei dem man jede der sieben Brücken einmal überquert?
- Gibt es einen Weg, der nicht unbedingt geschlossen ist und bei dem man jede der sieben Brücken einmal überquert?

Das Problem ist topologisch, da es nicht auf die genaue Lage der Brücken ankommt, das Problem also invariant ist unter stetiger Deformation. Entscheidend ist nur der zu Grunde liegende Graph



[1] Quelle: Wikipedia

und man fragt nach einem Eulerkreis oder Eulerweg. Ein Eulerweg existiert genau dann, wenn 2 oder kein Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten hat; ein Eulerkreis genau dann, wenn kein Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten hat.

Wir werden in dieser Vorlesung erst Grundlagen der mengentheoretischen Topologie skizzieren und dann einfache Begriffe der algebraischen Topologie kennenlernen. Diese hat das Ziel, topologischen Räumen und stetigen Abbildungen diskrete bzw. algebraische Objekte zuzuordnen.

Beispiel 1.1.1.
Sei X eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zwei Punkte $x, y \in X$ heißen wegäquivalent, wenn es einen Weg gibt, der x und y verbindet, also eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$.

Wir schreiben dann $x \sim y$; dies definiert eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\pi_0(X)$ bezeichnet.

Dies liefert eine Invariante:

Lemma 1.1.2.
Sind $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ und sind

$$f : X \to Y \quad \text{und} \quad g : Y \to X$$

stetige Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so sind die Mengen $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ gleichmächtig.

Die Beweisidee ist, Wege mittels f und g zu transportieren. Mit solchen Invarianten kann man Sätze beweisen:

Satz 1.1.3.
Sei $n \geq 2$. Dann gibt es keine stetigen Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Beweis.
Indem wir gegebenenfalls eine Verschiebung vornehmen, können wir annehmen, dass $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$ gilt. Auch die Einschränkungen $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ und $g|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ gilt dann

$$g|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \circ f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

und

$$f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \circ g|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\,;$$

aber die Menge $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ hat zwei Elemente und die Menge $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ hat für $n \geq 2$ nur ein Element. $\square$

1.2 Metrische Räume

Aus der Analysis sind Sie zumindest mit der Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \quad \text{für } x,y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

der Standardmetrik oder euklidischen Metrik, vertraut.

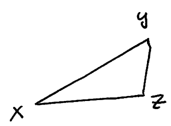
Definition 1.2.1
Ein metrischer Raum ist eine Menge X, zusammen mit einer Funktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Positivität: $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$ und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.*
2. *Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$.*
3. *Dreiecksungleichung:*

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{für alle } x,y,z \in X \ .$$



Die reelle Zahl $d(x,y)$ für $x,y \in X$ heißt auch der Abstand von x und y,

Beispiele 1.2.2.
Die folgenden Räume sind metrische Räume:

1. Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.
2. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \ .$$
3. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik
$$d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \ .$$
4. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik
$$d_r(x,y) = \sqrt{d_2(x,y)}$$
die nicht von einer Norm stammt.
5. Auf einer beliebigen Menge X gibt es immer die diskrete Metrik
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x = y \\ 1 \text{ falls } x \neq y \end{cases}$$

6. Auf dem Raum $C([0,1],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ definiert das Integral die Metrik
$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \ .$$

7. Sei $X=\mathbb{R}$ und $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine (der Einfachheit halber) stetige von Null verschiedene Funktion. Dann ist
$$d_\varphi(x,y) = |\int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t|$$
eine Verzerrung der Metrik $d_1(x,y)=|x-y|$.

Bemerkungen 1.2.3.

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $Y\subset X$ eine Teilmenge. Dann versieht die Einschränkung $d|_{Y\times Y}$ die Teilmenge Y mit der Struktur eines metrischen Raumes.

2. Sind (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume, so hat auch das kartesische Produkt $X_1\times X_2$ durch
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$
die Struktur eines metrischen Raums.

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $\epsilon>0$. Dann führen wir für $x\in X$ die Teilmenge
$$B_\epsilon(x) := \{y\in X \mid d(x,y)<\epsilon\}$$
ein, die offene Kugel vom Radius ϵ um x.

Definition 1.2.4
Sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. *Eine Teilmenge $U\subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x\in X$, wenn sie eine offene Kugel um x enthält, also falls es ein $\epsilon>0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x)\subset U$ gilt.*

2. *Eine Teilmenge $O\subset X$ heißt offen, wenn es für jedes $x\in O$ ein $\epsilon>0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x)\subset O$ gilt, also wenn die Teilmenge O eine Umgebung jedes seiner Punkte ist.*

3. *Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt abgeschlossen, falls das Komplement $X\setminus A$ offen ist.*

Bemerkungen 1.2.5.

1. Jede offene Kugel $B_\epsilon(x)$ in einem metrischen Raum ist offen und insbesondere eine Umgebung von x. Denn sei $y\in B_\epsilon(x)$ beliebig. Setze $\epsilon' := \epsilon - d(x,y) > 0$. Dann ist $B_{\epsilon'}(y)\subset B_\epsilon(x)$. Denn
$$z\in B_{\epsilon'}(y) \Leftrightarrow d(z,y)<\epsilon' \quad\Rightarrow\quad d(z,x)\le d(z,y)+d(y,x)<\epsilon'+d(x,y)=\epsilon\ ,$$
also $z\in B_\epsilon(x)$.

2. Für jeden Punkt x in einem metrischen Raum (X,d) ist die Menge $\{x\}$ abgeschlossen. Denn für $y\in X\setminus\{x\}$ wähle $\epsilon<d(x,y)$ und finde $B_\epsilon(y)\subset X\setminus\{x\}$. Also ist das Komplement $X\setminus\{x\}$ offen.

Satz 1.2.6.
Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(U1) Jede Umgebung von $x \in X$ enthält auch x. Der metrische Raum X selbst ist eine Umgebung von x.

(U2) Ist U Umgebung von $x \in X$ und $V \supset U$, so ist auch V Umgebung von x.

(U3) Sind U_1, U_2 Umgebungen von $x \in X$, so auch ihr Schnitt $U_1 \cap U_2$.

(U4) Ist U Umgebung von $x \in X$, so gibt es eine weitere Umgebung V von x, so dass U eine Umgebung von allen $y \in V$ ist.

Beweis.
Die Aussagen (U1) und (U2) sind klar. Für (U3) finde offene Kugeln $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$ für $i = 1, 2$. Dann ist $B_{\min(\epsilon_1,\epsilon_2)}(x) \subset U_1 \cap U_2$ und $\min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$.

Zum Beweis von U(4) bemerken wir, dass es $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Dann hat $V := B_\epsilon(x)$ die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 1.2.7.
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(O1) Die Mengen $\emptyset, X$ sind offen.

(O2) Mit zwei Mengen O_1, O_2 ist auch ihr Schnitt $O_1 \cap O_2$ offen.

(O3) Für eine beliebige Familie $(O_i)_{i\in I}$ offener Mengen ist auch die Vereinigung $\cup_{i\in I} O_i$ offen.

Beweis.

(O1) Für $\emptyset$ ist die leere Bedingung erfüllt. Für X ist die Aussage (U1).

(O2) Für jeden Punkt $x \in O_1 \cap O_2$ finde offene Kugeln $B_{\epsilon_i}(x) \subset O_i$ für $i = 1, 2$. Dann ist $B_{\min(\epsilon_1,\epsilon_2)}(x) \subset O_1 \cap O_2$ und somit ist der Schnitt $O_1 \cap O_2$ offen. Allgemein sind endliche Schnitte offener Mengen offen.

(O3) Liegt $x \in \cup_{i\in I} O_i$, so gibt es wenigstens $i \in I$ mit $x \in O_i$. Da O_i offen ist, finde $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset O_i$. Dann ist auch $B_\epsilon(x) \subset \cup_{i\in I} O_i$.

□

Für den nächsten Satz erinnern wir an die de Morganschen Regeln: das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente,

$$X \setminus \cup_{i\in I} U_i = \cap_{i\in I}(X \setminus U_i) \ ;$$

Das Komplement eines Schnitts ist die Vereinigung der Komplemente,

$$X \setminus \cap_{i\in I} U_i = \cup_{i\in I}(X \setminus U_i) \ .$$

Satz 1.2.8.
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(A1) Die Mengen $\emptyset, X$ sind abgeschlossen.

(A2) Mit zwei Mengen A_1, A_2 ist auch ihre Vereinigung $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(A3) Für eine beliebige Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch der Schnitt $\cap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.

Beweis.
Wir betrachten Komplemente:

(A1) Es gilt $\emptyset = X \setminus X$ und $X = X \setminus \emptyset$ und X und $\emptyset$ sind nach Satz 1.2.7 (O1) offen.

(A2) Die Mengen $O_i := X \setminus A_i$ sind offen. Nach Satz 1.2.7 (O2) ist somit

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = O_1 \cap O_2$$

offen.

(A3) Die Mengen $O_i := X \setminus A_i$ sind offen. Nach Satz 1.2.7 (O3) ist

$$X \setminus \cap_{i\in I} A_i = \cup_{i\in I} X \setminus A_i = \cup_{i\in I} O_i$$

offen.

$\square$

Definition 1.2.9
Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume.

1. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig im Punkt $x \in X$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $d(x, y) < \delta$ folgt $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

2. *Ein Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig, wenn sie in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.*

3. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt gleichmäßig stetig , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $d(x, y) < \delta$ folgt $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ für alle $x, y \in X$.*

Wir erinnern an folgende Eigenschaften von Urbildern einer Abbildung $f : X \to X'$:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\emptyset) & = & \emptyset \\ f^{-1}(X') & = & X \\ f^{-1}(M \cup N) & = & f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \\ f^{-1}(M \cap N) & = & f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \\ f^{-1}(X' \setminus N) & = & f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(N) = X \setminus f^{-1}(N) \\ M \subseteq N & \Rightarrow & f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N) \end{array} \tag{1}$$

Satz 1.2.10.
Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.

2. Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung V von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

3. Ist O offen in X', so ist $f^{-1}(O)$ offen in X.

4. Ist A abgeschlossen in X', so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beweis.

(1)⇒(2) Ist V eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Da f als stetig vorausgesetzt ist, finde $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.

Nun gilt $E \subset f^{-1}f(E)$ für alle Teilmengen $E \subset X$. Somit ist

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}B_\epsilon(f(x)) \subset f^{-1}(V) \ .$$

Somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X.

(2)⇒(3) ist klar, denn eine Menge ist offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

(3)⇒(4) Ist $A \subset X'$ abgeschlossen, so ist $O := X' \setminus A$ offen und deswegen

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(X' \setminus O) = f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(O) = X \setminus f^{-1}(O)$$

abgeschlossen.

(4)⇒(1) Sei $x \in X$ beliebig. Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge $X' \setminus B_\epsilon(f(x))$ abgeschlossen und somit nach Voraussetzung $f^{-1}(X' \setminus B_\epsilon(f(x))) = X \setminus f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset X$ abgeschlossen. Dann ist das Komplement $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen und enthält x, so dass es $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, also $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.

□

Man überzeugt sich mit ähnlichen Argumenten, dass $f : X \to X'$ genau dann in $x \in X$ stetig ist im Sinne von Definition 1.2.9.1, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Definition 1.2.11

1. *Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen stark äquivalent, wenn es $\alpha, \beta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt*

$$\alpha d_1(x,y) < d_2(x,y) < \beta d_1(x,y) \ .$$

2. *Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen äquivalent, wenn es für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt*

$$\begin{aligned} d_1(x,y) < \delta \quad &\Rightarrow \quad d_2(x,y) < \epsilon \\ d_2(x,y) < \delta \quad &\Rightarrow \quad d_1(x,y) < \epsilon \ . \end{aligned}$$

Bemerkungen 1.2.12.

1. Sind zwei Metriken d_1, d_2 äquivalent, so gibt es für jede Kugel $B_\epsilon^{d_1}(x)$ ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\epsilon^{d_1}(x)$ und umgekehrt. Äquivalente Metriken ergeben also dieselben offenen und somit auch dieselben abgeschlossenen Mengen.

2. Sind d_1 und d_2 äquivalent, so sind die Abbildungen

$$\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

stetig. Denn alle Urbilder offener Mengen sind offen, so dass nach Satz 1.2.10 die Identitätsabbildung stetig ist.

3. Sind d_1 und d_2 stark äquivalent, so sind die Abbildungen

$$\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

gleichmäßig stetig.

Beispiele 1.2.13.

1. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Metriken $d(x, y) := |x^3 - y^3|$, vgl. Beispiel 1.2.2.7 mit $\varphi(t) = 3t^2$ und

$$|\int_x^y 3t^2 \mathrm{d}t| = |t^3|_x^y| \ ,$$

sowie die euklidische Metrik d_2. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

2. Die Metriken d_1, d_2, d_∞ auf $\mathbb{R}^n$ sind stark äquivalent.

3. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine äquivalente Metrik. Wegen $d'(x, y) < 1$ ist die Metrik beschränkt. Insbesondere ist jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.

1.3 Topologische Räume

Stetige Abbildungen sollen für uns der grundlegende Begriff sein. Aus Satz 1.2.10 folgt, dass hierfür nicht die Metrik selbst, sondern die durch die Metrik definierten offenen Mengen bzw. Umgebungen entscheidend sind. In topologischen Räumen werden die offenen Mengen zum grundlegenden Begriff. Wir orientieren uns an Satz 1.2.7:

Definition 1.3.1

Ein topologischer Raum ist eine Menge X, zusammen mit einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, für die gilt

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Mit $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ ist auch der Schnitt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(O3) Für eine beliebige Familie $(O_i)_{i \in I}$ von Mengen $O_i \in \mathcal{T}$ ist auch die Vereinigung $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ heißt dann eine Topologie auf X und die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen von $\mathcal{T}$.

Es reicht auch aus zu fordern, dass $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen. Denn der Durchschnitt über der leeren Indexmenge $I = \emptyset$ ist X, da eine leere Bedingung vorliegt, und die Vereinigung über $\emptyset$ ist $\emptyset$.

Beispiele 1.3.2.

1. Metrische Räume mit offenen Mengen wie in Definition 1.2.4 sind nach Satz 1.2.7 topologische Räume.

2. Jede Menge X wird durch die Potenzmenge, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, zum topologischen Raum, in dem alle Mengen offen sind. Dies ist die diskrete Topologie auf X. Diese Topologie wird durch die diskrete Metrik aus Beispiel 1.2.2.5 definiert.

3. Die indiskrete Topologie oder Klumpentopologie auf einer Menge X ist gegeben durch $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$.

4. Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge, d.h. die Relation $\leq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und für je zwei $x, y \in X$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Ferner habe X weder ein minimales noch ein maximales Element. Dann ist die Ordnungstopologie folgendermaßen definiert: man bildet das System $\mathcal{S}$ der Mengen

$$(-\infty, a) := \{x \in X \,|\, x < a\} \quad \text{und} \quad (a, \infty) := \{x \in X \,|\, a < x\} \quad \text{für } a \in X \ .$$

   Das System der Vereinigungen von allen endlichen Durchschnitten von Mengen in $\mathcal{S}$ ist die Ordnungstopologie von $(X \leq)$.

5. Die koendliche Topologie auf einer Menge X wird durch die folgenden offenen Mengen definiert: $O \subset X$ ist offen, wenn das Komplement $X \setminus O$ endlich ist oder $O = \emptyset$ gilt.

   Offensichtlich sind dann nach Annahme $\emptyset$ und wegen $X \setminus X = \emptyset$ auch X in der Topologie. Wegen der de Morganschen Regeln

$$\begin{aligned} X \setminus (O_1 \cap O_2) &= (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) \\ X \setminus \cup_{i \in I} O_i &= \cap_{i \in I} (X \setminus O_i) \end{aligned}$$

   ist die Topologie unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

Definition 1.3.3
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, $X \setminus A \in \mathcal{T}$.*

2. *Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subset U$. Mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von $x \in X$, das Umgebungssystem von x.*

3. *Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührpunkt einer Teilmenge $B \subset X$, falls für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap B \neq \emptyset$, also wenn in jeder Umgebung von x Elemente von B liegen. Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge B, wenn in jeder Umgebung von x Punkte von B liegen, die von x verschieden sind. Jeder Häufungspunkt ist also ein Berührpunkt. Jeder Berührpunkt, der nicht in B liegt, ist automatisch auch ein Häufungspunkt.*

4. *Sei $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir*

$$\overline{B} := \bigcap_{C \supset B, C \, abg.} C$$

   die abgeschlossene Hülle oder der Abschluss von B.

5. *Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer Punkt einer Teilmenge $B \subset X$, falls es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $x \in U \subset B$.*

6. *Sei $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir*

$$\mathring{B} := \bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$$

den offenen Kern von B.

7. *Sei $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir*

$$\partial B := \{x \in X \mid \text{ für alle } U \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } U \cap B \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus B)\} = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$$

den Rand von B.
Jede Umgebung eines Randpunkts von B enthält also Punkte von B und des Komplements von B.

Satz 1.3.4.

1. Die abgeschlossenen Mengen für eine Topologie $(X, \mathcal{T})$ erfüllen die Eigenschaften (A1)-(A3) aus Satz 1.2.8.

2. Die Umgebungen für eine Topologie $(X, \mathcal{T})$ erfüllen die Eigenschaften (U1)-(U4) aus Satz 1.2.6.

Bemerkung 1.3.5.
Um eine Topologie zu definieren, kann man auch die abgeschlossenen Mengen angeben. (In der Praxis verwendet man dafür in der Regel andere Methoden, siehe Kapitel 1.4.)

Definition 1.3.6
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X, \mathcal{T}')$ topologische Räume.

1. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig in $x \in X$, wenn alle Urbilder der Umgebungen von $f(x)$ Umgebungen von x sind, also wenn für jedes $U \in \mathcal{U}(f(x))$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$.*

2. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, also wenn für jedes $O' \in \mathcal{T}'$ gilt $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$.*

Wegen Satz 1.2.10 ist diese Definition im Falle metrischer Räume äquivalent zu Definition 1.2.9. Man überlegt sich leicht, dass die Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig ist. Man überlege sich auch, dass eine Abbildung $f : X \to X'$genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Satz 1.3.7.
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen. Es gilt $A \subset \overline{A}$.
Es ist $\overline{A} = A$ genau dann, wenn A abgeschlossen ist.
Die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ ist die Menge der Berührpunkte von A in X.

2. Der offene Kern $\mathring{B}$ einer Teilmenge $B \subset X$ ist offen. Es gilt $\mathring{B} \subset B$.
Es ist $\mathring{B} = B$ genau dann, wenn B offen ist.
Der offene Kern $\mathring{B}$ ist die Menge der inneren Punkte von B in X.

Beweis.
Wir zeigen nur die Aussagen in 1.3.7.1; die Aussagen in Satz 1.3.7.2 folgen dual.

Als Schnitt abgeschlossener Mengen, die A enthalten, ist $\overline{A}$ nach Satz 1.3.4 abgeschlossen und enthält A. Dies zeigt die erste Aussage.

Zur zweiten Aussage:
Ist A abgeschlossen, so ist A eine der Mengen, über die der Schnitt $\overline{A}$ genommen wird, also gilt $\overline{A} \subset A$. Die Umkehrung folgt, weil $\overline{A}$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Nun zur letzten Aussage:
Sei $x \in X$ kein Berührpunkt von A. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap A = \emptyset$. Also ist $A \subset X \setminus U$. Da U eine Umgebung von x ist, finde eine offen Teilmenge $O \subset U$, die x enthält. Dann ist $X \setminus U \subset X \setminus O$. Es ist $X \setminus O$ abgeschlossen mit $A \subset X \setminus O$ und somit $\overline{A} \subset X \setminus O$. Also tritt die Menge $X \setminus O$ im Durchschnitt auf, der $\overline{A}$ definiert. Damit ist aber $x \notin \overline{A}$.

Sei umgekehrt $x \notin \overline{A}$. Dann existiert eine abgeschlossene Obermenge $A \subset C$ mit $x \notin C$. Die offene Menge $V := X \setminus C$ in X enthält x, ist zu A disjunkt, $A \cap V = \emptyset$. Dann ist aber x kein Berührpunkt von A.

□

Bemerkung 1.3.8.

1. Seien A, B Teilmengen eines topologischen Raums X. Aus $A \subset B$ folgt dann $\overline{A} \subset \overline{B}$, denn jede Menge, die im Schnitt $\bigcap_{C \supset B, C\text{abg.}} C$ auftritt, tritt auch im Schnitt $\bigcap_{C \supset A, C\text{abg.}} C$ auf.

2. Ebenso gilt $\mathring{A} \subset \mathring{B}$, denn jede Menge, die in der Vereinigung $\bigcup_{O \subset A, O \text{ offen}} O$ auftritt, tritt auch in der Vereinigung $\bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$ auf.

3. Es gilt
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und } A \mathring{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B} \ .$$
Denn es ist $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Daraus folgt, dass $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ gilt, weil $\overline{A} \cup \overline{B}$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

   Umgekehrt folgt aus $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$, dass $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ und somit die umgekehrte Inklusion $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

   Der Beweis der Identität $A \mathring{\cap} B = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ ist dual:
   Aus $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$ folgt $A \mathring{\cap} B \subset \mathring{A}$ und $A \mathring{\cap} B \subset \mathring{B}$. Daher gilt $A \mathring{\cap} B \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Umgekehrt gilt $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$. Daraus folgt $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \mathring{\cap} B$, weil $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ als endlicher Schnitt offener Mengen offen ist und somit gleich seinem Inneren ist.

Definition 1.3.9
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. *Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset X$ liegt dicht in X, wenn der Abschluss von A gleich X ist, $\overline{A} = X$.*

2. *Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset X$ liegt nirgends dicht, wenn $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.*

Als Beispiel betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: es ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also liegt $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht. In diesem Beispiel ist also $\overline{\mathring{A}} \neq \emptyset$.

Definition 1.3.10
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, in Zeichen $x_n \to x$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Beispiel 1.3.11.
Betrachte die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ aus Beispiel 1.3.3. Dann konvergiert jede Folge gegen jedes Element von X. Für eine Menge X mit zwei oder mehr Elementen hat eine Folge also mehr als einen Grenzwert.

1.4 Basen, Subbasen und Umgebungen

Wir führen nun Begriffe ein, die es uns erlauben, Topologien explizit anzugeben.

Definition 1.4.1
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. *Eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn jedes $O \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung beliebig vieler $B_i \in \mathcal{B}$ ist.*

2. *Eine Familie $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heißt Subbasis von $\mathcal{T}$, falls jedes $O \in \mathcal{T}$ eine beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen $S \in \mathcal{S}$ ist.*

Bemerkungen 1.4.2.

1. Als Beispiel betrachte auf der Menge $X = \{0, 1, 2\}$ die Subbasis $\mathcal{S} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$. Der Schnitt $\{0\} = \{0, 1\} \cap \{0, 2\}$ ist dann offen, aber kann nicht als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{S}$ geschrieben werden. Also ist $\mathcal{S}$ *keine* Basis.

2. Jede Basis ist auch eine Subbasis, aber nicht jede Subbasis ist eine Basis. Für eine Basis muss gelten, dass wenn $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{B}$ es $W \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in W \subset U \cap V$ gilt.

Beispiele 1.4.3.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0, x \in X\}$ eine Basis. Denn sei $O \subset X$ offen. Finde für jedes $x \in O$ eine offene Kugel $B_{\epsilon(x)}(x) \subset O$ und schreibe $O = \cup_{x\in O} B_{\epsilon(x)}(x)$.

2. Sei $(X, \leq)$ total geordnet und $|X| \geq 2$. Setze für $a, b \in X$

$$(-\infty, a) := \{x \in X \mid x < a\} \quad \text{und} \quad (b, \infty) := \{x \in X \mid b < x\} \; .$$

Dann ist

$$\mathcal{S} := \{(-\infty, a)\, , a \in X\} \cup \{(b, \infty)\, , b \in X\}$$

eine Subbasis und

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \,|a < b\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

eine Basis der Ordnungstopologie aus Beispiel 1.3.2.4.

3. *Jedes* System von Teilmengen $\mathcal{S}$ von X ist Subbasis einer Topologie. Denn betrachtet man beliebige Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Teilmengen in $\mathcal{S}$, so sind die Axiome (O1),(O2) und (O3) automatisch erfüllt. Eine Basis dieser Topologie ist durch endliche Schnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ gegeben,

$$\mathcal{B} := \{S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_n} \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ und } S_{i_k} \in \mathcal{S}\}$$

und die Topologie ist

$$\mathcal{T} := \{\cup_i B_i \,|\, B_i \in \mathcal{B}\} \ .$$

(Sub-)Basen ersparen Arbeit:

Satz 1.4.4.
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Die folgenden Aussagen für eine Abbildung $f : X \to X'$ sind äquivalent:

1. $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ ist stetig.
2. Sei $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis von $\mathcal{T}'$. Für jedes $B' \in \mathcal{B}'$ ist $f^{-1}(B')$ offen, also $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$.
3. Sei $\mathcal{S}'$ eine beliebige Subbasis von $\mathcal{T}'$. Für jedes $S' \in \mathcal{S}'$ ist $f^{-1}(S')$ offen, also $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}$.

Beweis.
(1) $\Rightarrow$ (2) und (1) $\Rightarrow$ (3) sind klar, da Elemente einer Basis offen sind. Da jede Basis auch eine Subbasis ist, folgt (3) $\Rightarrow$ (2). Für (2) $\Rightarrow$ (1) schreibe eine offene Menge als Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}'$ und wende Eigenschaften des Urbilds (1) an. $\square$

Definition 1.4.5
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ des Umgebungssystems heißt Umgebungsbasis von x, falls in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ liegt mit $x \in B \subset U$.

Insbesondere sind die Elemente einer Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ Umgebungen von x.

Beispiel 1.4.6.
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann bilden die offenen Kugeln $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x.

Satz 1.4.7.
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ für alle $U \in \mathcal{B}(f(x))$, wobei $\mathcal{B}(f(x))$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$ ist.

Beweis.
Ist f in $x \in X$ stetig, so sind nach Definition die Urbilder von Umgebungen von $f(x)$ Umgebungen von x, also insbesondere die Urbilder der Mengen in $\mathcal{B}(f(x))$.

Umgekehrt sei U eine beliebige Umgebung von $f(x)$. U enthält eine Umgebung $B \in \mathcal{B}(f(x))$. Wir haben $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(B)$ ist nach Voraussetzung eine Umgebung von x. Deswegen ist auch $f^{-1}(U)$ eine Umbegung von x. $\square$

Wir diskutieren nun Abzählbarkeitseigenschaften:

Definition 1.4.8
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das Abzählbarkeitsaxiom

(AZ1) , wenn jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

(AZ2) , wenn die Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung 1.4.9.
Die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ2) impliziert (AZ1): ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis, so betrachte für $x \in X$ das System von Teilmengen $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \,|\, x \in B\}$.

Offenbar ist das System abzählbar. Es ist auch eine Umgebungsbasis von x: sei $U \ni x$ eine Umgebung; finde eine offene Menge $x \in O \subset U$, die als Vereinigung von Mengen in der Basis $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann, $O = \cup_{i \in I} O_i$. Eine offene Menge O_i enthält x, also $O_i \in \mathcal{B}(x)$ und es ist $O_i \subset O \subset U$.

Beispiele 1.4.10.

1. Für einen metrischen Raum (X, d) gilt (AZ1): betrachte für gegebenes $x \in X$ die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$, vgl. Beispiel 1.4.6.

2. Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie erfüllt (AZ2): betrachte $B_{1/n}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{Q}^n$.

3. Sei X eine überabzählbare Menge mit diskreter Topologie aus Beispiel 1.3.2.2. Dann gilt (AZ1), denn für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\} \in \mathcal{U}(x)$ eine einelementige Umgebungsbasis. Aber (AZ2) gilt nicht, denn alle Punkte sind offen.

Satz 1.4.11.
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1). Dann gilt:

1. $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn es eine Folge (a_n) in A gibt mit $a_n \to x$.

2. Sei $(X', \mathcal{T}')$ ein beliebiger weiterer topologischer Raum (der nicht unbedingt (AZ1) erfüllen muss). Dann ist eine Abbildung $f : X \to X'$ stetig in $x \in X$ genau dann, wenn aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$.

Gilt also die Abzählbarkeitsbedingung (AZ1) *im Urbild*, so reduziert sich Stetigkeit auf Folgenstetigkeit.

Beweis.

- Es gebe eine Folge $a_n \to a$ mit $a_n \in A$. Dann liegen in jeder Umgebung U von a fast alle Folgenglieder, und diese sind Elemente von A. Also ist $U \cap A \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von a. Also ist a ein Berührpunkt von A; nach Satz 1.3.7.1 gilt $a \in \overline{A}$. In diese Richtung geht die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1) nicht ein.

- Sei umgekehrt $x \in \overline{A}$. Wähle wegen (AZ1) eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x. Nun setze $V_1 := U_1$, $V_2 := U_1 \cap U_2$ und induktiv $V_n := V_{n-1} \cap U_n$, so dass wir eine Umgebungsbasis von x bekommen, mit $V_n \subset V_{n-1}$. In jedem $V_n \cap A$ liegt, da $x \in \overline{A}$ nach Satz 1.3.7.1 Berührpunkt von A ist, mindestens ein Punkt; wir wählen einen solchen, $a_n \in V_n \cap A$.

  Diese Folge konvergiert gegen a: denn sei W eine beliebige Umgebung von x, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $U_N \subset W$ und somit $V_N \subset W$ und sogar $V_n \subset V_N \subset W$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $a_k \in W$ für alle $k \geq N$.

- Sei $f : X \to X'$ stetig in $x \in X$ im Sinne von Definition 1.3.6.1; dann folgt die Folgenstetigkeit wie aus der Analysis bekannt. Sei $x_n \to x$ und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(U) \subset X$ eine Umgebung von x und enthält fast alle Folgenglieder von (x_n). Damit liegen aber auch fast alle Folgenglieder der Folge $\big(f(x_n)\big)$ in U.

- Wir nehmen an, dass die Funktion f nicht stetig in x ist. Das bedeutet, dass eine Umgebung U von $f(x)$ existiert, für die $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von x ist.

  Sei $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis des Punktes x. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Schnitt $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k$ eine Umgebung von x. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $C_n \not\subseteq f^{-1}(U)$, denn sonst wäre auch $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Wir wählen ein Element $x_n \in C_n \setminus f^{-1}(U)$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, was man ähnlich wie im zweiten Spiegelpunkt sieht. Aber die Folge $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann nicht gegen $f(x)$ konvergieren, weil für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f(x_n)$ nicht in U liegt. Deswegen ist f nicht folgenstetig in x.

□

Satz 1.4.12 (Urysohnscher Einbettungssatz)**.**
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ2) erfülle. Dann gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge in X.

Beweis.
Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbares System von Basismengen. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $p_n \in B_n$. Dann ist die Menge $P := \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht.

Denn in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ jedes Punktes $x \in X$ liegt eine offene Menge $O \subset U$, die x enthält. O enthält eine offene Menge B_i der Basis und somit den Punkt p_i. Also $p_i \in B_i \subset O \subset U$ und damit ist $U \cap P \neq \emptyset$. □

1.5 Vergleich von Topologien

Definition 1.5.1
Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf der gleichen Menge X. Die Topologie $\mathcal{T}_1$ heißt feiner als $\mathcal{T}_2$ (und $\mathcal{T}_2$ gröber als $\mathcal{T}_1$), wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ gilt. Dann ist jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_2$ auch offen in $\mathcal{T}_1$, also $O \in \mathcal{T}_1$.

Bemerkungen 1.5.2.

1. $\mathcal{T}_1$ ist feiner als $\mathcal{T}_2$ genau dann, wenn die Identität als Abbildung der topologischen Räume

   $$(X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T}_2)$$

   stetig ist.

2. Abbildungen aus der feineren Topologie $(X, \mathcal{T}_1)$ heraus haben es einfacher, stetig zu sein, denn es gibt im Urbild mehr offene Mengen. Abbildungen in die gröbere Topologie $(X, \mathcal{T}_2)$ hinein haben es einfacher, stetig zu sein, denn es muss für weniger offene Mengen das Urbild offen sein.

3. Es gibt weniger konvergente Folgen in der feineren Topologie $(X, \mathcal{T}_1)$ als in der gröberen Topologie $(X, \mathcal{T}_2)$, denn es muss für mehr offene Mengen getestet werden, ob dort fast alle Folgenglieder liegen.

4. Die indiskrete Topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die gröbste Topologie auf einer Menge X; die diskrete Topologie $(X, \mathcal{P}(X))$ ist die feinste Topologie auf einer Menge.

Definition 1.5.3
Eine bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus, wenn f und f^{-1} stetig sind. Die topologischen Räume heißen dann homöomorph, in Zeichen $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T}')$.

Beispiele 1.5.4.

1. Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe
$$\overline{B_1(0)} = \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$
ist homöomorph zum Quadrat $I^2 = [0,1] \times [0,1]$.

2. Die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} f : [0,1) & \to & \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \end{array}$$
ist zwar stetig und bijektiv, hat aber kein stetiges Inverses.

Definition 1.5.5

1. *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt offen, falls das Bild offener Mengen offen ist.*

2. *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt abgeschlossen, falls das Bild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.*

Satz 1.5.6.
Eine bijektive Abbildung
$$f : \quad (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$$
ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig und offen ist (und genau dann, wenn f stetig und abgeschlossen ist).

Bemerkung 1.5.7.
Ist f ein Homöomorphismus, so induziert f durch
$$\mathcal{T}_1 \ni O \mapsto f(O) \in \mathcal{T}_2$$
eine Bijektion von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.

Beispiele 1.5.8.

1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rrcl} f : & (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1-|x|} \end{array}$$
ist ein Homöomorphismus. Jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$.

2. Die stereographische Projektion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \frac{x_1}{1-x_3} + \mathrm{i}\frac{x_2}{1-x_3} \end{array}$$

mit $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ und $N = (0, 0, 1)$ ist ein Homöomorphismus.

1.6 Unterräume

Definition 1.6.1
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die <u>Unterraumtopologie</u> $\mathcal{T}_{X|Y}$ *ist definiert durch*

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\} \ .$$

Man rechnet leicht nach, dass die Axiome einer Topologie erfüllt sind. Eine Teilmenge $B \subset Y$ ist also genau dann offen in Y, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $B = Y \cap O$. Eine Teilmenge $A \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen in Y, wenn $A = Y \cap C$ für eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset X$ gilt.

Satz 1.6.2.

1. Die Inklusion $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig.

2. Es gilt die folgende universelle Eigenschaft: sei T ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f : T \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $\iota \circ f : T \to X$ stetig ist.

Beweis.

1. Die erste Aussage folgt wegen $\iota^{-1}(O) = Y \cap O$ nach Definition von $\mathcal{T}_{X|Y}$.

2. Ist f stetig, so ist die Verkettung stetiger Abbildungen $\iota \circ f$ stetig.

   Sei umgekehrt $\iota \circ f$ stetig und $B \subset Y$ offen, also $B = Y \cap O$ mit $O \in \mathcal{T}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(Y \cap O) \\ &= f^{-1}(\iota^{-1}(O)) \\ &= (\iota \circ f)^{-1}(O) \end{aligned}$$

   offen, weil $\iota \circ f$ nach Voraussetzung stetig ist.

□

Bemerkungen 1.6.3.

1. Gilt $X \supset Y \supset Z$, so ist

$$\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z} \ .$$

   Denn $O' \in \mathcal{T}_{X|Z}$ ist von der Form $O' = Z \cap O$ mit O offen in X und somit $O' = (O \cap Y) \cap Z \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$.

   Ist umgekehrt $O' \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$, so finde $O'' \in \mathcal{T}_{X|Y}$ mit $O' = O'' \cap Z$. Es gibt dann $O \in \mathcal{T}$ mit $O' = O \cap Y$ und somit gilt $O' = (O \cap Y) \cap Z = O \cap Z \in \mathcal{T}_{X|Z}$.

2. Die folgende Verallgemeinerung liegt nahe: sei M eine Menge, $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei eine Abbildung $f : M \to X$ gegeben. Wie kann man M so zu einem topologischen Raum machen, dass die Abbildung f stetig ist?

   Man sieht mit Hilfe der Eigenschaften (1) von Urbildern leicht, dass
   $$\mathcal{T}_f := \{f^{-1}(O) \,|\, O \text{ offen in } X\}$$
   die gröbste Topologie ist, für die f stetig ist. Sie heißt die von f <u>induzierte Topologie</u>.

3. Betrachte die gleiche Situation wie im vorgehenden Punkt. Sei nun T eine beliebige Menge. Dann haben wir eine Abbildung
   $$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathrm{Map}(T, M) & \to & \mathrm{Map}(T, X) \\ & \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \,, \end{array}$$
   wobei wir mit Map die Menge aller Abbildungen bezeichnen.

   Hat nun T überdies die Struktur eines topologischen Raums, so gibt es die Teilmenge $\mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(T, X) \subset \mathrm{Map}(T, X)$ der stetigen Abbildungen. Jede Topologie $\mathcal{T}_M$ auf der Menge M liefert eine Teilmenge $\mathrm{Map}_{\mathcal{T}_M}(T, M) \subset \mathrm{Map}(T, M)$ von stetigen Abbildungen.

   Die von f induzierte Topologie auf M hat nun die Eigenschaft, dass die stetigen Abbildungen $\varphi : T \to M$ genau die sind, für die $f_*(\varphi) = f \circ \varphi : T \to X$ stetig ist, also
   $$\mathrm{Map}_{\mathcal{T}_f}(T, M) := f_*^{-1}(\mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(T, X)) \;. \qquad (*)$$

   Zum Beweis:
   Angenommen, M trägt die durch f induzierte Topologie und $f \circ \varphi$ ist stetig. Sei $O_M \subset M$ offen, dann ist nach Definition der induzierten Topologie $O_M = f^{-1}(O_X)$ mit $O_X \subset X$ offen. Dann ist
   $$\varphi^{-1}(O_M) = \varphi^{-1} \circ f^{-1}(O_X) = (f \circ \varphi)^{-1}(O_X) \;;$$
   also ist φ stetig genau dann, wenn $f \circ \varphi$ stetig ist. Also hat die von f induzierte Topologie die Eigenschaft (*).

4. Eine Topologie auf M ist durch die Eigenschaft (*) eindeutig festgelegt. Zunächst überlegen wir uns, dass f bezüglich beider Topologien stetig ist: betrachte für eine beliebige Toplogie $\mathcal{T}$ auf M, für die $(*)$ gilt, das Diagram
   $$\begin{tikzcd} (M, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] & X \\ (M, \mathcal{T}) \arrow[u, "\mathrm{id}_M"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$
   Weil die Identität stets stetig ist, muss wegen $(*)$ auch $f \circ \mathrm{id}_M = f$ in der Topologie $\mathcal{T}$ stetig sein.

   Seien $\mathcal{T}_M, \mathcal{T}'_M$ zwei solche Topologien. Betrachte $\varphi = \mathrm{id}_M$:
   $$\begin{tikzcd} (M, \mathcal{T}_M) \arrow[r, "f"] & X \\ (M, \mathcal{T}'_M) \arrow[u, "\mathrm{id}_M"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$
   Dann ist die Identität als Abbildung $(M, \mathcal{T}'_M) \to (M, \mathcal{T}_M)$ stetig, weil f am diagonalen Pfeil stetig ist. Also ist $\mathcal{T}'_M$ feiner als $\mathcal{T}_M$. Tauscht man die Rolle der beiden Topologien aus, so folgt die Gleichheit der Topologien.

5. Man beachte, dass hier die von f induzierte Topologie auf der Menge M dadurch beschrieben wird, dass wir angeben, was die stetigen Abbildungen aus einem *beliebigen* topologischen Raum T in M hinein sein sollen. Charakterisiert man ein mathematisches Objekt durch die Morphismen in das Objekt hinein (oder aus dem Objekt hinaus), so wird es durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert. (Den Fall, wenn man Morphismen aus dem Objekt heraus betrachtet, behandeln wir in einer Übungsaufgabe.)

Definition 1.6.4
Eine Abbildung $f : X' \to X$ heißt Einbettung, falls $\tilde{f} : X' \to f(X')$ ein Homöomorphismus auf $f(X')$ ist.

Beispiele 1.6.5.
1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} [0,1) & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \exp(2\pi i t) \end{array}$$
ist zwar injektiv, aber keine Einbettung, da sie keine stetige Umkehrabbildung besetizt, vgl. Beispiel 1.5.4.2.

2. Für jede stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ihr Graph
$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (t, \varphi(t)) \end{array}$$
eine Einbettung.

3. Vorsicht: ist $f : X \to X'$ stetig und $Y \subset X$, so ist nach Satz 1.6.2.2 $f|_Y = f \circ \iota$ stetig. Aber man kann nicht umgekehrt aus der Stetigkeit einer Einschränkung $f|_Y$ auf die Stetigkeit von f schließen.

   Als Gegenbeispiel betrachte man
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$
Die Einschränkung $f|_{\mathbb{Q}}$ ist als konstante Funktion stetig, f selbst aber nirgendwo stetig.

4. Einbettungen von $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ in den $\mathbb{R}^3$ heißen Knoten. Als Beispiel zeigen wir den Kleeblattknoten und den Unknoten.

1.7 Trennungsaxiome

Wir erweitern zunächst leicht den Umgebungsbegriff: eine Umgebung V einer beliebigen Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ ist eine Obermenge einer offenen Menge $O \in \mathcal{T}$, welche die Teilmenge enthält, $A \subset O \subset V$. Die Menge V ist also eine Umgebung jedes Punkts in A. Die Menge $\mathcal{U}(A)$ von Umgebungen von A heißt das Umgebungssystem von A.

Definition 1.7.1
Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ werden folgende Trennungseigenschaften eingeführt:

(T1) *Zu je zwei verschiedenen Punkten von X gibt es jeweils Umgebungen, die den anderen Punkt nicht enthalten: zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $x \notin V$ und $y \notin U$. (Die Umgebungen U und V müssen nicht disjunkt sein.)*

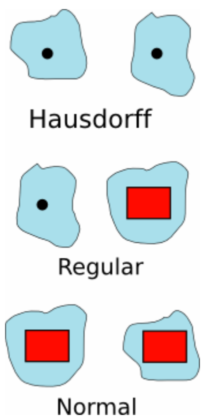
(T2) *Zu je zwei verschiedenen Punkten von X gibt es jeweils Umgebungen, die sich nicht schneiden: zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Ein solcher topologischer Raum heißt hausdorffsch.*

(T3) *Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$, die den Punkt x nicht enthält, gibt es disjunkte Umgebungen, $x \in U \subset X$, $A \subset V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$.*

(T4) *Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B von X gibt es disjunkte Umgebungen, $A \subset U$, $B \subset V$ mit $U \cap V = \emptyset$.*

Definition 1.7.2

1. *Ein normaler Raum ist ein topologischer Raum, der alle Trennungseigenschaften erfüllt.*
2. *Ein Hausdorff-Raum, der (T3) erfüllt, heißt regulär.*



Bemerkungen 1.7.3.

1. Die erste Trennungseigenschaft (T1) ist äquivalent mit der Aussage, dass jede einelementige Teilmenge von X abgeschlossen ist.
2. Versieht man die natürlichen Zahlen mit der koendlichen Topologie aus Beispiel 1.3.2.5, so sind einelementige Mengen als endliche Mengen abgeschlossen, es gilt also (T1). Alle anderen Trennungseigenschaften gelten nicht. Zum Beispiel (T2): da das Komplement einer offenen Menge nur endlich viele Punkte enthält, können zwei offene Mengen nicht disjunkt sein.
3. Jeder Hausdorff-Raum erfüllt offensichtlich auch (T1), also (T2) $\Rightarrow$ (T1).
4. In Hausdorff-Räumen sind Grenzwerte von Folgen eindeutig. (Nach Beispiel 1.3.11 sind in der indiskreten Topologie Grenzwerte nicht eindeutig. Diese Räume verletzen natürlich das Trennungsaxiom (T1) und damit auch (T2), wenn $|X| > 1$.)
5. Jeder metrisierbare Raum ist ein Hausdorff-Raum, denn die ϵ -Umgebungen zweier verschiedener Punkte sind disjunkt, falls ϵ kleiner als die Hälfte des Abstandes der beiden Punkte ist. Metrische Räume sind sogar normal, siehe Korollar 1.7.9.

6. Es gilt nicht (T4) $\Rightarrow$ (T3) $\Rightarrow$ (T2). Um hier Aussagen zu erhalten, muss man zusätzlich (T2) oder (T1) fordern. Zum Beispiel ist die Klumpentopologie $\mathcal{T} = (\emptyset, X)$ aus Beispiel 1.3.2.3 für $|X| > 1$ (T3), aber nicht (T2).

Satz 1.7.4.
Ein Hausdorff-Raum, der auch (T4) erfüllt, erfüllt (T3). Anders gesagt: aus (T4) und (T2) folgt (T3). Man kann also normale Räume charakterisieren als Hausdorff-Räume, die zusätzlich das Trennungsaxiom (T4) erfüllen.

Beweis.
Sei X ein topologischer Raum, der (T4) und (T2) erfüllt. Aus (T2) folgt nach 1.7.3.3 auch (T1). Nach 1.7.3.1 sind daher die einelementige Menge $A := \{x\}$ abgeschlossen. Daher können wir im (T4)-Raum X die abgeschlossene Menge A und jede disjunkte abgeschlossene Menge trennen, es gilt also (T3). □

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so wird die Menge $X \times X$ durch die Basis

$$\mathcal{B}_{X\times X} := \{O_1 \times O_2 \,|\, O_i \in \mathcal{T}\}$$

zum topologischen Raum, also indem man als offene Mengen beliebige Vereingungen von Mengen der Form $O_1 \times O_2$ mit $O_i \in \mathcal{T}$ betrachtet, vgl. auch Kapitel 1.8. Wir können Hausdorff-Räume auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 1.7.5.
Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times X$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis.
Es ist $x \neq y$ genau dann, wenn $(x, y) \notin \Delta$. Die Diagonale Δ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus \Delta$ offen ist, d.h. wenn es für jedes $(x, y) \notin \Delta$ offene Mengen O_1, O_2 gibt mit $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset X \setminus \Delta$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann ist aber X nach Definition Hausdorffsch. □

Satz 1.7.6.
Ein topologischer Raum X erfüllt genau dann die Trennungseigenschaft (T3), wenn für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.

Beweis.
Es gelte (T3). Sei U eine Umgebung von $x \in X$. Wir müssen eine abgeschlossene Umgebung von x in U finden. Dann ist $X \setminus \mathring{U}$ abgeschlossen und enthält x nicht. Es gibt wegen (T3) disjunkte offene Mengen V, W mit $x \in V$ und $X \setminus \mathring{U} \subset W$. Die abgeschlossene Menge $X \setminus W$ ist in U enthalten und enthält V, also ist $\overline{V} \subset U$ abgeschlossene Umgebung von x.

Umgekehrt sei $A \subsetneq X$ eine abgeschlossene echte Teilmenge und $x \in X \setminus A$. Dann ist das Komplement $X \setminus A$ eine Umgebung von x und enthält nach Annahme eine abgeschlossene Umgebung U von x, also $x \in U \subset X \setminus A$. Dann sind $\mathring{U}$ und $X \setminus U$ offene disjunkte Mengen, die x bzw. A enthalten, also gilt das Trennungsaxiom (T3). □

Wir diskutieren, wie sich Trennungseigenschaften auf Teilmengen vererben:

Satz 1.7.7.

1. Ist ein topologischer Raum X Hausdorffsch bzw. regulär, so ist auch jede Teilmenge $Y \subset X$ mit der induzierten Topologie Hausdorffsch bzw. regulär.

2. Ist ein topologischer Raum X normal und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch Y normal.

Beweis.

1. Sei X Hausdorffsch, $Y \subset X$ und $x_1, x_2 \in Y$ mit $x_1 \neq x_2$. Da X Hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann sind $U_i' := U_i \cap Y$ Umgebungen von x_i in Y und auch disjunkt, $U_1' \cap U_2' = \emptyset$.

   Sei X regulär, $Y \subset X$ und $A' \subset Y$ abgeschlossen in Y und $x \notin A'$. Dann existiert A abgeschlossen in X mit $A' = A \cap Y$. Da auch $x \notin A$ gilt und X regulär ist, gibt es disjunkte Umgebungen U von x und V von A in X. Dann sind $U' := U \cap Y$ und $V' := V \cap Y$ disjunkte Umgebungen von x und A' in Y; also ist auch der Unterraum Y regulär.

2. Sei X normal und $Y \subset X$ abgeschlossen. Seien $A', B' \subset Y$ abgeschlossen in Y und disjunkt. Dann gibt es in X abgeschlossene Mengen A, B mit $A' = A \cap Y$ und $B' = B \cap Y$. Da auch Y in X abgeschlossen sein soll, sind A' und B' als Schnitt abgeschlossener Mengen in X abgeschlossen. Die in X abgeschlossenen Mengen A', B' können im normalen Raum X durch disjunkte Umgebungen $U \supset A'$ und $V \supset B'$ getrennt werden. Dann trennen in Y die disjunkten Umgebungen $U' := U \cap Y \supset A'$ und $V' := V \cap Y \supset B'$ die Mengen A' und B'.

$\square$

Wir wollen das Trennungsaxiom (T4) durch die Existenz von Funktionen mit besonderen Eigenschaften charakterisieren.

Theorem 1.7.8.
Die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum X sind äquivalent.

1. Der Raum X erfüllt die Trennungseigenschaft (T4).

2. Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B existiert eine stetige reellwertige Funktion
   $$f: \quad X \to [0,1] \subset \mathbb{R} ,$$
   so dass
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$
   Man nennt eine solche Funktion eine Urysohn-Funktion.

3. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und die Funktion
   $$f: \quad A \to \mathbb{R}$$
   stetig; dann gibt es eine stetige Fortsetzung
   $$F: \quad X \to \mathbb{R} ,$$
   also eine stetige Funktion F mit $F|_A = f$ mit
   $$\sup F = \sup f \quad \text{und} \quad \inf f = \inf F .$$
   Ist f nicht kosntant, so kann man sogar $\inf f < F(x) < \sup f$ für alle $x \notin A$ einrichten.

Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. heißt auch Lemma von Urysohn. Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 3. heißt auch Fortsetzungssatz von Tietze.

Beweis.

2\. $\Rightarrow$ 1. Für jede Urysohn-Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ trennen die offenen Umgebungen

$$A \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \quad \text{und} \quad B \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

die abgeschlossenen Teilmengen A und B.

3\. $\Rightarrow$ 2. Die Teilmenge $A\dot{\cup}B \subset X$ ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Funktion $f(x) = 1$ für $x \in B$ und $f(x) = 0$ für $x \in A$ ist stetig und kann zu einer Urysohn-Funktion fortgesetzt werden.

1\. $\Rightarrow$ 2. Wir nennen eine endliche Kette von Teilmengen

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset X \setminus B$$

zulässig, wenn $\overline{A}_i \subset \mathring{A}_{i+1}$ und $\overline{A}_k \subset X \setminus B$ gilt.

Hat X die Trennungseigenschaft (T4) und sind A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen, so existiert jedenfalls eine zulässige Kette der Länge $k = 1$: finde disjunkte Umgebungen $A \subset U$ und $B \subset V$. Dann gilt

$$A \subset \mathring{U} \subset \overline{U} \subset X \setminus B\ .$$

Die erste Inklusion gilt, weil U Umgebung von A ist; die zweite Inklusion, weil die Teilmenge $X \setminus V \subset X \setminus B$ in Xabgeschlossen ist und daher $\overline{U} \subset X \setminus V$ gilt.

Gegeben eine zulässige Kette, können wir eine zulässige Kette

$$A = A_0 \subset A'_0 \subset A_1 \subset A'_1 \ldots \subset A_k \subset A'_k \subset X \setminus B$$

doppelter Länge finden, indem wir das Argument auf die disjunkten abgeschlossenen Mengen $\overline{A}_i$ und $X \setminus \mathring{A}_{i+1}$ anwenden.

Wir finden so eine Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zulässiger Ketten. Zur Kette $\mathcal{A}_n$ definieren wir eine Treppenfunktion $f_n : X \to [0, 1]$ durch

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{für} \quad x \in A_k \setminus A_{k-1}\ .$$

Die Funktionenfolge ist monoton fallend und beschränkt, konvergiert also gegen eine Grenzfunktion f. Da $A \subset A_0$, ist f konstant 0 auf A und ebenso konstant 1 auf B.

Es bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktion f stetig ist. Dazu beachte, dass für jedes $x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-(n+1)}\ .$$

In der Kette $\mathcal{A}_n$ gilt für $x, y \in \mathring{A}_{k+1} \setminus \overline{A}_{k-1}$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n}\,, .$$

Damit folgt für solche x, y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=n+1} 2^{-k} + 2^{-n} + \sum_{k=n+1} 2^{-k} \end{aligned}$$

und somit die Stetigkeit von f.

2. $\Rightarrow$ 3. Wir nehmen zunächst an, dass die gegebene stetige Funktion beschränkt ist, etwa $f : A \to [-1, 1]$. Finde eine Urysohn-Funktion $G : X \to [0, 1]$ für die disjunkten abgeschlossenen Teilmengen

$$f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}]) \quad \text{und} \quad f^{-1}([\frac{1}{3}, 1]) \ .$$

Wir setzen

$$F_1 := \frac{1}{2}G - \frac{1}{3} : \quad X \to \mathbb{R} \ .$$

Man zeigt durch Fallunterscheidungen leicht

$$\begin{array}{rcll} |f(x) - F_1(x)| & \leq & \frac{2}{3} & \text{für alle} \quad x \in A \\ |F_1(x)| & \leq & \frac{1}{3} & \text{für alle} \quad x \in X \ . \end{array}$$

Die erste Ungleichung interpretieren wir so, dass die Funktion F_1 die Funktion f approximiert; wir wollen aber die Approximation verbessern.

Wir wenden das gleiche Verfahren auf die Fehlerfunktion

$$\begin{array}{rcl} f^{(1)} : A & \to & [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \\ x & \mapsto & f(x) - F_1(x) \end{array}$$

an und erhalten eine Funktion $F_2 : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{rcll} |f^{(1)}(x) - F_2(x)| & \leq & (\frac{2}{3})^2 & \text{für alle} \quad x \in A \\ |F_1(x)| & \leq & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \text{für alle} \quad x \in X \ . \end{array}$$

Iterativ erhalten wir eine Funktionenfolge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{array}{rcll} |f(x) - \sum_{i=1}^n F_i(x)| & \leq & (\frac{2}{3})^n & \text{für alle} \quad x \in A \\ |F_n(x)| & \leq & \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n & \text{für alle} \quad x \in X \ . \end{array}$$

Die Reihe $\sum_n F_n$ konvergiert also gleichmäßig gegen eine stetige Funktion, die mit f auf A übereinstimmt. Das zeigt die Behauptung im Fall, wenn f beschränkt ist.

Für den Fall einer unbeschränkten Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ verwende

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

um die beschränkte Funktion

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \arctan \circ f : A \to [-1, 1]$$

zu einer stetigen Funktion $\tilde{F} : X \to [-1, 1]$ fort zu setzen. Diese kann allerdings die Werte ± 1 annehmen, so dass wir nicht die Umkehrfunktion anwenden können. Wähle deswegen eine Urysohn-Funktion, die auf A den Wert 1 hat und auf der geschlossenen Menge $\tilde{F}^{-1}(\pm 1)$ verschwindet. Die gesuchte stetige Erweiterung ist dann

$$F = \tan(\frac{\pi}{2} \cdot G \cdot F) \ .$$

$\square$

Korollar 1.7.9.
Metrische Räume sind normal.

Beweis.
Seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raums (X, d). Die Funktionen

$$d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a) \qquad d_B(x) := \inf_{b \in B} d(x, b)$$

sind stetig. Die Funktion $f := \frac{d_A}{d_A + d_B}$ ist konstant Null auf A und konstant 1 auf B, also eine Urysohn-Funktion. Aus Theorem 1.7.8 folgt nun, dass das Trennungsaxiom (T4) gilt. In einem metrischen Raum gilt nach Bemerkung 1.7.3.2 auch (T2), so dass die Aussage nun aus Satz 1.7.4 folgt. □

1.8 Initial- und Finaltopologie

Wir verallgemeinern die Überlegungen aus Bemerkung 1.6.3.

Definition 1.8.1
Gegeben sei eine Menge M, eine Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ und eine Familie von Abbildungen $(f_i : M \to X_i)_{i \in I}$. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf M heißt Initialtopologie bezüglich der Familie $(f_i)_{i \in I}$, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

Ist T ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : T \to M$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ g : T \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig ist,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (M, \mathcal{T}) \arrow[d, "f_i"] \\ & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{tikzcd}$$

Der folgende Satz wird nun mit den gleichen Argumenten wie in Bemerkung 1.6.3 bewiesen:

Satz 1.8.2.
Auf einer Menge M gibt es bezüglich $(f_i)_{i \in I}$ eine eindeutig bestimmte Inititialtopologie. Die Initialtopologie ist die gröbste Topologie auf M, so dass alle $f_i : M \to X_i$ stetig sind. Eine Subbasis ist

$$\mathcal{S} := \cup_{i \in I} \{ f_i^{-1}(O_i) \quad | \, O_i \in \mathcal{T}_i \ \} \ .$$

Beweis.
Sei zunächst $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M, die die universelle Eigenschaft hat. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} (M, \mathcal{T}) \arrow[r, "f_i"] & X_i \\ (M, \mathcal{T}) \arrow[u, "\mathrm{id}_M"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

ist id_M stetig und daher auch $f_i : M \to X_i$ für jedes $i \in I$.

Seien $\mathcal{T}_{(1)}$ und $\mathcal{T}_{(2)}$ zwei Initialtopologien auf M. Betrachte für jedes $i \in I$ das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} (M, \mathcal{T}_{(1)}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i"'] & (M, \mathcal{T}_{(2)}) \arrow[d, "f_i"] \\ & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{tikzcd}$$

Da alle f_i stetig sind, muss die Identität stetig sein. Also ist die Topologie $\mathcal{T}_{(1)}$ feiner als die Topologie $\mathcal{T}_{(2)}$. Vertauscht man die Rollen der Topologien, so folgt auch die umgekehrte Aussage. Somit gilt $\mathcal{T}_{(1)} = \mathcal{T}_{(2)}$.

Eine Initialtopologie $\mathcal{T}$ muss sicher die Mengen in der Subbasis $\mathcal{S}$ enthalten, denn andernfalls wäre die Identität nicht stetig. Da $\mathcal{T}$ die gröbste solche Topologie sein soll, muss $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$ gelten.

Es bleibt zu zeigen, dass die durch $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie die universelle Eigenschaft erfüllt. Klar ist eine Richtung: wenn $g : T \to (M, \mathcal{T})$ stetig ist, so ist die Verkettung $f_i \circ g$ stetig. Seien also umgekehrt die Abbildungen $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig. Wir müssen wegen Satz 1.4.4 zeigen, dass für jedes $S \in \mathcal{S}$ die Menge $g^{-1}(S)$ offen in T ist. Nun ist aber für ein $i \in I$ und $O_i \in \mathcal{T}_i$ die Menge $S = f_i^{-1}(O_i)$

$$g^{-1}(S) = g^{-1} f_i^{-1}(O_i) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i)$$

offen, da $f_i \circ g$ stetig sein soll. $\square$

Wir erinnern an das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ einer Familie von Mengen, dessen Elemente Familien $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen mit $x_i \in X_i$ sind. Es kommt mit Projektionen

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : \prod_{j \in I} X_j & \to & X_i \\ (x_j)_{j \in I} & \mapsto & x_i \ , \end{array}$$

für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist T eine beliebige Menge, so gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen $f : T \to \prod_{j \in I} X_j$ und Familien von Abbildungen $(f_i : T \to X_i)_{i \in I}$,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j \in I} X_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Map}(T, \prod_{j \in I} X_j) & \to & \prod_{j \in I} \mathrm{Map}(T, X_j) \\ f & \mapsto & (\pi_j \circ f)_{j \in I} \end{array}$$

Die Umkehrabbildung schickt die Familie $(f_i)_{i \in I}$ auf die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} f : & T & \to & \prod_{j \in I} X_j \\ & t & \mapsto & (\ldots, f_j(t), \ldots) \end{array}$$

Man beachte, dass wir hier die Menge $\prod_{j \in I} X_i$ dadurch beschreiben, dass wir die Abbildungen aus einer beliebigen Menge T in $\prod_{j \in I} X_i$ hinein beschreiben.

Definition 1.8.3

Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Initialtopologie auf der Menge $X := \prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Projektionen $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ heißt die Produkttopologie auf X.

Satz 1.8.4.

Die Produkttopologie $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$ hat die Basis

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{T}_i, O_i = X_i \ \text{ für fast alle } i \in I \}$$

Beweis.
Bezüglich der Topologie mit Basis $\mathcal{B}$ sind die Projektionen $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ stetig. Denn für $O_i \in \mathcal{T}_i$ offen ist

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \prod_{j\in I} O_j \quad \text{mit} \quad O_j = \begin{cases} X_j \text{ für } j \neq i \\ O_i \text{ für } j = i \end{cases}$$

sogar ein Element der Basis. Damit ist

$$\mathcal{S}_{initial} = \cup_{i\in I}\{\pi_i^{-1}(O_i)\,|O_i \in \mathcal{T}_i\}$$

eine Subbasis der Topologie. Es liegt nach Satz 1.8.2 die Initialtopologie vor. □

Satz 1.8.5.
Zu jeder Familie stetiger Funktionen $(f_i : T \to X_i)_{i\in I}$ gibt es genau eine stetige Funktion $f : T \to \prod_{i\in I} X_i$, so dass $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$.

Beweis.
Die Abbildung f existiert als Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts,

$$f(t) = (\ldots, f_i(t), \ldots)\ ,$$

und ist eindeutig. Sie ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Initialtopologie aus Definition 1.8.1. □

Beispiele 1.8.6.

1. Der $\mathbb{R}^n$ wird mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ versehen. Dadurch erhält man die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

2. Sei für jedes $i \in I$ ein Unterraum $A_i \subset X_i$ mit der Unterraumtopologie gegeben. Dann ist $\prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} X_i$ eine Teilmenge und hat nach Definition 1.6.1 eine Unterraumtopologie. Diese ist gleich der Produkttopologie,

   $$\mathcal{T}_{\prod A_i} = \mathcal{T}_{\prod_i X_i | \prod A_i}\ .$$

   Denn eine Subbasis der Produkttopologie ist gegeben durch die Mengen $\pi_i^{-1}(O_i)$ mit O_i offen in A_i. Das heißt aber mit $O_i = A_i \cap \tilde{O}_i$ mit $\tilde{O}_i \in \mathcal{T}_{X_i}$. Dies ist aber eine Subbasis der Unterraumtopologie.

3. Insbesondere ist mit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ der n-<u>Torus</u> $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n}$ in natürlicher Weise ein topologischer Raum.

4. Sei X_i für alle $i \in I$ ein diskreter topologischer Raum mit $|X_i| > 1$. Dann ist die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann diskret, wenn I endlich ist.

   Denn ist $I = \{1, 2, \ldots n\}$ endlich, so ist $O_1 \times O_2 \times \ldots O_n$ mit beliebigen Teilmengen

   $$O_i \in \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X_i)$$

   eine Basis der Topologie von $\prod_{j\in I} X_j$. Somit ist $\mathcal{T}_{\prod_{i\in I} X_i} = \mathcal{P}(\prod_{i\in I} X_i)$ und die Topologie ist diskret.

   Ist dagegen I unendlich, so treten in der Basis der Produkttopologie nur Mengen der Form $\prod O_i$ mit $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ auf. Nur Mengen dieser Form sind offen, die Topologie kann daher nicht diskret sein.

Dual zum Begriff der Initialtopologie ist der Begriff der Finaltopologie.

Definition 1.8.7
Gegeben sei eine Menge M, eine Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ und eine Familie von Abbildungen $(f_i : X_i \to M)_{i\in I}$. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf M heißt <u>*Finaltopologie*</u> *bezüglich $(f_i)_{i\in I}$, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:*

Ist T ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : M \to T$ genau dann stetig, wenn $g \circ f_i : X_i \to T$ für alle $i \in I$ stetig ist,

$$\begin{tikzcd} (M,\mathcal{T}) \arrow[r, "g"] & T \\ (X_i,\mathcal{T}_i) \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g\circ f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Der Beweis des folgenden Satzes ist dual zum Beweis von Satz 1.8.2

Satz 1.8.8.
Auf M gibt es bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ eine eindeutig bestimmte Finaltopologie. Die Finaltopologie ist die feinste Topologie auf M, so dass alle Abbildungen $f_i : X_i \to M$ stetig sind. Eine Subbasis ist

$$\mathcal{S} := \{O \subset M \quad \text{so dass} \quad f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \quad \text{für alle } i \in I\ \} \ .$$

Bemerkung 1.8.9.
Wir erinnern zunächst an den Begriff aus der Mengenlehre, der dual zum kartesischen Produkt von Mengen ist.

- Gegeben sei eine Familie von Mengen $(X_j)_{j\in I}$. Bilde die Familie von Mengen

  $$X_j' := \{(x_j, j) \quad | \, x_j \in X_j\} = X_j \times \{j\} \ .$$

  Dann ist die <u>disjunkte Vereinigung</u> die Menge

  $$\sqcup_{j\in I} X_j := \cup_{j\in I} X_j' \ .$$

- Sie kommt mit Injektionen

  $$\begin{array}{rcl} \iota_i : X_i & \to & \sqcup_{j\in I} X_j \\ x_i & \mapsto & (x_i, i) \in X_i' \ , \end{array}$$

  für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist T eine beliebige Menge, gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen $f : \sqcup_{j\in I} X_j \to T$ und Familien von Abbildungen $(f_i : X_i \to T)_{i\in I}$,

  $$\begin{tikzcd} \sqcup_{j\in I} X_j \arrow[r, "f"] & T \\ X_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

  die gegeben ist durch

  $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Map}(\sqcup_{j\in I} X_j, T) & \to & \prod_{j\in I} \mathrm{Map}(X_j, T) \\ f & \mapsto & (f \circ \iota_j)_{j\in I} \end{array}$$

Die Umkehrabbildung schickt eine Familie $(f_j)_{j\in I}$ auf die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \sqcup_{j\in I}X_j & \to & T \\ & (x_j, j) & \mapsto & f_j(x_j) \end{array}$$

Man beachte, dass wir hier die Menge $\sqcup_{j\in I}X_j$ dadurch beschreiben, dass wir die Abbildungen aus $\sqcup_{j\in I}X_j$ heraus in eine beliebige Menge T hinein beschreiben.

- Somit hat die disjunkte Vereinigung von Mengen die kategoriellen Eigenschaften einer Summe.

Definition 1.8.10 *[Topologische Summen]*
Gegeben seien topologische Räume $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j\in J}$. Die Topologie auf der disjunkten Vereinigung $X = \sqcup_{i\in I}X_i$ mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \,|\, O \cap X_j \in \mathcal{T}_j \quad \text{für alle } j \in I\}$$

heißt Summentopologie auf X.

(Statt $O \cap X_j$ sollten wir korrekter $\iota_j^{-1}(O) \subset X_j$ schreiben. Wir identifizieren aber stillschweigend X_j mit $\iota_j(X_j) \subset X$.)

Satz 1.8.11.
Die Summentopologie ist die Finaltopologie auf $X = \sqcup_{j\in I}X_j$ bezüglich der Injektionen $(\iota_i : X_i \to X)_{i\in I}$.

Beweis.

- Die Injektionen ι_i sind für alle $i \in I$ stetig, denn für $O \in \mathcal{T}$ ist nach Definition 1.8.10

$$\iota_i^{-1}(O) = O \cap X_i \in \mathcal{T}_i \ .$$

  Sie sind sogar Einbettungen, vgl. Definition 1.6.4.

- Sei $g : X \to T$ eine Abbildung. Ist g stetig, so ist $g \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ als Verkettung stetiger Abbildungen stetig.

- Seien umgekehrt für eine Abbildung $g : X \to T$ alle Verkettungen $g \circ \iota_i$ stetig. Für $O' \subset T$ offen ist dann

$$g^{-1}(O') = \cup_{j\in I} g^{-1}(O') \cap X_j' = \cup_{j\in I} \iota_j^{-1} \circ g^{-1}(O') = \cup_{j\in I}(g \circ \iota_j)^{-1}(O')$$

  als Vereinigung offener Mengen offen, so dass g stetig ist.

□

Satz 1.8.12 (Universelle Eigenschaft der direkten Summe)**.**
Ist $(g_j : X_j \to T)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $g : X = \sqcup_{j\in I}X_j \to T$ mit $g_j = g \circ \iota_j$.

Beweis.
Eine Abbildung $g : \sqcup_{j\in I} X_j \to T$ existiert eindeutig als Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft der disjunkten Vereinigung in der Kategorie von Mengen. Die Abbildung g ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Finaltopologie. □

Bemerkung 1.8.13.
Sei X ein topologischer Raum, der als Menge eine disjunkte Vereinigung von Untermengen ist, $X = \dot{\cup}_{i\in I} X_i$, die alle offen in X sind. (Wegen $X_j = X \setminus \cup_{i\neq j} X_i$ ist dann auch jedes X_i abgeschlossen in X.) Dann ist die Abbildung $X \to \sqcup_{i\in I} X_i$, die $x_i \in X_i$ auf $(x_i, i) \in \sqcup_{i\in I} X_i$ schickt, injektiv, surjektiv, stetig und offen. Also ist X als topologischer Raum homöomorph zur Summe $X \cong \sqcup_{i\in I} X_i$.

1.9 Zusammenhang

Definition 1.9.1
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängend, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

Bemerkungen 1.9.2.

1. Äquivalent kann man einen zusammenhängenden Raum dadurch charakterisieren, dass er nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener Teilmengen ist.

2. Kann man also einen zusammenhängenden topologischen Raum X schreiben als $X = K_1 \cup K_2$ mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ mit K_1 und K_2 beide offen (oder beide abgeschlossen), so gilt $K_1 = \emptyset$ oder $K_2 = \emptyset$.

3. Eine Menge X mit diskreter Topologie ist nicht zusammenhängend, falls sie mehr als ein Element hat.

4. Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Korollar 1.9.3 (Zwischenwertsatz)**.**
Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, Y ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist das Bild $f(X) \subset Y$ zusammenhängend.

Beweis.
Angenommen, das Bild $f(X)$ lässt sich schreiben als disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen in $f(X)$, $f(X) = O_1 \dot{\cup} O_2$. Dann gilt auch $X = f^{-1}(O_1) \dot{\cup} f^{-1}(O_2)$ mit nicht-leeren offenen Mengen, im Widerspruch zur Annahme, dass X zusammenhängend ist □

Insbesondere ist ein zu einem zusammenhängenden Raum homöomorpher Raum zusammenhängend.

Satz 1.9.4.
Das Interval $[0, 1]$ mit der von der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist zusammenhängend.

Da je zwei abgeschlossene Intervalle homöomorph sind, sind alle abgeschlossenen Intervalle zusammenhängend.

Beweis.
Angenommen, wir finden eine Zerlegung $[0,1] = K_0 \sqcup K_1$, mit K_0, K_1 offen und nicht-leer. Wir können $1 \in K_1$ annehmen. Weil K_1 offen ist, liegt eine Umgebung von 1 in K_1, also ist $s := \sup K_0 < 1$.

Angenommen $s \in K_0$. Dann finde, weil K_0 offen ist, eine Umgebung $U \subset K_0$ von s. Dann ist aber s nicht das supremum, weil in K_0 Elemente liegen, die größer als s sind.

Angenommen, $s \in K_1$. Dann finde, weil K_1 offen ist, eine Umgebung $U \subset K_1$ von s. Dann kann aber s nicht das supremum sein, weil in der Umgebung U keine Elemente von K_0 liegen können. □

Wir erhalten nun als Folge von Korollar 1.9.3 und Satz 1.9.4 den

Satz 1.9.5 (Klassischer Zwischenwertsatz)**.**
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Für jedes ζ mit $f(a) < \zeta < f(b)$ gibt es wenigstens ein $t \in [a,b]$ mit $f(t) = \zeta$.

Beweis.
Andernfalls zerlege das Bild

$$f([a,b]) = (f([a,b]) \cap (-\infty, \zeta)) \ \dot{\cup} \ (f([a,b]) \cap (\zeta, \infty))$$

in disjunkte nicht-leere offene Teilmengen, im Widerspruch zu Korollar 1.9.3. □

Um mehr Aussagen über den Zusammenhang topologischer Räume machen zu können, brauchen wir einige Aussagen.

Satz 1.9.6.
Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion von X in einen beliebigen diskreten Raum konstant ist.

Beweis.
Ist X nicht zusammenhängend, schreibe $X = A \dot{\cup} (X \setminus A)$ mit A und $X \setminus A$ offen und abgeschlossen. Betrachte einen diskreten Raum D mit mindestens zwei verschiedenen Elementen $p_1, p_2 \in D$. Dann ist die Funktion $f : X \to D$ mit $f|_A = p_1$ und $f|_{X \setminus A} = p_2$ nicht konstant auf X, aber stetig, weil die Urbilder offener Mengen offen sind.

Umgekehrt gebe es eine nicht-konstante stetige Funktion $f : X \to D$ in einen diskreten Raum D, die verschiedene Werte $p_1, p_2 \in D$ annehme. Dann ist $f^{-1}(p_1)$ und sein Komplement in X offen und nicht-leer. □

Korollar 1.9.7.
Ist ein topologischer Raum X von einer Familie (X_j) zusammenhängender Unterräume überdeckt und sind je zwei X_j nicht disjunkt, so ist auch X zusammenhängend.

Beweis.
Sei D ein beliebiger diskreter Raum und $f : X \to D$ eine beliebige stetige Funktion. Dann ist

$f|_{X_i}$ für alle i nach Satz 1.9.6 konstant, weil jedes X_i zusammenhängend ist. Da die X_i nicht disjunkt sind, muss f auf ganz X konstant sein. Nach Satz 1.9.6 ist daher X zusammenhängend. □

Beispiele 1.9.8.

1. Der topologische Raum $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend. Denn wähle als nicht-disjunkte Überdeckung $(X_j = [-j, j])_{j\in\mathbb{N}}$. Die abgeschlossenen Intervalle sind nach Satz 1.9.4 zusammenhängend.

2. Da nach Beispiel 1.5.8.1 jedes offene Intervall zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist, sind auch offene Intervalle zusammenhängend.

3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als Unterraum der reellen Zahlen sind nicht zusammenhängend. Sei $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann schreibe
$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \zeta)) \ \dot{\cup}\ (\mathbb{Q} \cap (\zeta, \infty)) \ .$$
Die Dedekindschen Schnitte zerteilen also $\mathbb{Q}$ in disjunkte offene Mengen.

4. Der Kreis $\mathbb{S}^1$ ist als Bild der nach Beispiel 1.9.8.1 zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & \exp(2\pi \mathrm{i} t) \end{array}$$
nach dem Zwischenwertsatz 1.9.3 zusammenhängend.

Betrachtung 1.9.9.
Auf der Menge der Punkte eines topologischen Raumes X führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein: $x \in X$ hängt mit $y \in X$ zusammen, in Zeichen $x \sim y$, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $C \subset X$ gibt, die x und y enthält, $x, y \in C$.

Die Relation ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv, $x \sim x$, mit $C = \{x\}$, zusammenhängend. Um zu sehen, dass sie transitiv ist, finde für $x, y, z \in X$ zusammenhängende Mengen C_1, C_2 mit $x, y \in C_1$ und $y, z \in C_2$. Dann ist $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, so dass aus Korollar 1.9.7 folgt, dass die Vereinigung $C_1 \cup C_2$ zusammenhängend ist; offenbar ist $x, z \in C_1 \cup C_2$.

Definition 1.9.10
Sei X ein topologischer Raum. Die Äquivalenzklasse $Z(x)$ von $x \in X$ unter der Äquivalenzrelation "hängt zusammen" heißt die Zusammenhangskomponente von x.

Es ist klar, dass ein topologischer Raum die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

Satz 1.9.11.
Sei X ein topologischer Raum.

1. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist zusammenhängend.

2. Gilt für Teilmengen $A, B \subset X$ die Relation $A \subset B \subset \overline{A}$ und ist A zusammenhängend, so ist B zusammenhängend. Insbesondere ist $\overline{A}$ zusammenhängend.

3. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist abgeschlossen, aber nicht unbedingt offen.

Beweis.

- Betrachte die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eines Punktes $x \in X$. Für jedes $y \in Z(x)$ können wir eine zusammenhängende Menge $Z_y \subset X$ finden, die y und x enthält. Die Mengen Z_y überdecken die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ und sind nicht disjunkt, da sie alle x enthalten. Nach Korollar 1.9.7 ist $Z(x)$ zusammenhängend.

- Angenommen, B ist nicht zusammenhängend. Finde dann $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit
$$B = (B \cap O_1) \dot\cup (B \cap O_2) ,$$
so dass $B \cap O_1 \neq \emptyset$ und $B \cap O_2 \neq \emptyset$. Dann gilt wegen $A \subset B$ auch
$$A = (A \cap O_1) \dot\cup (A \cap O_2) .$$
Wir müssen zeigen, dass die beiden Mengen $A \cap O_i$ nicht leer sind. Wähle dazu $b_i \in B \cap O_i$. In jeder Umgebung U_i von b_i liegen Punkte von A, da b_i ein Berührpunkt ist. Betrachte nun eine Umgebung $U_i \subset O_i$, die auch einen Punkt aus A enhalten muss. Daher ist $O_i \cap A_i$ für $i = 1, 2$ nicht leer, im Widerspruch zur Annahme, dass A zusammenhängend ist.

- Wegen 1. ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend; es gilt natürlich $Z(x) \subset \overline{Z(x)}$ und wegen 2. ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend und daher gleich $Z(x)$.

$\square$

Das folgende Beispiel zeigt einen Raum mit einer Zusammenhangskomponente, die nicht offen ist.

Beispiel 1.9.12.
Betrachte
$$X := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$
mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Dann sind die einelementigen Teilmengen $\{\frac{1}{n}\}$ offen und abgeschlossen in X und daher Zusammenhangskomponenten von X. Die Zusammenhangskomponente $\{0\}$ ist nach Satz 1.9.11.3 abgeschlossen, aber nicht offen. Denn jede Umgebung von 0 in der Unterraumtopologie enthält unendlich viele der Punkte $1/n$, die aber jeder in einer anderen Zusammenhangskomponente liegen.

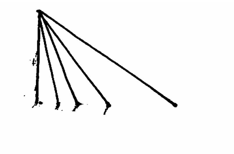
Wir schließen nun genau die Situation, die im Beispiel 1.9.12 beim Punkt 0 vorliegt, aus:

Definition 1.9.13
Ein topologischer Raum X heißt lokal zusammenhängend, falls für jeden Punkt $x \in X$ jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine zusammenhängende Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal-zusammenhängenden Raum bilden die zusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

Beispiel 1.9.14.
Vorsicht: ein zusammenhängender Raum X ist nicht unbedingt lokal zusammenhängend.

Als Beispiel betrachte den "konvergierenden Besen":



sei $Q_n := (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$, $Q_0 := (0,0)$ und $P := (0,1)$. Setze $X = \cup_{n\geq 0}\overline{Q_nP}$. Jede der Mengen $\overline{Q_nP}$ ist als homömorphes Bild eines Intervals zusammenhängend. Da sich alle Intervalle $\overline{Q_nP}$ in P schneiden, ist X nach Korollar 1.9.7 zusammenhängend. Betrachte aber andererseits Umgebungen des Punktes $(0, \frac{1}{2})$. Jede dieser Umgebungen besteht aus unendlich vielen Intervallen und enthält keine zusammenhängende Umgebung.

Satz 1.9.15.
Der topologische Raum X sei lokal zusammenhängend. Dann ist jede Zusammenhangskomponente offen und abgeschlossen. Wählt man Repräsentanten $(x_i)_{i\in I}$ für die Zusammenhangskomponenten, so ist als topologischer Raum

$$X \cong \sqcup_{i\in I} Z(x_i) \ .$$

Beweis.
Nach Satz 1.9.11 sind die Zusammenhangskomponenten abgeschlossen. Sei $y \in Z(x)$ beliebig. Sei V eine zusammenhängende Umgebung von y. Dann ist $V \subset Z(x)$. Damit enthält die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eine Umgebung von y und ist somit offen. Die Behauptung folgt nun aus Bemerkung 1.8.13. □

Definition 1.9.16
Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für je zwei $x, y \in X$ einen stetigen Weg

$$w : \quad [0,1] \to X$$

gibt mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Bemerkungen 1.9.17.

1. Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

   Wäre X nicht zusammenhängend, so schreibe $X = X_1 \dot\cup X_2$ mit nicht-leeren disjunkten offenen Teilmengen X_1 und X_2. Wähle $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ und einen Weg w, der x_1 und x_2 verbindet. Dann wäre

   $$w^{-1}(X_1) \dot\cup w^{-1}(X_2)$$

   eine disjunkte Zerlegung des nach Satz 1.9.4 zusammenhängenden Intervalls $[0,1]$ in nichtleere offene Mengen, Widerspruch.

2. Wegzusammenhang ist eine Äquivalenzrelation. Der konstante Weg zeigt $x \approx x$. Aus $x \approx y$ mit einem Weg w folgt mit $\tilde{w}(t) = w(1-t)$, dass auch $y \approx x$. Die Verkettung von Wegen zeigt die Transitivität der Relation.

   Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $x \in X$ mit $W(x)$. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\approx$ heißen Wegkomponenten von X.

Satz 1.9.18.
Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt

1. Für $x \in X$ ist $W(x) \subset Z(x)$.

2. Eine Wegkomponente ist wegzusammenhängend.

Beweis.

1. Für x, y in der gleichen Wegkomponente finde einen Weg w, der x und y verbindet. Dann ist $w([0,1])$ eine zusammenhängende Teilmenge, die x, y enthält, so dass diese Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.

2. Ist klar wegen der Transitivität der Relation.

$\square$

Beispiel 1.9.19.
Eine Wegkomponente $W(x)$ eines topologischen Raumes ist im allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. Setze dazu

$$X_1 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \quad X_2 := \{(0, y) \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$$

und $X := X_1 \dot{\cup} X_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Als homömorphes Bild eines Intervals in $\mathbb{R}$ sind X_1 und X_2 wegzusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente X_1 ist offen, aber nicht abgeschlossen, denn alle Punkte des Geradensegments X_2 sind Berührpunkte von X_1, aber nicht in X_1 enthalten, $X_2 \subset \overline{X_1}$.

Die Zusammenhangskomponente X_2 ist abgeschlossen, aber nicht offen, da jede Umgebung jedes Punktes von X_2 einen Punkt der Zusammenhangskomponente X_1 enthält.

Definition 1.9.20
Ein topologischer Raum heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jede Umgebung U von $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung V von x enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal wegzusammenhängenden Raum bilden die wegzusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

Satz 1.9.21.
Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt $Z(x) = W(x)$ für alle $x \in X$. Die Wegkomponenten sind also die Zusammenhangskomponenten. Sie sind offen und abgeschlossen, und es gilt mit einem Repräsentantensystem $(x_i)_{i \in I}$ der Zusammenhangskomponenten als topologischer Raum

$$X = \sqcup_{i \in I} W(x_i) = \sqcup_{i \in I} Z(x_i) \; .$$

Beweis.
Nach Satz 1.9.18 gilt immer $W(x) \subset Z(x)$. Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist X lokal zusammenhängend. Nach Satz 1.9.15 sind die Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen.

Als Menge gilt

$$X = \sqcup_{i \in I} W(x_i) \; .$$

Die Wegkomponenten $W(x)$ sind offen, weil jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine wegzusammenhängende Umgebung von x enthält. Nun gilt

$$W(x_i) = X \setminus \cup_{j \in I \setminus \{i\}} W(x_j)$$

so dass die Wegkomponente $W(x_i)$ als Komplement offener Mengen auch abgeschlossen ist. Somit gilt auch als topologischer Raum nach Lemma 1.8.13

$$X = \sqcup_{i \in I} W(x_i) \ .$$

Andererseits ist als topologischer Raum $X = \sqcup_{i \in I} Z(x_i)$ mit $W(x_i) \subset Z(x_i)$. Angenommen, es wäre $Z(x) \supsetneq W(x)$ für ein $x \in X$. Dann wäre $Z(x) = (Z(x) \setminus W(x)) \dot\cup W(x)$, im Widerspruch dazu, dass $Z(x)$ zusammenhängend ist. □

1.10 Quotientenräume

Definition 1.10.1
Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi : X \to X/_\sim$ die kanonische Projektion. Die Finaltopologie auf $X/_\sim$ bezüglich π heißt Quotiententopologie $\mathcal{T}_\sim$ und $X/_\sim$ heißt Quotientenraum von X bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$.

Es ist also $O \subset X/_\sim$ nach Satz 1.8.8 genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(O)$ offen in X ist. $\mathcal{T}_\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/_\sim$, so dass die kanonische Projektion π stetig ist.

Beispiel 1.10.2.
Betrachte auf $X = \mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Wir werden später in Beispiel 1.10.10.1 sehen, dass $X/_\sim \cong \mathbb{S}^1$ als topologische Räume, wobei $X/_\sim$ mit der Quotiententopologie und $\mathbb{S}^1$ mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^2$ versehen ist.

Definition 1.10.3
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ nicht leer. Betrachte die Äquivalenzrelation mit $a \sim_A a'$ falls $a, a' \in A$, und auf $X \setminus A$ sei $\sim_A$ trivial, d.h. es gibt nur die Relation $(x \sim_A x)$. Dann setze

$$X/A := X/_{\sim_A} \ .$$

Im Quotientenraum X_A werden alle Punkte der Teilmenge $A \subset X$ zu einem Punkt identifiziert. Damit hat X/A immer einen ausgezeichneten Punkt. Wir setzen $X/_\emptyset = X \sqcup \{*\}$.

Beispiele 1.10.4.

1. Seien X, Y topologische Räume und Punkte $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ gewählt. Dann betrachte $A := \{x_0, y_0\} \subset X \sqcup Y$. Dann heißt

   $$X \vee Y := X \sqcup Y/A = X \sqcup Y/x_0 \sim y_0$$

   das Bouquet oder die verbundene Summe von X und Y. Es hängt im Allgemeinen von der Wahl der Punkte x_0, y_0 ab.

   Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ eine Figur von der Form zweier sich berührender Kreise.

2. Seien X, Y mit Punkten $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ wie in 1. gewählt. Die Abbildungen
$$\begin{array}{ccc} X & \to & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, y_0) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \to & X \times Y \\ y & \mapsto & (x_0, y) \end{array}$$
induzieren eine Abbildung $X \sqcup Y \to X \times Y$, die x_0 und y_0 auf den gleichen Punkt (x_0, y_0) schickt, sonst aber injektiv ist und daher eine Injektion
$$X \vee Y \to X \times Y \ .$$
Dann heißt der topologische Raum $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$ das Smashprodukt von X und Y.

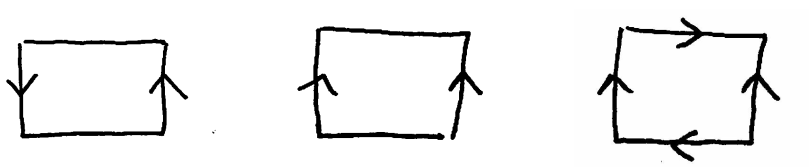
Wir überlegen uns als Beispiel $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$. Das Produkt $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist ein zweidimensionaler Torus, die Teilmenge $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ darin sind ein Meridian und eine Länge, die sich in einem Punkt schneiden. Kontrahiert man diese auf einen Punkt, so erhält man die Sphäre $\mathbb{S}^2$.

Allgemeiner gilt $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}$.

3. Betrachte die auf $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ von $x \sim -x$ erzeugte Äquivalenzrelation. Der Raum $\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2/_\sim$ heißt projektive Ebene.

Betrachte auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $x \approx y$, falls es $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $x = \lambda y$. Ähnlich betrachte auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation mit $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$, bei der antipodale Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe identifiziert werden. Dann gilt
$$\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2/_\sim \ \cong \ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/_\approx \ \cong \ \mathbb{D}^2/_\sim \ .$$
(Das wird aus Satz 1.10.12 folgen.)

4. Andere Beispiele für topologische Räume, die sich als Quotientenräume darstellen lassen, sind das Möbiusband, der Zylinder oder die Kleinsche Flasche.



Wir untersuchen nun, was bei Quotienträumen mit den Trennungsaxiomen passiert.

Beispiel 1.10.5.
Definiere auf $X := \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ die Äquivalenzrelation $(x, 1) \sim (x, -1)$ für $x \neq 0$. Der Quotientenraum ist eine "Gerade mit zwei Ursprüngen". Man kann die beiden Punkte $(0, -1)$ und $(0, 1)$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen. Obwohl X hausdorffsch war, ist der Quotient $X/\sim$ es nicht.

Satz 1.10.6.
1. Sei X regulär und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist X/A Hausdorffsch.

2. Sei X normal und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist X/A normal.

Beweis.
Wir zeigen nur die erste Aussage. Seien $x, y \in X/A$ verschiedene Punkte. Sind beide vom Punkt $[A]$ verschieden, so betrachte die eindeutigen Repräsentanten in X und disjunkte Umgebungen in X, die A nicht treffen. (Solche Umgebungen existieren, weil X regulär ist.) Die Bilder dieser Umgebungen in X/A trennen die Punkte. Ist einer der Punkte $y = [A]$, so benutze die Regularität in X, um das Urbild von x und A in X durch offenen Umgebungen zu trennen. □

Satz 1.10.7.
Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten auf dem Urbildraum X die Äquivalenzrelation $x \sim_f y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ und versehen $X/_{\sim_f}$ mit der Quotiententopologie, so dass die kanonische Projektion $X \xrightarrow{\pi} X/_{\sim_f}$ wegen der Eigenschaft einer Finaltopologie stetig ist. Das Bild $f(X) \xrightarrow{j} Y$ versehen wir mit der Unterraumtopologie, so dass j nach Satz 1.6.2.1 stetig ist. Wir zerlegen

$$f : \quad X \xrightarrow{\pi} X/_{\sim_f} \xrightarrow{\overline{f}} f(X) \xrightarrow{j} Y \ .$$

1. Dann ist die Abbildung $\overline{f}$ stetig.
2. Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen (oder wenn sie abgeschlossen) ist.

Beweis.
Da das Bild $f(X)$ die Initialtopologie bezüglich $f(X) \xrightarrow{j} Y$ trägt, folgt aus der Stetigkeit der Verkettung $f = j \circ (\overline{f} \circ \pi)$, dass $\overline{f} \circ \pi$ stetig ist. Da $X/_{\sim_f}$ die Finaltopologie bezüglich $X \xrightarrow{\pi} X/_{\sim_f}$ trägt, folgt aus der Stetigkeit der Verkettung $\overline{f} \circ \pi$ die Stetigkeit von $\overline{f}$. □

Definition 1.10.8
Es gelten die Bezeichnungen aus Satz 1.10.7.

1. *Ist $\overline{f}$ ein Homömomorphismus, so heißt $\overline{f}$ <u>identifizierende Abbildung</u>.*
2. *Ist $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und $\overline{f}$ ein Homöomorphismus, so nennt man die Topologie von Y <u>Identifizierungstopologie</u> bezüglich f. In diesem Fall vereinfacht sich die Zerlegung zu*

$$f : \quad X \xrightarrow{\pi} X/_{\sim_f} \xrightarrow{\overline{f}} Y \ .$$

Es folgt sofort:

Korollar 1.10.9.
Ist $f : X \to Y$ stetig, surjektiv und offen, so trägt Y die Identifizierungstopologie bezüglich f.

Beispiele 1.10.10.

1. Betrachte

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & \exp(2\pi i t) \end{array}$$

Die Abbildung ist stetig, surjektiv und offen bezüglich der von $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Es gilt $x \sim_f y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Daher ist die Unterraumtopologie gleich der Quotiententopologie, als topologischer Raum

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = f(\mathbb{R}) \ .$$

2. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}$$

die jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor den zugehörigen Einheitsvektor zuordnet. Sie ist stetig, surjektiv und offen. Sie induziert auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation $x \sim_f y$ genau dann, wenn es $\lambda > 0$ gibt mit $x = \lambda y$. Die Identifizierungstopologie auf $\mathbb{S}^1$ stimmt also mit der Unterraumtopologie überein.

Definition 1.10.11
Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X mit kanonischer Projektion $X \xrightarrow{\pi} X/_\sim$.

1. *Die Saturierung einer Teilmenge $A \subset X$ bezüglich der Relation $\sim$ ist die Teilmenge*

$$\mathrm{Sat}^X(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) \subset X \ .$$

Offenbar ist $A \subset \mathrm{Sat}^X(A)$.

2. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt saturiert, wenn $A = \mathrm{Sat}^X(A)$ gilt.*

Satz 1.10.12.
Sei X ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation $\sim_X$. Sei eine Teilmenge $Y \subset X$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1. Y schneidet jede Äquivalenzklasse von $\sim_X$ in wenigstens einem Punkt.
2. Ist $B \subset Y$ offen und saturiert in Y, so ist $\mathrm{Sat}^X(B)$ offen in X.

Bezeichne die auf Y durch Einschränkung erhaltene Äquivalenzrelation mit $\sim_Y$. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} h & : Y/_{\sim_Y} & \to & X/_{\sim_X} \\ & [y]_Y & \mapsto & [y]_X \end{array}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis.
Betrachte

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ Y/_{\sim_Y} \arrow[r, "h"] & X/_{\sim_X} \end{tikzcd}$$

Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim_Y$ ist h injektiv; wegen Bedingung 1. ist h surjektiv.

$\pi_X \circ \iota = h \circ \pi_Y$ ist stetig. Damit ist wegen der universellen Eigenschaft von Quotientenräumen auch die Abbildung h stetig.

Es bleibt zu zeigen, dass h offen ist. Sei $V \subset Y/_{\sim_Y}$ offen. Dann ist $B := \pi_Y^{-1}(V)$ nach Definition der Quotientenraumtopologie offen in Y. Außerdem gilt

$$\pi_Y^{-1} \circ \pi_Y(B) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_Y^{-1} \circ (\pi_Y \circ \pi_Y^{-1})(V) = \pi_Y^{-1}(V) \stackrel{\text{def}}{=} B \ ,$$

denn $\pi_Y \circ \pi_Y^{-1}(E) = E$ für alle $E \subset Y/_{\sim_Y}$, weil π_Y surjektiv ist. Also ist B saturiert in Y. Wegen der zweiten Annahme ist dann

$$\pi_X^{-1} \circ \pi_X(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Sat}^X(B)$$

offen in X. Wir rechnen

$$h(V) = h\pi_Y(B) = \pi_X(\iota(B)) = \pi_X \pi_X^{-1} \pi_X(\iota(B)) = \pi_X(\mathrm{Sat}^X(B)) \ .$$

Dies ist offen in $X/_{\sim_X}$, weil $\pi_X^{-1}\pi_X(\mathrm{Sat}^X(B)) = \mathrm{Sat}^X(B)$ offen in X ist. Also ist die Abbildung h offen. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir den Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auch durch Identifizierung der gegenüberliegenden Kanten eines Rechteckes beschreiben.

Wir wollen nun noch entlang von Abbildungen verkleben:

Definition 1.10.13
Seien X, Y topologische Räume. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ eine Abbildung. Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$:

$$z_1 \sim_f z_2 \quad \textit{genau dann} \quad \begin{cases} z_1 = z_2 & \textit{für beliebige } z_1, z_2 \in X \ . \\ z_1, z_2 \in A \textit{ und } f(z_1) = f(z_2) \\ z_1 \in A, z_2 \in f(A) \textit{ und } f(z_1) = z_2 \\ z_2 \in A, z_1 \in f(A) \textit{ und } f(z_2) = z_1 \end{cases}$$

Der Quotientenraum $X \sqcup Y/\sim_f$ wird mit $X \cup_f Y$ bezeichnet und heißt der durch Zusammenkleben von X und Y mittels f entstandene Raum.

Es werden also die Punkte in $f(A) \subset Y$ mit ihren Urbildern in A identifiziert.

Beispiele 1.10.14.

1. Seien $X = Y = \mathbb{D}^2$ abgeschlossene Kreisscheiben, $A \subset X$ der Rand von X und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Dann ist
$$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{D}^2 \cup_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2 \ .$$
Hierbei schreiben wir als Subskript die Teilmenge $A = \mathbb{S}^1$ und notieren nicht die Abbildung.

2. Seien $X = Y = [0, 1]$. Dann erhalten wir für $A_1 = \{0, 1\}$ und $f_1 = \mathrm{id}_{A_1}$ durch Zusammenkleben eine Kreislinie und für $A_2 = \{\frac{1}{2}\}$ und $f_2 = \mathrm{id}_{A_2}$ durch Zusammenkleben zwei sich in einem Punkt berührende Intervalle. Die Abbildung f ist wesentlich, auch wenn sie manchmal in der Notation unterdrückt wird.

Definition 1.10.15
Sei $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel, $e^n = \mathring{\mathbb{D}}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{D}^n \setminus \mathring{\mathbb{D}}^n$, jeweils versehen mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^n$.

1. *Die zu diesen Räumen homöomorphe Räume heißen n-dimensionaler Ball, n-dimensionale Zelle und $(n-1)$-dimensionale Sphäre.*

2. *Sei $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine Abbildung in einen topologischen Raum. Man sagt, $X \cup_f \mathbb{D}^n$ sei durch Ankleben einer n-Zelle mittels f entstanden.*

Beispiele 1.10.16.

1. Die Sphäre erhält man durch Ankleben einer 2-Zelle an die Kreisscheibe $\mathbb{D}$ entlang des Randes.

2. Klebt man an den Rand eines Möbiusschen Bandes eine 2-Zelle, so erhält man die reelle projektive Ebene.

Man kann natürlich auch mehrere disjunkte n-Zellen durch eine Familie stetiger Abbildungen gleichzeitig ankleben. Wir definieren damit induktiv:

Definition 1.10.17

1. *Ein nulldimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, versehen mit der diskreten Topologie.*

2. *Ein n-dimensionaler CW-Komplex ist ein Raum der Form $X \cup_f e_I^n$, wobei X ein k-dimensionaler CW-Komplex ist mit $k < n$ und $e_I^n = \sqcup_{i \in I} e^n$ die Summe von n-Zellen ist, wobei die Gesamtzahl der Zellen endlich sei.*

Beispiel 1.10.18.
Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist zu einem 2-dimensionalen CW-Komplex homöomorph. Man klebe an einen Punkt eine 1-dimensionale Zelle und an die entstehende Kreislinie zwei 2-Zellen für die beiden Hemisphären.

Alternativ kann man auch eine 2-Zelle an einen Punkt kleben, um $\mathbb{S}^2$ zu erhalten.

1.11 Filter

Wir formalisieren die Eigenschaften des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ eines Punktes $x \in X$ in einem topologischen Raum X.

Definition 1.11.1

1. *Ein Filter F auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:*

   (a) *$X \in F$, aber $\emptyset \notin F$.*

   (b) *Abgeschlossenheit unter endlichen Schnitten: aus $A, B \in F$ folgt $A \cap B \in F$.*

   (c) *Abgeschlossenheit unter Obermengen: aus $B \in F$ und $B \subset C$ folgt $C \in F$.*

2. *Ein nicht-leeres System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X heißt Filterbasis auf X, falls*

   (a) *Der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält.*

   (b) *$\emptyset \notin \mathcal{B}$ gilt.*

Bemerkungen 1.11.2.

1. Für jede Menge X ist $F = \{X\}$ ein Filter. Für jedes $x \in X$ bildet $F_x := \{A \subset X \mid x \in A\}$ einen Filter.

2. Sei X ein topologischer Raum; die Menge der Umgebungen $\mathcal{U}(x)$ eines Punktes $x \in X$ bildet einen Filter, den Umgebungsfilter von x.

3. Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf einer Menge X. Dann ist das System von Obermengen von Mengen in $\mathcal{B}$
$$\langle\mathcal{B}\rangle = \{Y \subset X \mid \text{ es gibt } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset Y\}$$
ein Filter, der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter.

4. Als weiteres Beispiel wähle $A \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge einer Menge X. $\mathcal{B} := \{A\}$ ist eine Filterbasis und erzeugt einen Filter, der alle Obermengen von A enthält. (Die Intuition ist: in einem Filter F sind alle Teilmengen, die nicht durch den Filter durchpassen. Hier bleiben alle Obermengen von A im Filter hängen.)

5. Ist F ein Filter und $\mathcal{B} \subset F$ eine Filterbasis, so heißt $\mathcal{B}$ eine Filterbasis für F, falls es für jedes $Y \in F$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $B \subset Y$. Dann ist F der von der Filterbasis $\mathcal{B}$ erzeugte Filter.

6. Sei (x_n) eine Folge mit Werten in einer Menge X. Dann ist das System der Mengen $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, nämlich der Endstücke der Folge, eine Filterbasis auf X.

7. Die Teilmengen
$$\mathcal{B} := \{(a, \infty) \ \mid a \in \mathbb{R}\}$$
bilden die Basis eines Filters auf $\mathbb{R}$, des Fréchet-Filters.

8. Ist F ein Filter auf einer Menge X und $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung, so ist
$$\mathcal{B}_f := \{f(A) \mid A \in F\}$$
eine Filterbasis für den Bildfilter $f(F)$des Filters F unter der Abbildung f.

Definition 1.11.3
Seien F_1 und F_2 Filter auf einer Menge. F_1 heißt feiner als F_2 und F_2 heißt gröber als F_1, falls $F_2 \subset F_1$ gilt.

Denn in einem feineren Filter "bleibt mehr hängen".

Beispiel 1.11.4.
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist im Allgemeinen gröber als der Filter F_x aus Bemerkung 1.11.2.1. Der Filter $F = \{X\}$ auf einer Menge X ist der gröbste Filter auf X.

Definition 1.11.5
Ein Filter F auf einer Menge X heißt Ultrafilter, wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

Beispiel 1.11.6.
Der Filter F_x aus Bemerkung 1.11.2.1 ist für jedes $x \in X$ ein Ultrafilter.

Angenommen, F ist ein Filter, der feiner als der Filter F_x ist, $F_x \subsetneq F$. Dann existiert $Y \in F \setminus F_x$. Das heißt aber nach Definition von F_x, dass $x \notin Y$. Andererseits ist $\{x\} \in F_x \subset F$. Damit muss der Schnitt $\{x\} \cap Y$ im Filter F liegen, aber der Schnitt ist leer. Ein Filter darf aber nicht die leere Menge enthalten.

Satz 1.11.7.

1. Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

2. Ein Filter F auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in F$ oder $X \setminus A \in F$ gilt.

Zum Beispiel ist für $\emptyset \neq A \subset X$ nach Bemerkung 1.11.2.4 das System von Teilmengen $F_A = \{Y \subset X \,|\, A \subset Y\}$ ein Filter. Ist $a \in A$, so ist der Filter $F_a = \{Z \subset X \,|\, a \in Z\}$ aus Bemerkung 1.11.2.1 nach Beispiel 1.11.6 ein Ultrafilter. Er enthält den Filter F_A; dies zeigt, dass der Ultrafilter im Allgemeinen nicht eindeutig durch den Filter bestimmt ist (wie üblich bei maximalen Elementen, die man mit dem Zornschen Lemma findet).

Beweis.

1. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Filter auf X, die feiner sind als ein gegebener Filter F_0. Die Menge $\mathcal{F}$ wird durch Inklusion partiell geordnet. Ist $\mathcal{F}_0$ eine nicht-leere total geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$, so ist $\cup_{F \in \mathcal{F}_0} F$ ein Filter und eine obere Schranke von $\mathcal{F}_0$. Nach dem Zornschen Lemma, siehe Anhang A, gibt es ein maximales Element, das per Definition ein Ultrafilter ist.

2. Da $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, kann es im Filter F nicht zwei Mengen F_1, F_2 geben mit $F_1 \subset A$ und $F_2 \subset X \setminus A$. Also treffen alle $Y \in F$ entweder A, also $A \cap Y \neq \emptyset$, oder alle treffen $F \setminus A$ nicht-trivial.

   Wir nehmen an, dass für alle $Y \in F$ gilt $Y \cap A \neq \emptyset$. Dann ist
   $$\mathcal{B} := \{Y \cap A \,|\, Y \in F\}$$
   eine Filterbasis und der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter $\langle \mathcal{B} \rangle$ feiner als F. Da aber F Ultrafilter sein soll, gilt $\langle \mathcal{B} \rangle = F$. Offenbar ist aber $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

   Für alle Teilmengen $A \subset X$ sei nun entweder $A \in F$ oder $X \setminus A \in F$. Sei nun der Filter G echt feiner als F. Dann gibt es $Y \in G$ mit $Y \notin F$. Wegen der Annahme ist $X \setminus Y \in F$. Da G feiner ist, ist auch $X \setminus Y \in G$. Die disjunkten Mengen Y und $X \setminus Y$ können aber nicht gleichzeitig Elemente eines Filters sein, Widerspruch.

□

Definition 1.11.8

1. *Ein Filter F auf einem topologischen Raum X konvergiert gegen $x \in X$, in Zeichen $F \to x$, falls $\mathcal{U}(x) \subset F$ gilt, also falls der Filter F feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist, $\mathcal{U}(x) \subset F$.*

2. *Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührpunkt eines Filters F, falls für alle $Y \in F$ und alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $Y \cap U \neq \emptyset$.*

Beispiele 1.11.9.

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in einem topologischen Raum X und F der von (x_n) erzeugte Filter mit der Basis aus Mengen von Endfolgen $B_k := \{x_i\}_{i\geq k}$ wie in Beispiel 1.11.2.5. Dann ist $x \in X$ genau dann Berührpunkt der Folge, wenn x Berührpunkt des Filters ist.

   Denn ein Punkt $x \in X$ ist nach Definition 1.3.3.3 genau dann Berührpunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele Glieder der Folge enthält. Genau dann ist aber $B_n \cap U \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. In der gleichen Situation ist $x \in X$ genau dann Grenzwert der Folge, wenn der Filter gegen x konvergiert.

   Denn gilt $x_n \to x$, so gibt es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N = N(U)$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$. Dann ist aber $B_n \subset U$ für alle $n \geq N$ und somit $U \in F$.

   Umgekehrt gelte $\mathcal{U}(x) \subset F$. Gegeben eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$, finde $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $B_{N_0} \subset U$; das heißt aber, $x_n \in U$ für alle $n \geq N_0$.

3. Der Fréchet-Filter hat keine Berührpunkte.

4. Die Menge aller Berührpunkte eines Filters F ist $\cap_{Y\in F}\overline{Y}$. Denn $x \in \cap_{Y\in F}\overline{Y}$ genau dann, wenn für alle $Y \in F$ gilt $x \in \overline{Y}$, und das ist genau dann der Fall, wenn für alle $Y \in F$ und alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $Y \cap U \neq \emptyset$.

Satz 1.11.10.

1. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist der Abschluss $\overline{A}$ die Menge der Berührpunkte des Filters $F_A := \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$ der Obermengen von A auf X und somit mit 1.11.9.4
$$\overline{A} = \cap_{Y\in F_A}\overline{Y} = \cap_{A\subset Y}\overline{Y} \ .$$

2. Sei X ein topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn es einen Filter F auf X gibt mit $A \in F$ und $F \to x$.

3. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn das Bild jeden Filters F auf X, der gegen x konvergiert, gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis.

1. x ist genau dann Berührpunkt des Filters F_A, wenn für jedes $Y \in F_A$, also für jede Obermenge $Y \supset A$ und jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap Y \neq \emptyset$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap A \neq \emptyset$. Genau dann ist aber $x \in \overline{A}$.

2. Sei zunächst $x \in \overline{A}$. Wir geben einen Filter F an, der gegen x konvergiert:
$$\mathcal{B} := \{A \cap U \,|U \in \mathcal{U}(x)\}$$
   ist die Basis eines Filters F. Denn $A \cap U$ ist für jede Umgebung U von x nicht leer, weil x Berührpunkt von A ist, und $\mathcal{B}$ ist abgeschlossen unter Durchschnitten wegen
$$(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{B} \ .$$
   Mit $U = X$ sieht man, dass $A \cap X = A \in \mathcal{B}$, also $A \in F$ gilt. Ferner gilt $F \to x$, denn $\mathcal{U}(x) \subset F$, weil $U \supset A \cap U$ und somit $U \in F$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$.

   Gelte umgekehrt $F \to x$, also $\mathcal{U}(x) \subset F$, und sei $A \in F$. Dann ist für alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ die Menge $A \cap U$ in F und damit nicht leer. Also ist $x \in \overline{A}$.

3. Das Bild jeden Filters F auf X, der gegen x konvergiert, konvergiere gegen $f(x)$. Wähle als Filter den Umgebungsfilter selbst, $F = \mathcal{U}(x)$. Dann konvergiert $f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$, also gilt $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$. Für jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x))$ können wir also $U \in \mathcal{U}(x)$ finden mit $f(U) \subset V$. Das heißt aber nach Definition 1.3.6.1, dass die Abbildung f im Punkt $x \in X$ stetig ist.

   Sei umgekehrt f stetig und gelte für einen Filter, dass $F \to x$. Für jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x))$ gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$. Wegen $F \to x$ gilt $U \in \mathcal{U} \subset F$ und somit $f(U) \subset \mathcal{B}_{f(F)}$. Wegen $f(U) \subset V$ folgt, dass auch V im Bildfilter $f(F)$ ist. Da V beliebig war, folgt $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(F)$ und somit $F(f) \to f(x)$.

□

Satz 1.11.11.
Ein Punkt $x \in X$ eines topologischen Raums ist genau dann Berührpunkt eines Filters F auf X, wenn es einen Filter $G \supset F$ gibt, der gegen x konvergiert.

Beweis.
Hat der Filter F den Berührpunkt $x \in X$, so ist

$$\mathcal{B} := \{U \cap Y \ \text{ mit } \ U \in \mathcal{U}(x) \text{ und } Y \in F\}$$

eine Filterbasis für einen Filter G, der feiner ist als F und $\mathcal{U}(x)$ und somit gegen x konvergiert.

Gilt umgekehrt $F \subset G$ und $G \to x$, so liegt jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ und jedes $Y \in F$ im Filter G, also ist $Y \cap U \neq \emptyset$, also ist x Berührpunkt des Filters F. □

Satz 1.11.12.
Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ Abbildungen. Wir versehen die Menge X mit der Initialtopologie. Dann konvergiert ein Filter F auf X genau dann gegen $x \in X$, wenn $f_i(F) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.

Beweis.
Konvergiere $F \to x$. Da die Abbildungen f_i bezüglich der Initialtopologie stetig sind, folgt mit Satz 1.11.10.3, dass $f_i(F) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.

Umgekehrt hat $x \in X$ in der Initialtopologie nach Satz 1.8.2 die Umgebungsbasis aus Mengen

$$\cap_{e\in E} f_e^{-1}(V_e) \quad \text{ mit } E \subset I \text{ endlich und } V_e \in \mathcal{U}(f_e(x)) \ .$$

Nach Annahme gibt es für jedes V_e mit $e \in E$ ein $U_e \in F$ mit $f_e(U_e) \subset V_e$. Es ist der endliche Schnitt $U := \cap_{e\in E} U_e \in F$. Aus $f_e(U_e) \subset V_e$ folgt

$$f_e^{-1}(V_e) \supset f_e^{-1} f_e(U_e) \supset U_e$$

und somit $U \subset \cap_{e\in E} f_e^{-1}(V_e)$. Damit ist jedes Element der Umgebungsbasis im Filter F enthalten, also $F \to x$. □

Als Spezialfall erhalten wir:

Korollar 1.11.13.
Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $X := \prod_{i\in I} X_i$ ihr Produkt mit Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Ein Filter F auf X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn alle Bildfilter $\pi_i(F) \to \pi(x)$ konvergieren.

1.12 Kompaktheit

Definition 1.12.1

1. *Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen einer Menge X heißt Überdeckung von X, wenn $X = \cup_{U\in\mathcal{U}} U$ gilt.*

2. *Eine Überdeckung eines topologischen Raumes X heißt offen, wenn jedes $U \in \mathcal{U}$ offen in X ist.*

3. *Eine Teilüberdeckung einer Überdeckung $\mathcal{U}$ von X ist eine Teilfamilie $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, die ebenfalls eine Überdeckung ist.*

Lemma 1.12.2.
Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

2. Sind A_i, $i \in I$ abgeschlossene Teilmengen mit $\cap_{i\in I} A_i = \emptyset$, so gibt es endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit
$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} = \emptyset \ .$$

3. Jeder Filter auf X hat einen Berührpunkt.

4. Jeder Ultrafilter konvergiert.

Beweis.

1.⇒ 2. Die Mengen $U_i := X \setminus A_i$ bilden eine offene Überdeckung von X. Finde eine endliche Teilüberdeckung, $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$; dann ist $A_{i_1} \cap \ldots A_{i_n} = \emptyset$.

2.⇒ 3. Sei $F := \{Y_i\}_{i\in I}$ ein beliebiger Filter auf X. Betrachte die abgeschlossenen Mengen $A_i := \overline{Y}_i$. Dann sind alle endlichen Schnitte nicht-leer,
$$A_{i_1} \cap \ldots A_{i_n} \neq \emptyset \quad \text{für alle } i_1, \ldots, i_n \ ,$$
weil F ein Filter ist. Wegen 2. ist dann $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Jeder Punkt $x \in \cap_{i\in I} A_i$ ist dann Berührpunkt von F nach Satz 1.11.9.4.

3.⇒ 4. Jeder Ultrafilter F habe einen Berührpunkt x; nach Satz 1.11.11 gibt es dann einen feineren Filter $G \supset F$, der gegen x konvergiert. Weil F Ultrafilter ist, ist F schon maximal und es gilt $F = G$.

4.⇒ 1. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ betrachte
$$A_E := X \setminus (\cup_{e\in E} U_e) \neq \emptyset \ .$$
Der Schnitt zweier Mengen A_E und $A_{E'}$ ist
$$A_E \cap A_{E'} = X \setminus (\cup_{e\in E\cup E'} U_e) = A_{E\cup E'}$$
und enthält daher eine Menge der Form $A_{E''}$. Diese Mengen bilden daher die Basis eines Filters, der in einem Ultrafilter F enthalten ist.

Nach Annahme gilt dann $F \to x$ für ein $x \in X$, was heißt, dass F feiner ist als der Umgebungsfilter von x. Da eine Überdeckung vorliegt, gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Es muss wegen $F \to x$ die Umgebung U_i von x in F liegen, also $U_i \in F$ gelten. Aber nach Konstruktion von F muss auch $X \setminus U_i \in F$ gelten, im Widerspruch zu Satz 1.11.7.2.

□

Definition 1.12.3
Ein topologischer Raum heißt <u>kompakt</u>, wenn er die Bedingungen des Lemmas 1.12.2 erfüllt.

In mancher Literatur heißen solche Räume auch nur <u>quasikompakt</u> und man fordert zusätzlich Hausdorffsch für Kompaktheit.

Satz 1.12.4.
Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann gilt:

1. Jeder abgeschlossene Teilraum von X ist kompakt.
2. Ist $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, so ist Y kompakt.

Beweis.

1. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zu einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A finde in X offene Mengen $V_i \subset X$ mit $U_i = V_i \cap A$. Dann ist $(X \setminus A) \cup \cup_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung von X, in der wir eine endliche Teilüberdeckung $\cup_{i\in E} V_i \cup (X \setminus A)$ von X finden können. Dann ist $\cup_{i\in E} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung von A.
2. Ist $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y, so ist $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von X. Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(U_i))_{i\in E}$ mit $E \subset I$ endlich. Da f surjektiv ist, ist $(U_i)_{i\in E}$ eine endliche Überdeckung von Y.

□

Korollar 1.12.5.

1. Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.
2. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt, so nimmt f sein Maximum und Minimum an, denn $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

Vorsicht: ist $K \subset Y$ kompakt, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ nicht unbedingt kompakt. Als Gegenbeispiel betrachte eine konstante Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 1.12.6.
Das abgeschlossene Interval $[0, 1]$ ist kompakt.

Denn sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in J}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der endlichen Teilmengen von J. Setze

$$T := \{t \in [0, 1] \mid \text{es gibt } E \in \mathcal{E}\,,\ \text{so dass } \cup_{e\in E} U_e \supset [0, t]\}$$

- $T \neq \emptyset$, denn $0 \in T$, weil $0 \in U_i$ für ein $i \in J$.

- T ist nach oben beschränkt als Teilmenge von $[0,1]$. Setze $s := \sup T$.
- Ist $t_2 \in T$ und $0 \le t_1 < t_2$, so gilt $[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \cup_{i \in E} U_i$ und somit $t_1 \in T$. Also ist T ein halboffenes oder ein abgeschlossenes Interval.
- T ist kein halboffenes Intervall, also von der Form $[0, s)$ mit $0 < s < 1$. Denn dann ist $s \in U_{i_0}$ für einen Index i_0. Da U_{i_0} offen ist, gibt es $t < s$ mit $[t, s] \subset U_{i_0}$. Weil $s = \sup T$, ist $t \in T$. Damit hat aber $[0, s] = [0, t] \cup [t, s]$ eine endliche offene Überdeckung bestehend aus U_{i_0} und einer endlichen offenen Überdeckung von $[0, t]$.
- Also ist $T = [0, s]$. Angenommen, es wäre $s < 1$. Dann ist $s \in U_{i_1}$ für einen Index i_1 und es existiert $t > s$ mit $[s, t] \subset U_{i_1}$. Damit ist aber auch $[0, t] \subset T$, im Widerspruch dazu, dass s das Supremum von T ist.

Beispiele 1.12.7.

1. Ein endlicher topologischer Raum $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ist kompakt.
2. $\mathbb{R}^n$ ist nicht kompakt: die offene Überdeckung $(B_1(x))_{x \in \mathbb{R}^n}$ durch Einheitskugeln hat keine endliche Teilüberdeckung.
3. Die Menge $X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt: zum Beispiel hat die Überdeckung $B_{\frac{1}{2n(n+1)}}(\frac{1}{n})$ keine endliche Teilüberdeckung. Aber die Menge $X' := X \cup \{0\}$ ist kompakt: in jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele der Punkte $\frac{1}{n}$, d.h. wir brauchen für eine Überdeckung nur noch endlich viele andere offene Mengen.

Lemma 1.12.8.
Sei X topologischer Raum, $L \subset X$ und $K \subset X$ kompakt und $L \cap K = \emptyset$. Kann man jeden Punkt von K und die ganze Menge L durch offene Umgebungen trennen, dann kann man auch ganz K und ganz L durch offene Umgebungen trennen.

Beweis.
Für jeden Punkt $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x und eine offene Umgebung $V_x \supset L$ von L, die disjunkt sind, $K_x \cap L_x = \emptyset$. In der Überdeckung $(U_x)_{x \in K}$ des kompakten Raums K wähle eine endliche Teilüberdeckung,

$$K \subset U := U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} .$$

Dann ist der *endliche* Durchschnitt $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ eine offene Umgebung von L, die zu U disjunkt ist. □

Satz 1.12.9.
Sei $K \subset X$ und X Hausdorffsch. Ist K kompakt, so ist K in X abgeschlossen.

Beweis.
Sei $y \in X \setminus K$. Setze $L = \{y\}$ und finde, da X Hausdorffsch ist, für jeden Punkt $x \in K$ offene Umgebungen, die x und y trennen. Nach Lemma 1.12.8 gibt es dann eine offene Umgebung von y, die die ganze Menge K nicht trifft. Also ist $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen. □

Korollar 1.12.10.

1. Sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Ist der Urbildraum X kompakt und der Bildraum Y Hausdorffsch, so ist f ein Homöomorphismus.

2. Sei $f : X \to Y$ stetig und injektiv. Ist der Urbildraum X kompakt und der Bildraum Y Hausdorffsch, so ist f eine Einbettung.

Beweis.
Es bleibt zu zeigen, dass f abgeschlossen ist. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A nach Satz 1.12.4.1 kompakt. Nach Satz 1.12.4.2 ist $f(A) \subset Y$ kompakt. Nach Satz 1.12.9 folgt aus der Tatsache, dass Y Hausdorffsch ist, dass $f(A)$ abgeschlossen ist. Die Abbildung f ist also abgeschlossen. □

Satz 1.12.11.
Jeder kompakte Hausdorffraum X ist normal.

Beweis.
Seien A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen von X; sie sind nach Satz 1.12.4.1 kompakt. Weil X Hausdorffsch ist, finde für jedes Paar $a \in A$ und $b \in B$ disjunkte offene Umgebungen U_{ab} von a und V_{ab} von b. Dann hat für festes $a \in A$ die offene Überdeckung $\cup_{b\in B} V_{a,b}$ der kompakten Menge B eine offene Teilüberdeckung $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$. Dann ist der endliche Durchschnitt $\cap_{i=1}^n U_{a,b_i}$ eine offene Umgebung von a, die disjunkt zur offenen Menge $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$ ist, die B enthält. Man kann also B und jeden Punkt $a \in A$ durch offene Umgebungen trennen. Nach Lemma 1.12.8 kann man dann auch A und B durch offene Mengen trennen, also ist X normal. □

Satz 1.12.12 (Tychnonoff)**.**
Ein Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn jeder topologische Raum X_i kompakt ist.

Man beachte, dass hier keine Endlichkeitsannahmen für die Indexmenge I gemacht werden.

Beweis.
Die Projektionen $\pi_j : X \to X_j$ sind nach Satz 1.8.4 stetig und surjektiv. Daher sind nach Satz 1.12.4.2 die Bilder X_j kompakt, wenn X kompakt ist.

Seien umgekehrt alle X_j kompakt. Sei F ein Ultrafilter auf X. Dann ist für jedes $j \in I$ der Bildfilter $\pi_i(F)$ ein Ultrafilter und konvergiert nach Lemma 1.12.2 gegen ein $x_i \in X_i$, weil X_i kompakt ist. Nach Satz 1.11.12 konverviert dann $F \to (x_i)_{i\in I}$. Also ist das Produkt kompakt. □

Wir erhalten hieraus leicht die bekannte Beschreibung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

Korollar 1.12.13 (Heine-Borel)**.**
Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis.
Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist K nach Satz 1.12.9 abgeschlossen, weil $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum nach Bemerkung 1.7.3.5 Hausdorffsch ist. Die offene Überdeckung $(B_1(x))_{x\in K}$ hat eine endliche Teilüberdeckung, weshalb K auch beschränkt ist.

Sei umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt. Weil K beschränkt ist, existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $K \subset [-a, a]^n$. Der Würfel $[-a, a]^n$ ist wegen des Satzes von Tychonoff 1.12.12 und Beispiel

1.12.6 kompakt. Wegen Satz 1.12.4 ist K als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Würfels $[-a, a]^n$ kompakt. □

1.13 Kompaktifizierungen

Wir erinnern daran, dass die stereographische Projektion eine Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ der reellen Ebene gibt.

Definition 1.13.1
Sei X ein topologischer Raum. X heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung in X besitzt.

Bemerkungen 1.13.2.

1. Das heißt nicht unbedingt, dass die kompakten Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.
2. Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt: $\overline{B_\epsilon(x)}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ eine kompakte Umgebung von x.

Satz 1.13.3.
Ist X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so ist X regulär.

Der Vergleich mit Satz 1.12.11 zeigt: kompakt und (T2) impliziert normal. Lokal kompakt und (T2) impliziert regulär.

Beweis.
Sei $x \in X$ und K eine kompakte Umgebung von x. Dann ist nach Satz 1.12.9 K abgeschlossen und als kompakter Hausdorffraum nach Satz 1.12.11 normal. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(X)$ in X ist $U \cap K$ eine Umgebung von x in K. Nun ist K insbesondere regulär; finde also eine Umgebung $V \in \mathcal{U}^K(X)$ mit $V \subset \overline{V} \subset U \cap K$. V ist aber auch Umgebung in X, weil K auch Umgebung von x ist. $\overline{V}$ ist auch abgeschlossen in X, da K abgeschlossen ist.

Die abgeschlossenen Umgebungen bilden also eine Umgebungsbasis von x. Nach Satz 1.7.6 ist X regulär. □

Satz 1.13.4.
Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Dann gibt es einen bis auf Homöomorphie eindeutigen kompakten Hausdorffraum X^+ mit $X \subset X^+$, so dass das Komplement $X^+ \setminus X$ aus einem Element besteht.

Bemerkungen 1.13.5.

1. Wir bezeichnen dann $X^+ \setminus X = \{\infty\}$ und nennen ∞ den unendlich fernen Punkt.
2. X^+ heißt die Ein-Punkt-Kompaktifizierung oder auch Alexandroff-Kompaktifizierung.

Beweis.
Auf der Menge $X^+ := X \dot{\cup} \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$ betrachte das folgende System offener Mengen:

- Alle offenen Mengen in X.
- Alle Mengen der Form $X^+ \setminus K$ mit K kompakt in X.

Wir rechnen nach, dass dies wirklich eine Topologie auf der Menge X^+ definiert:

1. Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie kompakter Teilmengen in X. Dann ist
$$\cup_{i\in I}(X^+ \setminus K_i) = X^+ \setminus \cap_{i\in I} K_i \ .$$
Da X Hausdorffsch ist, ist nach Satz 1.12.9 jedes K_i abgeschlossen; somit ist auch der Schnitt $\cap_{i\in I} K_i$ abgeschlossen. Wegen Satz 1.12.4.1 ist der Schnitt als Teilmenge einer der kompakten Mengen K_i kompakt.

2. Sei $(K_i)_{i\in I_1}$ eine beliebige Familie kompakter Teilmengen von X und $(O_i)_{i\in I_2}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von X. Dann ist $A_i := X \setminus O_i$ abgeschlossen und es gilt
$$\begin{aligned}&\cup_{i\in I_1}(X^+ \setminus K_i) \cup \cup_{j\in I_2} O_j = \cup_{i\in I_1}(X^+ \setminus K_i) \cup \cup_{j\in I_2}(X^+ \setminus A_j)\\ &= \cup_{I_1\cup I_2} X^+ \setminus (K_i \cap A_j) = X^+ \setminus \cap_{I_1\cup I_2}(K_i \cap A_j)\end{aligned}$$
Die Menge $K_i \cap A_j$ ist als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums K_i nach Satz 1.12.4.1 kompakt. Der Schnitt ist ebenfalls kompakt.

3. Sei $O \subset X$ offen und $K \subset X$ kompakt. Dann ist
$$(X^+ \setminus K) \cap O = \big(X^+ \setminus K \cap X\big) \cap O \ .$$
Da K abgeschlossen in X ist, ist $(X^+ \setminus K) \cap X$ offen in X und somit der Schnitt offen in X.

4. Seien K_1, K_2 kompakt in X. Dann ist auch $K_1 \cup K_2$ kompakt. (Denn eine Überdeckung von $K_1 \cup K_2$ liefert Überdeckungen von K_1 und K_2, die jeweils endliche Teilüberdeckungen haben.) Daher ist
$$\big(X^+ \setminus K_1\big) \cap \big(X^+ \setminus K_2\big) = X^+ \setminus (K_1 \cup K_2)$$
auch offen in X^+.

Wegen 1. und 2. ist die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen offen. Wegen 3. und 4. sind endliche Schnitte offener Mengen offen. Also liegt eine Topologie vor. Die offensichtliche Abbildung $X \to X^+$ ist eine Einbettung.

Wir untersuchen Eigenschaften dieser Topologie:

- X^+ ist Hausdorffsch. Zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ können durch offene Umgebungen getrennt werden, weil X als Hausdorffsch vorausgesetzt wurde. Sei also $x = \infty$ und $y \in X$. Da X lokal-kompakt ist, finde eine kompakte Umgebung K von y. Dann ist $X^+ \setminus K$ eine offene Umgebung von ∞. Die Umgebungen sind disjunkt, $K \cap (X^+ \setminus K) = \emptyset$.

- X^+ ist kompakt. Jede Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ enthält eine Menge der Form $U_{i_0} = X^+ \setminus K$ mit K kompakt. Überdecke dann K mit endlich vielen der Mengen U_i und X^+ durch diese Mengen und U_{i_0}.

Sei nun Y ein topologischer Raum mit den gleichen Eigenschaften wie X^+: d.h. es gibt ein Komplement $\tilde{Y}$ einer einelementigen Menge $\{\tilde{\infty}\} \subset Y$ und einen Homömorphismus $f : \tilde{Y} \xrightarrow{\sim} X$. Dann ist die Abbildung
$$\overline{f} : \quad Y \to X^+$$
mit
$$\overline{f}|_{\tilde{Y}} = f \quad \text{ und } \overline{f}(\tilde{\infty}) = \infty$$

offensichtlich bijektiv und in allen Punkten des Unterraums $\tilde{Y}$ stetig. Es ist noch die Stetigkeit in $\tilde{\infty}$ zu zeigen. Da f^{-1} nach Voraussetzung stetig auf X ist, sind die Urbilder $f^{-1}(K)$ kompakter Mengen in X nach Satz 1.12.4.2 kompakt. Eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(\infty)$ ist von der Form $U = X^+ \setminus K$, daher ist

$$f^{-1}(U) = \tilde{Y} \setminus f^{-1}(K) \ .$$

Nun ist $f^{-1}(K)$ kompakt, daher $f^{-1}(U)$ offen und $\tilde{\infty} \in f^{-1}(U)$. Also ist $\overline{f}$ stetig; nach Korollar 1.12.10.1 ist $\overline{f}$ ein Homöomorphismus. □

Bemerkungen 1.13.6.

1. Für $X = \mathbb{R}^n$ ist $X^+ \cong \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. $\mathbb{S}^n$ ist beschränkt und als Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\{1\}$ unter der stetigen Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ abgeschlossen, also kompakt. Setze $N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, also den Nordpol, und betrachte

$$\begin{array}{rccl} s: & \mathbb{S}^n \setminus \{N\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \end{array}$$

   Dies ist ein Homömorphismus von $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ und $\mathbb{R}^n$. Also ist $\mathbb{S}^n$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$.

2. Sei X lokal-kompakt und Hausdorffsch. Ist X nicht schon selbst kompakt, so ist X dicht in X^+. (Übung.)

3. Ein Problem der Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist es, dass stetige Abbildungen $f : X \to Y$ in einen kompakten Raum nicht stetig fortgesetzt werden können:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X^+ \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

   Als Gegenbeispiel betrachte

$$\begin{tikzcd} X = (0,1] \arrow[r, "\sin(1/x)"] \arrow[d] & Y = [-1,1] \\ X^+ = [0,1] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Es gibt auch allgemeinere Kompaktifizierungen.

Definition 1.13.7
Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Ein Paar (e, Y), bestehend aus einem kompakten topologischen Raum Y und einer Einbettung

$$X \xrightarrow{e} Z \subset Y$$

mit Bild Z dicht in Y heißt eine Kompaktifizierung von X.

Eine wichtige Klasse von Kompaktifizierungen gibt es für vollständig reguläre Räume:

Definition 1.13.8

Ein topologischer Raum X heißt vollständig regulär, falls für X das Trennungsaxiom (T1) gilt und es für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeden Punkt $p \notin A$ eine stetige Funktion

$$f : X \to [0,1]$$

gibt mit $f(p) = 0$ und $f|_A = 1$.

Die Existenz einer solchen Funktion impliziert das Trennungsaxiom (T3); daher wird die Forderung nach der Existenz einer solchen Funktion auch mit (T3a) bezeichnet.

Es gilt dann:

Theorem 1.13.9.
Zu jedem vollständig regulären Raum X existiert eine Kompaktifizierung $(\beta, \beta X)$ mit der Eigenschaft, dass es für jeden kompakten Hausdorff-Raum Y und jede stetigen Abbildung $f : X \to Y$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $f' : \beta X \to Y$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, dashed, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

gilt. Diese Kompaktifizierung heißt Stone-Čech-Kompaktifizierung.

Für einen Beweis verweisen wir auf eine Übungsaufgabe. In speziellen Situationen werden angemessene andere Kompaktifizierungen betrachtet.

1.14 Direkte und inverse limites topologischer Räume

Definition 1.14.1
Sei Ω eine partiell geordnete Menge, also eine Menge mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation.

1. *Ein direktes System topologischer Räume $\mathfrak{X}$ besteht*
   - *aus einem topologischen Raum X_i für jedes $i \in \Omega$.*
   - *einer stetigen Abbildung*

   $$f_{ji} : \quad X_i \to X_j \quad \text{für alle } i \leq j$$

   so dass

   - *$f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ für alle $i \in \Omega$ gilt.*
   - *$f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$ für alle $i \leq j \leq k$ gilt,*

$$\begin{tikzcd} & X_j \arrow[dd, "f_{kj}"] \\ X_i \arrow[ur, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_{ki}"'] & \\ & X_k \end{tikzcd}$$

2. *Ein inverses System topologischer Räume $\mathfrak{Y}$ besteht aus*
   - *aus einem topologischen Raum Y_i für jedes $i \in \Omega$.*
   - *einer stetigen Abbildung*
   $$g_{ij} : \quad Y_j \to Y_i \quad \text{für alle } i \leq j$$
   so dass
   - *$g_{ii} = \mathrm{id}_{Y_i}$ für alle $i \in \Omega$ gilt.*
   - *$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ für alle $i \leq j \leq k$ gilt.*

Beispiele 1.14.2.

1. Sei $\Omega = (\mathbb{N}, \leq)$, also die gewöhnliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen. X_i sei ein Unterraum von X_{i+1} und $f_{i+1,i} : X_i \to X_{i+1}$ sei die Inklusion. Setze $f_{ji} = f_{j,j-1} \circ \ldots \circ f_{i+1,i}$ und erhalte ein direktes System.
2. Setze $\Omega = \mathbb{N}$ mit der trivialen Ordnung, d.h. es gilt nur $x \leq x$. Dann ist $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ sowohl direktes als auch inverses System.
3. Sei I eine beliebige Menge, Ω die Menge der endlichen Teilmengen von I, partiell geordnet durch Inklusion. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Familie topologischer Räume.
   - Dann ist $X_S := \sqcup_{s \in S} X_s$ mit der für $S \subset T$ offensichtlichen Inklusion $X_S \to X_T$ der Summen ein direktes System.
   - Dann ist $Y_T := \prod_{t \in T} X_t$ mit der für $S \subset T$ offensichtlichen Projektion $Y_T \to Y_S$ der Produkte ein inverses System.
4. Sei wieder $\Omega = (\mathbb{N}, \leq)$ und (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist für $x \in X$ durch $X_n := B_{1/n}(x)$ mit der für $n \leq m$ gegebenen Inklusion $B_{1/m}(x) \subset B_{1/n}(x)$ ein inverses System.

Definition 1.14.3
Sei $\mathfrak{X}$ ein direktes System topologischer Räume. Betrachte auf der Summe $\sqcup_{i \in \Omega} X_i$ die Äquivalenzrelation, die von $(x_i, i) \sim (f_{ji}(x_i), j)$ für $i \leq j$ erzeugt wird. Der direkte Limes ist der topologische Raum
$$\lim_{\to} \mathfrak{X} = \sqcup_{i \in \Omega} X_i \ / \sim$$
mit der Quotiententopologie aus Definition 1.10.1.

Man beachte, dass sowohl die topologische Summe nach Definition 1.8.10 als auch der Quotientenraum nach Definition 1.10.1 mit einer Finaltopologie versehen sind.

Beispiele 1.14.4.

1. Für $\Omega = \mathbb{N}$ mit der gewöhnlichen Ordnung und eine aufsteigende Kette $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ wie in Beispiel 1.14.2.1 ist
   $$\lim_{\to} \mathfrak{X} = \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i/_{\sim} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \ ,$$
   der direkte Limes also die Vereinigung.

2. Für $\Omega = \mathbb{N}$ mit der trivialen Ordnung aus Beispiel 1.14.2.2 ist
$$\lim_{\rightarrow} \mathfrak{X} = \sqcup_{i\in\Omega} X_i \ ,$$
der direkte Limes also die disjunkte Vereinigung.

3. Auch das Beispiel 1.14.2.3 ergibt die disjunkte Vereinigung.

4. Betrachte die partiell geordnete Menge $\Omega = \{0,1,2\}$ mit $0 < 1, 0 < 2$, aber nicht $1 \not< 2$. Betrachte das zugehörige gerichtete System
$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\iota_{10}"] \arrow[d, "\iota_{20}"'] & X_1 \\ X_2 & \end{tikzcd}$$
wobei wir annehmen, dass X_0 ein Unterraum von X_1 und X_2 ist. Der direkte Limes oder auch pushout ist
$$\lim_{\rightarrow} \mathfrak{X} = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2/(x_0, 0) \sim (\iota_{10}(x_0), 1) \sim (\iota_{20}(x_0), 2) =: X_1 \cup_{X_0} X_2 \ .$$
Es werden also X_1 und X_2 entlang von X_0 aneinander geklebt.

5. Sei $X_n = \mathbb{R}^n$ mit den Einbettungen
$$\begin{array}{rcl} X_n & \to & X_{n+1} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \ . \end{array}$$
Dann ist $\lim_{\rightarrow} \mathbb{R}^n$ der Raum der reellen Folgen, für die fast alle Folgenglieder gleich 0 sind.

6. Betrachte $X_n := \mathbb{S}^n$ und die Einbettung, die $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Äquator von $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ auffasst,
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{S}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, 0) \ . \end{array}$$
Wir bezeichnen $\mathbb{S}^\infty := \lim_{\rightarrow} \mathbb{S}^n$.

Definition 1.14.5
Sei $\mathfrak{Y}$ ein inverses System topologischer Räume. Der inverse Limes ist der topologische Raum
$$\lim_{\leftarrow} \mathfrak{Y} = \{(y_i)_{i\in\Omega} \text{ mit } y_i = g_{ij}(y_j) \quad \text{für alle } i,j\} \ ,$$
mit der Unterraumtopologie, also der Unterraum der "kohärenten Folgen" im Produkt $\prod_{i\in\Omega} Y_i$.

Man beachte, dass sowohl das Produkt nach Definition 1.8.3 als auch der Unterraum nach Betrachtung 1.6.3 mit einer Initialtopologie versehen sind.

Beispiele 1.14.6.

1. Für das inverse System aus Beispiel 1.14.2.2 erhalten wir $\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X} = \prod X_i$. Wir erhalten das Produkt auch im zweiten Beispiel von 1.14.2.3.

2. Betrachte wieder $\Omega = \{0,1,2\}$ mit $0 < 1, 0 < 2$, aber nicht $1 \not< 2$. Betrachte das zugehörige inverse System

$$\begin{tikzcd} Y_0 & Y_2 \arrow[l, "g_{02}"'] \\ Y_1 \arrow[u, "g_{01}"] & \end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X} = \{(y_0, y_1, y_2)\,|g_{02}(y_2) = y_0 = g_{01}(y_1)\} \cong \{(y_1, y_2)\,|\,g_{02}(y_2) = g_{01}(y_1)\}$$

das Faserprodukt $Y_1 \times_{Y_0} Y_2$ oder der pullback von Y_1 und Y_2 über Y_0.

3. Sei X ein topologischer Raum und PX die Menge aller Wege, die an einem festen Punkt $x_0 \in X$ starten. Man kann PX zu einem topologischen Raum machen, so dass die Abbildung, die einem Weg $w : [0,1] \to X$ seinen Endpunkt zuordnet, $ev_1(w) := w(1)$ stetig ist. Betrachte den Pullback von

$$\begin{tikzcd} X & PX \arrow[l, "ev_1"'] \\ x_0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Dieser ist

$$\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X} = \{(w, x_0)\,|\,w(1) = x_0\} \ ,$$

also der Raum aller Wege in X, die in x_0 anfangen und aufhören, der sogenannte Schleifenraum von X.

4. Im Beispiel 1.14.2.4 mit $Y_n = B_{1/n}(x)$ ist

$$\lim_{\leftarrow} \mathfrak{Y} = \bigcap_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}} B_{1/n}(x) \ .$$

Allgemeiner gilt für eine fallende Kette $\mathfrak{Y} = (Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots)$

$$\lim_{\leftarrow} \mathfrak{Y} = \bigcap_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}} Y_n \ .$$

5. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte Primzahl. Betrachte das inverse System

$$\mathfrak{Y} = \left(\mathbb{Z}/p \overset{\pi_1}{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^2 \overset{\pi_2}{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \ldots\right)$$

mit der üblichen Projektion

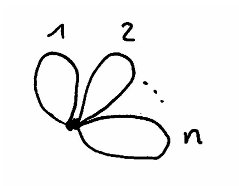
$$\mathbb{Z}/p^{n+1} \overset{\pi_n}{\to} \mathbb{Z}/p^n \ .$$

Dann ist

$$\hat{\mathbb{Z}}_p = \lim_{\leftarrow} \mathfrak{Y} = \{(x_1, x_2, \ldots,) \quad \text{mit } x_n \in \mathbb{Z}/p^n \,, \pi_n(x_{n+1}) = x_n\} \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n \ .$$

6. Betrachte das Bouquet

$$X_n := \vee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$$



mit einem gemeinsamen Grundpunkt. Wir haben Projektionen

$$X_{n+1} := \vee_{i=1}^{n+1} \mathbb{S}^1 = \vee_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \to X_n := \vee_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1 \ ,$$

die die n-te Schlaufe auf den gemeinsamen Grundpunkt abbildet. Der topologische Raum $\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}$ heißt Hawaiischer Ohrring.

Bemerkung 1.14.7.
Sei Ω eine partiell geordnete Menge und $\mathfrak{X} = (X_i)_{i\in\Omega}$ ein direktes System. Hat Ω ein größtes Element i_0, d.h. $i \leq i_0$ für alle $i \in \Omega$, so ist

$$\lim_{\rightarrow} \mathfrak{X} = X_{i_0} \ .$$

Denn in $\sqcup_{i\in\Omega} X_i / \sim$ ist $(x, i) \sim (f_{i_0,i}(x_i), i_0)$.

Betrachtung 1.14.8.

1. Die Abbildung

$$\tilde{\iota}_j : \quad X_j \xrightarrow{\iota_j} \sqcup_{i\in\Omega} X_i \xrightarrow{\pi} \sqcup_{i\in\Omega} X_i \ / \sim = \lim_{\rightarrow} \mathfrak{X}$$

ist stetig, denn ι_j ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Summe und π ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie. Die Abbildung $\tilde{\iota}_j := \pi \circ \iota_j$ heißt oft kanonische Injektion, auch wenn sie nicht unbedingt injektiv ist.

Zum Beispiel haben wir im Falle von pushouts das kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\iota_{10}"] \arrow[d, "\iota_{20}"'] & X_1 \arrow[d, "\tilde{\iota}_1"] \\ X_2 \arrow[r, "\tilde{\iota}_2"'] & X_1 \cup_{X_0} X_2 \end{tikzcd}$$

2. Dual dazu erhalten wir durch Einschränkung der kanonischen Projektion des Produkts stetige Abbildungen

$$\tilde{\pi}_j : \quad \lim_{\leftarrow} \mathfrak{X} \subset \prod_{i\in\Omega} X_i \xrightarrow{\pi_j} X_j \ ,$$

die oft auch stetige Projektionen genannt werden, obwohl sie nicht unbedingt surjektiv sind.

Zum Beispiel haben wir bei pullbacks

$$\begin{tikzcd} Y_0 & Y_2 \arrow[l, "g_{02}"'] \\ Y_1 \arrow[u, "g_{01}"] & X_1 \times_{X_0} X_2 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Wir können nun die universelle Eigenschaft von direktem und inversem Limes formulieren.

Satz 1.14.9 (Universelle Eigenschaft des direkten Limes)**.**
Sei $\mathfrak{X}$ ein direktes System topologischer Räume und Y ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie $(X_i \stackrel{\varphi_i}{\to} Y)_{i \in \Omega}$ stetiger Abbildungen mit $\varphi_j \circ f_{ji} = \varphi_i$ genau eine stetige Abbildung

$$\phi : \lim_{\rightarrow} \mathfrak{X} \to Y$$

mit $\phi \circ \tilde{\iota}_j = \varphi_j$.

Als Diagramm, mit $i \leq j$,

$$\begin{tikzcd}
& X_i \arrow[dl, "f_{ji}"'] \arrow[d, "\tilde{\iota}_i"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_i"] & \\
X_j \arrow[r, "\tilde{\iota}_j"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_j"'] & \lim\limits_{\rightarrow} \mathfrak{X} \arrow[dr, dashed, "\phi"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Vorsicht, hier ist die Terminologie verwirrend: ein limes in diesem Sinn wird in der Kategorientheorie ein colimes genannt.

Beweis.
In der Definition

$$\tilde{\iota}_j : \quad X_j \stackrel{\iota_j}{\to} \sqcup_{i \in \Omega} X_i \stackrel{\pi}{\to} \sqcup_{i \in \Omega} X_i \;/ \sim = \lim_{\rightarrow} \mathfrak{X}$$

treten zweimal Finaltopologien auf, so dass die universellen Eigenschaften der Summe $\sqcup$ aus Satz 1.8.12 und des Quotienten eine eindeutige stetige Abbildung ϕ liefern. □

Ganz analog beweist man die duale Aussage:

Satz 1.14.10 (Universelle Eigenschaft des inversen Limes)**.**
Sei $\mathfrak{Y}$ ein inverses System topologischer Räume und X ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie $(X \stackrel{\psi_i}{\to} Y_i)_{i \in \Omega}$ stetiger Abbildungen mit $f_{ij} \circ \psi_j = \psi_i$ genau eine stetige Abbildung

$$\psi : X \to \lim_{\leftarrow} \mathfrak{Y}$$

mit $\psi_j = \tilde{\pi}_j \circ \psi$.

Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\phi"'] \arrow[drr, bend left, "\psi_j"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & \\
& \lim\limits_{\leftarrow} \mathfrak{Y} \arrow[r, "\tilde{\pi}_j"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_i"'] & Y_j \arrow[dl, "f_{ij}"] \\
& Y_i &
\end{tikzcd}$$

Vorsicht, auch hier ist die Terminologie verwirrend: ein inverser Limes in diesem Sinn wird in der Kategorientheorie ein limes genannt.

Bemerkung 1.14.11.
Erfüllt ein topologischer Raum Z mit gegebenen stetigen Abbildungen $f_j : X_j \to Z$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes $\lim_{\rightarrow} X_j$ aus Satz 1.14.9, so ist Z homöomorph zu $\lim_{\rightarrow} X_j$ mit eindeutiger Homöomorphie. Gleiches gilt für den inversen Limes.

2 Elementare Homotopietheorie

2.1 Homotopien

Im folgenden seien X, Y, Z topologische Räume. Abbildungen $f, g, H, \ldots$ seien stetig, wenn nichts anderes vorausgesetzt wurde. Mit $I = [0,1]$ bezeichnen wir das Standard-Interval.

Definition 2.1.1

1. *Eine Homotopie ist eine (stetige) Abbildung*

$$H : X \times [0,1] \to Y \ .$$

2. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt homotop zu einer Abbildung $g : X \to Y$, wenn es eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ gibt mit $f(x) = H(x,0)$ und $g(x) = H(x,1)$ für alle $x \in X$. Wir schreiben dann $f \simeq g$ und betrachten die durch das Intervall I parametrisierte Familie von Abbildungen $H_t : X \to Y$ mit $H_t(x) = H(x,t)$.*

Lemma 2.1.2.

1. $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

2. Seien $f, g : X \to Y$ Abbildungen und $f \simeq g$. Seien ferner Abbildungen $k : Y \to Z$ und $h : W \to X$ gegeben. Dann gilt

$$k \circ f \simeq k \circ g \quad \text{und} \quad f \circ h \simeq g \circ h \, , .$$

Beweis.

1. $f \simeq f$, wegen der konstanten Homotopie $H(x,t) = f(x)$ für alle $t \in I$. Gilt $f \simeq g$ mit Homotopie $H(x,t)$, so ist $\tilde{H}(x,t) := H(x, 1-t)$ eine Homotopie von g nach f.

   Sei H Homotopie von f nach g und H' von g nach h. Dann ist

$$H''(x,t) := \begin{cases} H(x,2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H'(x,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

   eine Homotopie von f nach h.

2. Ist $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g, so ist

$$k \circ H : X \times I \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{k} Z$$

   eine Homotopie von $k \circ f$ nach $k \circ g$. Ebenso ist

$$H \circ (h \times \mathrm{id}) : W \times I \xrightarrow{h \times \mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

   eine Homotopie von$f \circ h$ nach $g \circ h$.

$\square$

Definition 2.1.3

1. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die Äquivalenzklasse*
$$[f] := \{g : X \to Y \,|\, g \simeq f\}$$
heißt die Homotopieklasse von f.

2. *Die Homotopiemenge von zwei topologischen Räumen X, Y ist die Menge von Homotopieklassen von Abbildungen*
$$[X, Y] := \{[f] \,|\, f : X \to Y\} \; .$$

3. *Gegeben*
$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} Z$$
haben wir wohldefinierte Abbildungen
$$\begin{array}{rccc} k_* : & [X, Y] & \to & [X, Z] \\ & [f] & \mapsto & [k \circ f] \end{array}$$
und
$$\begin{array}{rccc} h^* : & [X, Y] & \to & [W, Y] \\ & [f] & \mapsto & [f \circ h] \end{array}$$

Aus Lemma 2.1.2.2 ergibt sich sofort:

Lemma 2.1.4.
Diese Abbildungen haben die folgenden Eigenschaften:

- Gilt für $Y \stackrel{k_1,k_2}{\to} Z$ die Äquivalenz $k_1 \simeq k_2$, so gilt $(k_1)_* = (k_2)_*$.
- Gilt für $W \stackrel{h_1,h_2}{\to} X$ die Äquivalenz $h_1 \simeq h_2$, so gilt $(h_1)^* = (h_2)^*$.
- Gegeben $Y \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{k'} Z'$, so gilt $(k' \circ k)_* = k'_* \circ k_*$. Das Verhalten ist "kovariant".
- Gegeben $W' \xrightarrow{h'} W \xrightarrow{h} X$, so gilt $(h \circ h')^* = (h')^* \circ h^*$. Das Verhalten ist "kontravariant".

Definition 2.1.5

1. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Homotopieäquivalenz, falls es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit*
$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{und } f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \; .$$

2. *Gibt es solche Abbildungen, so heißen die topologischen Räume X, Y homotopieäquivalent, in Zeichen $X \simeq Y$.*

3. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt nullhomotop, falls f homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Wir schreiben dann $f \simeq *$.*

4. *Ein topologischer Raum X heißt zusammenziehbar, wenn id_X nullhomotop ist. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$. Wir schreiben dann $X \simeq *$.*

5. *Kann die Homotopie H in 4. sogar so gewählt werden, dass $H(x_0, t) = x_0$ für alle $t \in I$, so heißt der topologische Raum mit Grundpunkt (X, x_0) zusammenziehbar.*

Beispiele 2.1.6.

1. Jeder Homöomorphismus ist auch eine Homotopieäquivalenz.

2. Der $\mathbb{R}^n$ ist in Bezug auf jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar:
$$H(x,t) = (1-t)x + tx_0 \ .$$

3. Ein zusammenziehbarer Raum ist homotopieäquivalent zu einem Einpunktraum. Dazu betrachte die eindeutige Abbildung $f : X \to *$ und die Abbildung $g : * \to X$ mit $g(*) = x_0$. Dann ist $f \circ g = \mathrm{id}_*$ und $g \circ f : X \to X$ die konstante Abbildung mit Wert x_0. Weil X zusammenziehbar ist, gibt es eine Homotopie H von id_X zu $g \circ f$ Dies rechtfertigt die Notation $X \simeq *$ für einen zusammenziehbaren Raum.

Definition 2.1.7

1. *Eine Teilmenge $Y \subset X$ mit Einbettung $\iota : Y \to X$ heißt <u>Deformationsretrakt</u>, falls es eine Abbildung*
$$r : X \times [0,1] \to X$$
gibt mit $r(x,0) = x$ und $r(x,1) \in Y$ für alle $x \in X$ und $r(y,1) = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $r_1 \circ \iota = \mathrm{id}_Y$ und $r_0 = \mathrm{id}_X$ und $r_1(X) \subset Y$.

2. *Gilt zusätzlich $r(y,t) = y$ für alle $t \in I$ und alle $y \in Y$, so heißt $Y \subset X$ <u>starker Deformationsretrakt</u>.*

Beispiele 2.1.8.

1. Der Unterraum $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Deformationsretrakt, wie die Abbildung
$$r_t(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$
zeigt. Es liegt sogar ein starker Deformationsretrakt vor.

2. Indem man ein Möbiusband auf seine Mittellinie zusammenzieht, sieht man, dass es homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$ ist.

Satz 2.1.9.
Gilt $X \simeq X'$, so haben wir für jeden topologischen Raum Y, Z Bijektionen
$$[X,Y] \cong [X',Y] \quad \text{und} \quad [Z,X] = [Z,X'] \ .$$

Korollar 2.1.10.
Ist $X \simeq *$, so gilt $|[W,X]| = 1$ und, falls Y wegzusammenhängend ist, $|[X,Y]| = 1$.

Definition 2.1.11

1. *Sei $A \subset X$ und seien $X \stackrel{f,g}{\to} Y$ gegeben mit $f|_A = g|_A$.*
f heißt <u>homotop</u> zu g <u>relativ</u> zu A, falls es eine Homotopie H gibt mit
$$H(x,0) = f(x), \ H(x,1) = g(x) \text{ für alle } x \in X$$
und
$$H(a,t) = f(a) = g(a) \text{ für alle } a \in A \text{ und } t \in I \ .$$

2. *Für $A \subset X$ und $B \subset Y$ setzen wir*
$$[X,A;Y,B] = \{[f] \mid f(A) \subset B, [\cdot] \text{Homotopieklassen relativ zu } A \ \} \ .$$

2.2 Fundamentalgruppe

Wir benutzen nun diese Begriffe, um wegzusammenhängenden topologischen Räumen eine algebraische Invariante zuzuordnen.

Definition 2.2.1
Sei X wegzusammenhängend und ein Punkt $x_0 \in X$ gewählt, der sogenannte Grundpunkt. Dann heißt

$$\pi_1(X, x_0) := [\,[0,1]\,, \{0,1\}; X, x_0]$$

die Fundamentalgruppe von X.

Bemerkungen 2.2.2.

1. Ein Element $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ wird repräsentiert durch einen geschlossenen Weg $w : [0,1] \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$. Wir identifizieren Wege, für die es eine Homotopie gibt, die den Grundpunkt festlässt, also mit $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ für alle $t \in I$.

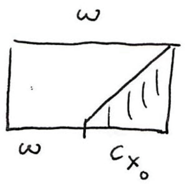
2. Es gilt
$$\pi_1(X, x_0) \cong \left[\mathbb{S}^1, (1,0); X, x_0\right] \ ,$$
wobei wir $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ auffassen und als Fußpunkt $(1,0) \in \mathbb{S}^1$ wählen.

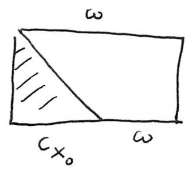
Satz 2.2.3.
Die Menge $\pi_1(X, x_0)$ trägt die natürliche Struktur einer Gruppe.

Beweis.

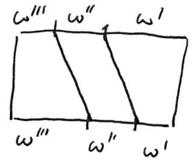
- Wähle Repräsentanten $[w'], [w''] \in \pi_1(X, x_0)$ und betrachte den Weg
$$w'' \star w'(t) := \begin{cases} w'(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w''(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$
und setze $[w''] \cdot [w] := [w'' \star w']$. Man schaltet also Wege hintereinander. (Man kann natürlich auch Wege hintereinanderschalten, die nicht geschlossen sind, sobald der Endpunkt des ersten Wegs der Anfangspunkt des zweiten Wegs ist. Auch hierfür werden wir die Notation $\star$ verwenden.) Dies ist wohldefiniert, denn aus $w_0' \simeq w_1'$ folgt $[w_0' \star w''] = [w_1' \star w'']$ und aus $w_0'' \simeq w_1''$ folgt $[w' \star w_0''] = [w' \star w_1'']$.

- Ein neutrales Element ist gegeben durch den konstanten Weg in x_0, also $c_{x_0}(t) = x_0$ für alle $t \in I$. Es ist
$$w \star c_{x_0} \simeq w \simeq c_{x_0} \star w \ .$$
Explizite Homotopien sind im folgenden Bild skizziert:





- Die Verknüpfung ist assoziativ auf Homotopieklassen; es gilt
$$(w' \star w'') \star w''' \simeq w' \star (w'' \star w'') \ .$$
Eine explizite Homotopie ist im folgenden Bild skizziert:



- Für einen Weg w ist $\overline{w}(t) := w(1-t)$ ein Repräsentant des Inversen, $[w]^{-1} = [\overline{w}]$. Eine explizite Homotopie ist im folgenden Bild skizziert:

□

Bemerkung 2.2.4.
Wir haben die Homotopien jeweils explizit skizziert. Alternativ kann man Reparametrisierungen benutzen. Sei also $\varphi : I \to I$ stetig und $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann gilt für jeden Weg $f : I \to X$, dass $f \circ \varphi \simeq f$, denn es gibt die Homotopie

$$H(s,t) := f((1-t)\varphi(s) + ts) ,$$

für die gilt $H(s,0) = f(\varphi(s))$ und $H(s,1) = f(s)$. Der Ausdruck ist wohldefiniert, denn $(1-t)\varphi(s) + ts$ liegt zwischen $\varphi(s)$ und s, also in I. Reparametrisierungen ändern also die Homotopieklasse nicht.

Die Homotopieäquivalenz $c_{x_0} \star w \simeq w$ aus dem Beweis von Satz 2.2.3 folgt nun zum Beispiel aus der Reparametrisierung

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{für } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } s \ge \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

denn $w \circ \varphi(s) = c_{x_0} \star w$.

Bemerkung 2.2.5.
Die Fundamentalgruppe ist im Allgemeinen nicht abelsch. Für Beispiele verweisen wir auf Korollar 2.4.18 und Beispiel 2.4.19.3.

Satz 2.2.6.
Für jede stetige Abbildung

$$f : \quad (X, x_0) \to (Y, y_0) ,$$

d.h. Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$ für gewählte Grundpunkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ ist

$$\begin{array}{rrcl} f_* : & \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(Y, y_0) \\ & [w] & \mapsto & [f \circ w] \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Sind f und g homotop, so ist $f_* = g_*$.

Beweis.

- Die Abbildung ist wohldefiniert wegen Lemma 2.1.2.2.
- Es gilt $f_*[c_{x_0}] = [f \circ c_{x_0}] = [c_{y_0}]$.
- Es gilt
$$f_*[w \star w'] = [f \circ (w \star w')] = [(f \circ w) \star (f \circ w')] \ .$$
- Ist $f \simeq g$, so folgt mit Lemma 2.1.2, dass $f \circ w \simeq g \circ w$ und damit $f_* = g_*$.

□

Korollar 2.2.7.
Sind die Räume homotopieäquivalent, $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$, so sind die Fundamentalgruppen isomorph, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$. Ist insbesondere (X, x_0) zusammenziehbar, $X \simeq \star$, so ist die Fundamentalgruppe trivial, $\pi_1(X, x_0) = 1$.

Bemerkungen 2.2.8.
1. Die Umkehrung gilt aber nicht: wir werden später in Korollar 2.4.6.2 sehen, dass $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = 1$ gilt, aber $\mathbb{S}^2$ nicht zusammenziehbar ist.
2. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich $x_0 \in X$, d.h. für jeden Punkt $p \in X$ ist die Verbindungsstrecke $\overline{px_0} = \{(1-t)p + tx_0 \,|\, 0 \le t \le 1\}$ in X enthalten, so ist die Fundamentalgruppe trivial, $\pi_1(X, x_0) = 1$. Dazu betrachte die Homotopie
$$H(p, t) = (1-t)p + tx_0$$
von $H_0 = \mathrm{id}$ auf die konstante Abbildung, deren Bild in X liegt. Ein sterförmiger Raum ist zusammenziehbar.
3. Für einen Deformationsretrakt (vgl. Definition 2.1.7) $\iota : A \to X$ induziert ι für jeden Punkt $a \in A$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$.

Definition 2.2.9
Ein Raum heißt einfach zusammenhängend, falls er wegzusammenhängend ist und sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen lässt, also nullhomotop ist.

Ein wegzusammenhängender Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Sternförmige Räume sind einfach zusammenhängend.

Satz 2.2.10 (Fundamentalgruppe von Produkten)**.**
Es gilt
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ .$$

Beweis.
Ein Weg $w : I \to X \times Y$ wird beschrieben durch $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$. Nun ist $w \simeq w'$ genau dann, wenn $w_1' \simeq w_1$ und $w_2' \simeq w_2$ gilt. Daher ist
$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \to & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ {}[w] & \mapsto & ([w_1], [w_2]) \end{array}$$
eine Bijektion. Da die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ stetig sind, ist $((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*)$ ein Gruppenhomomorphismus. □

Beispiel 2.2.11.
Wir werden im nächsten Unterkapitel sehen, dass $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ gilt. Daher gilt für Tori

$$\pi_1(T^n, *) \cong \pi_1(\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n-\text{mal}}) \cong \mathbb{Z}^n \ .$$

Betrachtung 2.2.12.
Wir diskutieren noch die Abhängigkeit der Fundamentalgruppe von der Wahl des Grundpunkts. Sei X wegzusammenhängend, $x_1, x_2 \in X$. Wähle einen Weg α von x_1 nach x_2. Betrachte dann

$$\begin{array}{rrcl} \alpha^\# : & \pi_1(X, x_1) & \to & \pi_1(X, x_2) \\ & [w] & \mapsto & [\alpha \star w \star \overline{\alpha}] \end{array}$$

- Sind zwei Wege α_1, α_2 homotop relativ zu (x_1, x_2), so induzieren sie die gleichen Abbildungen, $\alpha_1^\# = \alpha_2^\#$.
- Gegeben drei Punkte x_1, x_2, x_3 und Wege α von x_1 nach x_2 und β von x_2 nach x_3, so gilt

  $$\beta^\# \circ \alpha^\# = (\beta \circ \alpha)^\# \ .$$

  Insbesondere ist $\alpha^\#$ ein Isomorphismus mit Inversem $(\overline{\alpha})^\#$.
- Im Spezialfall $x_1 = x_2$ ist α ein geschlossener Weg, der aber nicht unbedingt nullhomotop ist. Dann folgt

  $$\alpha^\#([w]) = [\alpha]^{-1} \cdot [w] \cdot [\alpha] \ .$$

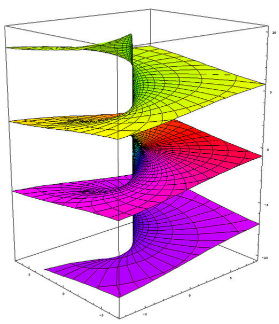
  Die Konjugation mit der Klasse von α ist ein innerer Automorphismus der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.

2.3 Fundamentalgruppe des Kreises

Wir untersuchen die Fundamentalgruppe des Kreises $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ mit Hilfe der komplexen Exponentialabbildung:

$$\begin{array}{rrcl} E : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & x & \mapsto & \exp(2\pi \mathrm{i} x) \ , \end{array}$$

wobei wir $1 \in \mathbb{C}$ als Grundpunkt für $\mathbb{S}^1$ wählen.



Betrachtung 2.3.1.
- Auf den offenen Mengen

  $$U^+ := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \quad \text{und} \quad U^- := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$$

  finde lokale Inverse

  $$\ln_n^+ : U^+ \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \ln_n^- : U^- \to \mathbb{R}$$

mit

$$E(\ln_n^\pm(z)) = z \ , \ \ln_n^+(1) = n \quad \text{sowie } \ln_n^-(-1) = n + \frac{1}{2} \ .$$

Der Bildbereich von $\ln_n^+$ ist also das offene Intervall $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$, der Bildbereich von $\ln_n^-$ ist $(n, n+1)$. Zusammen überdecken die offenen Intervalle $\mathbb{R}$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ liegt in höchstem einem Bildbereich einer Funktion $\ln_n^+$ und in höchstens einem Bildbereich einer Funktion $\ln_n^-$.

- Unser Ziel ist es, zu einem gegebenem geschlossenen stetigen Weg

$$w : \quad [0,1] \to \mathbb{S}^1$$

mit $w(0) = w(1) = 1$ eine stetige Hochhebung

$$\tilde{w} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

zu finden, d.h. eine stetige Funktion $\tilde{w}$ mit

$$E \circ \tilde{w} = w \quad \text{und} \quad \tilde{w}(0) = 0 \ .$$

Dann ist wegen $E(\tilde{w}(1)) = w(1) = 1$ für jede Hochhebung $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$.

- Wir erinnern an das Lebesguesche Lemma: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann gibt es eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$, die Lebesguesche Zahl der Überdeckung, so dass jede zu A nicht disjunkte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, die einen Durchmesser $\leq \lambda$ hat, ganz in *einer* der offenen Teilmengen U_j enthalten ist.

- Dann ist $w^{-1}(U^\pm) =: V_\pm$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$, wobei die Mengen $V_\pm$ im Allgemeinen nicht zusammenhängend sind. Man kann eine Lebesguesche Zahl $\frac{1}{N}$ wählen, so dass jedes der Intervalle $T_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$ entweder ganz in V_+ oder in V_- enthalten ist und $w_k := w|_{T_k}$ ein Weg in U_+ oder U_- ist.

  Wir liften nun induktiv: wegen $w(0) = 1$ ist $w(T_1) \subset U_+$. Wir setzen $\tilde{w}(s) = \ln_0^+(w(s))$ für alle $s \in T_1$. Angenommen, wir haben eine Hochhebung $\tilde{w} : [0, \frac{k}{N}] \to \mathbb{R}$ gefunden. Es liege $w(T_{k+1}) \subset U_\epsilon$. Dann liegt der Punkt $\tilde{w}(\frac{k}{N})$ im Bildbereich genau einer Funktion $\ln_n^\epsilon$. Diesen Zweig des Logarithmus benutzen wir zur weiteren Fortsetzung.

- Die so konstruierte Hochhebung ist eindeutig. Denn die Differenz $\tilde{w} - \tilde{w}'$ zweier Hochhebungen ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an, muss also konstant sein. Aus der Anfangsbedingung $\tilde{w}(0) = 1 = \tilde{w}'(0)$ folgt die Gleichheit $\tilde{w} = \tilde{w}'$.

Definition 2.3.2
Für einen geschlossenen Weg $w : I \to \mathbb{S}^1$ heißt die ganze Zahl $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$ der Grad des Weges w.

Satz 2.3.3.
Der Grad eines geschlossenen Wegs hängt nur von seiner Homotopieklasse ab. Wir bekommen einen Isomorphismus

$$\text{grad} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z} \ .$$

Beweis.

- Seien $w', w'' : I \to \mathbb{S}^1$ geschlossene Wege mit Hochhebungen $\tilde{w}', \tilde{w}'' : I \to \mathbb{R}$. Dann ist

  $$(\tilde{w}'' + \tilde{w}'(1)) \star \tilde{w}'$$

  eine Hochhebung des Weges $w'' \star w'$. Somit ist $\mathrm{grad}(w'' \star w') = \mathrm{grad} w'' + \mathrm{grad} w'$.

- Der Weg $w_n(s) = \exp(2\pi i n s)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ hat die offensichtlicher Hochhebung $\tilde{w}_n(s) = ns$ und daher $\mathrm{grad} w_n = \tilde{w}(1) = n$. Die Abbildung grad ist also surjektiv.

- Die Abbildung grad ist wohldefiniert auf Homotopieklassen, d.h. homotope Wege w_1, w_2 haben gleichen Grad.

  Sei dazu $w : [0,1]^2 \to \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von w_0 nach w_1. Wieder wählen wir eine Lebesguesche Zahl $\frac{1}{N}$ für die Zusammenhangskomponenten $w^{-1}(U^\pm) = W^\pm \subset [0,1]^2$ und zerlege $[0,1]^2$ in Quadrate $T_{p,q} := [\frac{p-1}{N}, \frac{p}{N}] \times [\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}]$, auf denen mindestens ein Zweig des Logarithmus wohldefiniert sind.

  Auf $T_{1,1}$ setze wegen $w(0,0) = 1$

  $$\tilde{w}|_{T_{1,1}} := \ln_0^+ \circ w|_{T_{1,1}} \ .$$

  Auf $T_{2,1} = [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}] \times [0, \frac{1}{N}]$ und auf $T_{1,2} = [0, \frac{1}{N}] \times [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$ setze fort wie in Betrachtung 2.3.1.

  Wir können nun auf $T_{2,2}$ entweder vom Quadrat $T_{1,2}$ oder von $T_{2,1}$ aus fortsetzen und erhalten zwei Hochhebungen. Diese stimmen aber im Eckpunkt $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$ überein und müssen daher den selben Zweig des Logarithmus benutzen. Diese Prozedur setzt man nun fort.

  Diese Hochhebung ist eindeutig, denn die Differenz $\tilde{w} - \tilde{w}'$ zweier Hochhebungen ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an, muss also konstant sein. Aus $\tilde{w}(0,0) = 1 = \tilde{w}'(0,0)$ folgt die Gleichheit.

  Weil $\tilde{w}(0,t)$ stetig ist und weil wegen $1 = x_0 = w(0,t) = E(\tilde{w}(0,t))$ Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen muss, gilt $\tilde{w}(0,t) = 0$ für alle $t \in I$. Ebenso ist die Funktion $\tilde{w}(1,t)$ stetig und muss Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Beide Funktionen sind also konstant und somit ist

  $$\tilde{w}_0(1) = \tilde{w}(1,0) = \tilde{w}(1,1) = \tilde{w}_1(1) \ .$$

- Die Gradabbildung ist injektiv. Sei dazu $w : I \to \mathbb{S}^1$ ein Weg mit $\mathrm{grad} w = 0$, der also eine Hochhebung $\tilde{w} : I \to \mathbb{R}$ hat mit $\tilde{w}(1) = 0$. Dann ist

  $$H(s,t) = (1-t)\tilde{w}(s) + t\tilde{w}(1)$$

  eine Homotopie von $\tilde{w}$ zum konstanten Weg $c_{\tilde{w}(1)} = c_0$ und $H(0,t) = 0 = H(1,t)$ für alle $t \in I$. Dann ist $E \circ H$ eine Homotopie von w zum konstanten Weg c_1.

$\square$

Wir betrachten nun Anwendungen der Isomorphie $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, wobei wir zunächst an Beispiel 2.2.10 erinnern.

Korollar 2.3.4.
Der Raum $\mathbb{S}^1$ ist nicht zusammenziehbar, denn nach Bemerkung 2.2.7 gilt für einen zusammenziehbaren Raum $\pi_1(X, x) \cong 1$.

Satz 2.3.5 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.**
Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis.
Angenommen, es gilt $f(z) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{D}^2$. Dann definiere eine Abbildung

$$r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1 ,$$

indem $z \in \mathbb{D}^2$ der Schnittpunkt der Halbgeraden von $f(z)$ nach z mit $\mathbb{S}^1$ zugeordnet wird. Die Abbildung ist stetig und es gilt $r(z) = z$ für $z \in \mathbb{S}^1$. Dann ist $H(t, z) := r(tz)$ für $t \in I$ und $z \in \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H(0, z) = r(0)$ auf $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, im Widerspruch zur Tatsache, dass $\mathbb{S}^1$ nicht zusammenziehbar ist. □

Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt übrigens für Kreisscheiben $\mathbb{D}^n$ beliebiger Dimension n. Im Falle $n = 1$ ist er der klassische Zwischenwertsatz 1.9.4. Denn betrachte für eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ die ebenfalls stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$. Dann ist $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$ und $g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$. Der Wert 0 wird von der Funktion g genau dann angenommen, wenn die Funktion f einen Fixpunkt besitzt.

Definition 2.3.6
Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine beliebige stetige Abbildung. Betrachte

$$\begin{array}{rccl} w : & I & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & f(\exp(2\pi \mathrm{i} t)) \ . \end{array}$$

Sei $\tilde{w} : I \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von w, d.h.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "E"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{w}"] \arrow[r, "w"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Dann ist der Grad von f definiert als

$$\mathrm{grad}(f) := \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \ .$$

Bemerkungen 2.3.7.

1. Der Grad ist wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der Wahl der Hochhebung $\tilde{w}$ ab, denn wie im Beweis von Satz 2.3.2 legt die Wahl des Anfangspunkts $\tilde{w}(0)$ die Hochhebung eindeutig fest.
2. Es ist $w(0) = f(1)$ und $w(1) = f(e^{2\pi \mathrm{i}}) = f(1)$. Daher ist $\mathrm{grad}(f) \in \mathbb{Z}$.
3. Homotope Abbildungen f, g haben den gleichen Grad.

Wir brauchen später die Aussage des folgenden Satzes:

Satz 2.3.8.
Eine Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ heißt antiperiodisch, wenn $f(-z) = -f(z)$ gilt. Eine antiperiodische Abbildung hat ungeraden Grad.

Beweis.
Sei $w(t) := f(\exp(2\pi \mathrm{i} t))$ und $\tilde{w} : I \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von w. Dann gilt für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E \circ \tilde{w}(t + \tfrac{1}{2}) &= w(t + \tfrac{1}{2}) = f(\exp(2\pi \mathrm{i}(t + \tfrac{1}{2})) = f(-\exp(2\pi \mathrm{i} t)) \\ &= -f(\exp(2\pi \mathrm{i} t)) = -E \circ \tilde{w}(t) \end{aligned}$$

und damit

$$N(t) := \tilde{w}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{w}(t) - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \ .$$

Die Funktion ist stetig, also konstant, $N(t) = N$ für alle $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\mathrm{grad}(f) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(\frac{1}{2}) + \tilde{w}(\frac{1}{2}) - \tilde{w}(0) = \frac{1}{2} + N + \frac{1}{2} + N \in 2\mathbb{Z} + 1 \ .$$

□

Wir diskutieren nun weitere Anwendungen des Abbildungsgrades:

Satz 2.3.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes Polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

mit Grad $n > 0$ und $a_i \in \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.
Wir setzen

$$s := |a_0| + \ldots + |a_{n-1}| + 1 \geq 1 \ .$$

Wir schätzen für $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ab:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &= |a_0 + a_1 sz + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1| s + \ldots |a_{n-1}| s^{n-1} \quad \text{[Dreiecksungleichung]} \\ &\leq s^{n-1}(|a_0| + |a_1| + \ldots |a_{n-1}|) \quad [\text{da} |s| \geq 1] \\ &< s^n = |s^n z^n| \ , \end{aligned}$$

da der Ausdruck in der letzten Klammer gleich $s - 1$ ist. Damit liegt $f(sz)$ im Innern eines Kreises vom Radius $|s^n z^n|$ um $s^n z^n$.

Die Strecke von $f(sz)$ nach $s^n z^n$ trifft daher den Nullpunkt nicht. Damit ist

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{S}^1 \times I &\to \mathbb{C}^* \\ (z, t) &\mapsto (1 - t) f(sz) + t(s^n z^n) \end{aligned}$$

eine Homotopie von $z \mapsto f(sz)$ nach $z \mapsto s^n z^n$.

Wir nehmen nun an, dass f keine Nullstellen hat. Dann ist $z \mapsto f(sz)$ innerhalb von $\mathbb{C}^*$ mittels

$$H(t, z) = f((1 - t) sz)$$

nullhomotop und daher muss $z \mapsto s^n z^n$ ebenfalls nullhomotop sein. Da $s^n z^n \neq 0$ auf $\mathbb{S}^1$, ist auch

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \tfrac{s^n z^n}{|s^n z^n|} \end{aligned}$$

nullhomotop, im Widerspruch zu $\mathrm{grad} g = n$, vgl. Surjektivität im Beweis von Satz 2.3.2. □

Satz 2.3.10 (Satz von Borsuk-Ulam)**.**
Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

Insbesondere kann man $\mathbb{S}^2$ nicht stetig in $\mathbb{R}^2$ einbetten. Nimmt man an, dass Luftdruck und Temperatur stetige Funktionen auf der Erdoberfläche sind, so gibt es also zwei antipodale Punkte auf der Erde, die gleichen Luftdruck und gleiche Temperatur haben.

Beweis.
Angenommen, $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$. Dann ist die Funktion

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{f}: & \mathbb{S}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|} \end{array}$$

wohldefiniert. Ihre Einschränkung auf $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ ist antiperiodisch und hat nach Satz 2.3.8 ungeraden Grad.

Andererseits definiere eine Funktion $\tilde{g}$ auf der oberen Hemisphäre $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{S}^2$

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{g}: & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & \tilde{f}(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \end{array}$$

Die Funktion stimmt auf dem Rand von $\mathbb{D}^2$ mit der Einschränkung von $\tilde{f}$ überein. Aber diese Funktion ist nullhomotop, wie die Homotopie

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{S}^1 \times I & \to & \mathbb{S}^1 \\ (z, t) & \mapsto & \tilde{g}(tz) \end{array}$$

zeigt, für die H_0 konstant ist und $H_1 = \tilde{g}|_{\mathbb{S}^1}$. Dies ist ein Widerspruch. □

Für $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathbb{R}$ betrachte die Ebenen und die beiden Halbräume:

$$\begin{array}{rcl} E(a,d) & := & \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d\} \\ E^+(a,d) & := & \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq d\} \\ E^-(a,d) & := & \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq d\} \end{array}$$

Es seien nun drei Teilmengen $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^3$ gewählt, so dass gilt:

- Für $j = 1, 2, 3$ sind die Funktionen

  $$\begin{array}{rrcl} f_j^\pm: & \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,d) & \mapsto & \mathrm{vol}(A_j \cap E^\pm(x,d)) \ , \end{array}$$

  mit vol dem orientiertem Volumen, stetig.

- Für $j = 1$ gilt: für jeden Normalenvektor $x \in \mathbb{S}^2$ gibt es genau ein $d = d(x) \in \mathbb{R}$ mit $f_1^+(x, d(x)) = f_1^-(x, d(x))$ und die Funktion $x \mapsto d(x)$ ist stetig. (In jeder Schar paralleler Ebenen, nämlich mit gleichem Normalenvektor, gibt es genau eine, die A_1 in gleiche Teile teilt.)

Man beachte, dass stets gilt

$$d(-x) = -d(x) \ , \qquad (*)$$

denn es gilt für die Ebenen $E(x,d) = E(-x,-d)$.

Satz 2.3.11 (Satz vom Schinkenbrötchen).
Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die jede der drei Mengen A_1, A_2 und A_3 gleichzeitig in je zwei Teilmengen gleichen Volumens zerlegt.

(Zum Beispiele sei A_1 das Volumen eines Brötchens, A_2 das Volumen der Butter auf dem Brötchen und A_2 das Volumen des Schinkens. Man kann mit einem geraden Messerschnitt Brötchen, Butter und Schinken in je zwei gleiche Teile zerschneiden.)

Beweis.
Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{S}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f_2^+(x, d(x)), f_3^+(x, d(x))) \end{array}$$

ist stetig. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam 2.3.10 gibt es $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(-x) = f(x)$. Für dieses x und $d = d(x)$ ist

$$\begin{array}{rcl} f_2^+(x, d(x)) & = & f_2^+(-x, d(-x)) \overset{(*)}{=} f_2^+(-x, -d(x)) = f_2^-(x, d(x)) \\ f_3^+(x, d(x)) & = & f_3^+(-x, d(-x)) \overset{(*)}{=} f_3^+(-x, -d(x)) = f_3^-(x, d(x)) \end{array}$$

Weil nach Definition der Funktion $d(x)$ gilt $f_1^+(x, d(x)) = f_1^-(x, d(x))$, haben wir alles gezeigt. □

Definition 2.3.12
Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ stetig und $z \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$. Der Grad der Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f_z: & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|} \end{array}$$

heißt Umlaufzahl des geschlossenen Wegs f bezüglich des Punktes z und wird mit $U(f, z) \in \mathbb{Z}$ bezeichnet.

Satz 2.3.13.
Liegen z' und z'' in der gleichen Wegkomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$, so gilt $U(f, z) = U(f, z')$.

Beweis.
Ist $w : I \to \mathbb{R}^2$ ein Weg von z' nach z'', der das Bild $f(\mathbb{S}^1)$ nicht trifft. Dann ist

$$H(x, t) = \frac{f(x) - w(t)}{\|f(x) - w(t)\|}$$

eine Homotopie von $f_{z'}$ nach $f_{z''}$. Die Aussage folgt nun aus Bemerkung 2.3.7.3, dass homotope Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gleichen Grad haben. □

Satz 2.3.14.
Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ enthält das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ genau eine unbeschränkte Komponente V. Ist $z \in V$, so ist die Umlaufzahl $U(f, z) = 0$.

Beweis.

Klar ist, dass $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ mindestens eine unbeschränkte Wegkomponente V hat. Weil die Teilmenge $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, ist sie abgeschlossen und beschränkt. Sei also $D > 0$ so gewählt, dass $f(\mathbb{S}^1) \subset \overline{B}_D(0)$. Dann trifft $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$ die Wegkomponente V. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$ wegzusammenhängend ist, gilt $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)} \subset V$. Jede andere unbeschränkte Wegkomponente enthält auch $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$, muss daher gleich V sein. Für $z' \in V$ und $z'' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$ sind nach Satz 2.3.13 die Umlaufzahlen gleich, $U(f, z') = U(f, z'')$. Nun ist

$$(x, t) \mapsto \frac{tf(x) - z''}{\|tf(x) - z''\|}$$

eine Homotopie von einer konstanten Abbildung nach $f_{z''}$, also folgt die Behauptung. □

Die nächste Anwendung kommt aus dem Gebiet der Differentialtopologie.

Betrachtung 2.3.15.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist das Tangentialbündel

$$TM := \{(x, v), | \, x \in M, v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \; .$$

Zum Beispiel ist für $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $x \in M$

$$T_x\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \, | \, \langle x, y\rangle = 0\} \; .$$

Das Tangentialbündel kommt mit einer natürlichen Projektion $\pi : TM \to M$ mit $\pi(x, v) = x$.

Definition 2.3.16
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist ein tangentiales Vektorfeld auf M eine Abbildung $V : M \to TM$, so dass $\pi \circ V = \mathrm{id}_M$ gilt.

Satz 2.3.17 (Satz vom Igel)**.**
Jedes tangentiale Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ hat mindestens eine Nullstelle.

Bemerkungen 2.3.18.

1. Der Satz wird oft in der Aussage zusammengefasst, dass man einen Igel nicht glatt kämmen kann.

2. Der Satz gilt für alle Sphären $\mathbb{S}^{2n}$ gerader Dimension mit $n > 0$.

3. Der Satz ist falsch für Sphären ungerader Dimension. Beim Beispiel $\mathbb{S}^1$ betrachte das Vektorfeld, das durch die Ableitung der Parametrisierung $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ gegeben ist. Allgemeiner betrachte für $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ mit $n \geq 0$ das Vektorfeld

   $$V(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2n+2}, -x_{2n+1}) \; ,$$

   das tangential ist und nicht verschwindet.

Beweis.

- Wir parametrisieren die obere Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+ \subset \mathbb{S}^2$ durch eine Kreisscheibe

$$\begin{array}{rccc} q^+ : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{S}^2 \\ z := (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) =: y \end{array}$$

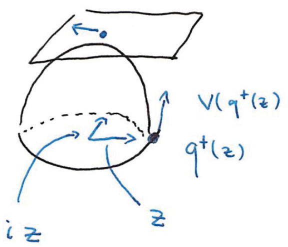
Sei $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $y := q^+(z) \in \mathbb{S}^2_+$. Wir bezeichnen mit $R^+_y \in \mathrm{SO}(3)$ die Rotation um die Achse iz, die $y = q^+(z)$ in den Nordpol $N = (0,0,1)$ abbildet. (Ist $z = 0$, so ist $y = q^+(0) = N$, und wir setzen $R_y = \mathrm{id}$.) Um das Tangentialbündel auf der oberen Hemisphäre zu beschreiben, betrachten wir für $y \in \mathbb{S}^2_+$ die Abbildung

$$\varphi^+_y : T_y\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{R^+_y} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2$$

mit $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ und setzen für ein Vektorfeld V auf $\mathbb{S}^2_+$:

$$\begin{array}{rccl} W^+ : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & \varphi^+_y(V(q^+(z)) \ . \end{array}$$

Ist V ein tangentiales Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2_+$, das nirgendwo verschwindet, so ist $W^+(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}^2$.



- Analog definieren wir q^-, φ^- und W^- für ein Vektorfeld auf der unteren Halbebene. Für $z \in \mathbb{S}^1$ ist $q^+(z) = q^-(z) = (z, 0) =: y$, und R^-_y dreht um die gleiche Achse wie R^+_y, aber dreht den Äquatorpunkt y in den Südpol $(0,0,1)$.

- Wähle nun für den Tangentialraum $T_z \subset \mathbb{R}^3$ mit $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$ im Äquator die Basis $(b_1 = e_3, b_2 = \mathrm{i}z)$ und berechne

$$\varphi^+_{q^+(z)}(b_1) = -z \quad \text{und} \quad \varphi^+_{q^+(z)}(b_2) = \mathrm{i}z$$

und analog

$$\varphi^-_{q^-(z)}(b_1) = z \quad \text{und} \quad \varphi^-_{q^-(z)}(b_2) = \mathrm{i}z$$

- Betrachte nun die beiden Funktionen

$$\begin{array}{rccl} \tilde{W}^\pm : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & z & \mapsto & \frac{W^\pm(z)}{\|W^\pm(z)\|} \end{array}$$

Wir haben schon im Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam 2.3.10 gesehen, dass Abbildungen von $\mathbb{S}^1$, die auf die gesamte Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ fortsetzbar sind, nullhomotop sind. Daher sind beide Abbildungen $\tilde{W}^\pm|_{\mathbb{S}^1}$ nullhomotop.

- Andererseits bekommen wir für $z \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_-$ die Abbildung:

$$A_z := \varphi^-_{q^-(z)} \circ \left(\varphi^+_{q^+(z)}\right)^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ .$$

Wir bestimmen diese lineare Abbildung durch ihre Werte auf der Basis $(z, \mathrm{i}z)$:

$$\begin{array}{rcl} z & \mapsto & -z = -z^2(\overline{z}) \\ \mathrm{i}z & \mapsto & \mathrm{i}z = -z^2(\overline{\mathrm{i}z}) \ . \end{array}$$

Daher ist $A_z(\xi) = -z^2\overline{\xi}$ und

$$W^-(z) = -z^2\overline{W^+(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}^1 .$$

Mit Hilfe des Produkts in $\mathbb{S}^1$ finden wir

$$\operatorname{grad}\left(\tilde{W}^+|_{\mathbb{S}^1} \cdot \tilde{W}^-|_{\mathbb{S}^1}\right) = \operatorname{grad}(-z^2) = 2 .$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage im vorangehenden Punkt, dass $\tilde{W}^\pm$ beide Grad Null haben.

□

Wir machen abschließend eine Bemerkung zum Zusammenhang zwischen Homotopiemengen und Fundamentalgruppen. Wir erinnern daran, dass die Elemente von $\pi_1(X, x_0)$ Klassen von Wegen mit Grundpunkt x_0 sind, modulo Homotopien, die den Grundpunkt festlassen, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$. In der Homotopiemenge $[\mathbb{S}^1, X]$ dagegen wird kein Grundpunkt festgelegt. Es werden beliebige geschlossene Wege betrachtet, und die Homotopien müssen die Endpunkte nicht festlassen.

Satz 2.3.19.
Sei X topologischer Raum, $x_0 \in X$ und

$$V : \pi_1(X, x_0) \to [\mathbb{S}^1, X]$$

die Abbildung, die den Grundpunkt vergisst. Dann gilt:

1. Ist X wegzusammenhängend, so ist V surjektiv.

2. Es gilt $V[f] = V[g]$ genau dann, wenn $[f]$ und $[g]$ konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$ sind, es also ein $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ gibt mit $\gamma[g]\gamma^{-1} = [f]$.

Korollar 2.3.20.

1. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ abelsch und X wegzusammenhängend, so ist V ein Isomorphismus.

2. Es ist $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$.
   Denn für $X = \mathbb{S}^1$ ist nach Satz 2.3.3 die Fundamentalgruppe abelsch, also V nach der ersten Aussage ein Isomorphismus.

3. Für $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gilt $\operatorname{grad}(f) = \operatorname{grad}(g)$ genau dann, wenn $[f] = [g]$ gilt.
   Nach Satz 2.3.3 haben wir die Isomorphismen $\operatorname{grad} : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ und nach 2. den Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$.

Beweis.

- Surjektivität: sei $f : \mathbb{S}^1 \to X$ gegeben. Da X wegzusammenhängend ist, können wir einen Weg w in X mit $w(0) = f(1)$ und $w(1) = x_0$ finden. Auf dem Smashprodukt

  $$\mathbb{S}^1 \vee I = \mathbb{S}^1 \sqcup I/_{1 \sim 0}$$

  haben wir eine Abbildung

  $$\overline{H} : \quad \mathbb{S}^1 \vee I \to X$$

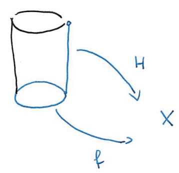
mit

$$\overline{H}(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{S}^1 \qquad \text{und} \qquad \overline{H}(t) = w(t) \text{ für } t \in I \ ,$$

die wegen $f(1) = w(0)$ wohldefiniert ist. Man kann sie zu einer Abbildung auf dem Zylinder

$$\tilde{H} : \mathbb{S}^1 \times I \to X$$

fortsetzen, wobei $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times I$ und $I \hookrightarrow \{1\} \times I \subset \mathbb{S}^1 \times I$.



Damit ist $f = \tilde{H}_0$ homotop zu $\tilde{H}_1$ Wegen $\tilde{H}(1,1) = x_0$ definiert $\tilde{H}_1$ ein Element in $\pi_1(X, x_0)$ mit $V(\tilde{H}_1) = [f]$.

- Seien $[f]$, $[g]$ konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$, d.h. $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sei ein geschlossener Weg mit Grundpunkt x_0, so dass $\alpha \star g \star \overline{\alpha}$ homotop zu f ist. Betrachte nun für $s \in I$ den offenen Weg

  $$\alpha_s := \alpha((1-s)t + s))$$

  Es ist $\alpha_0 = \alpha$ und $\alpha_1 = c_{x_0}$ konstant. Betrachte

  $$H_s := \alpha_s \star g \star \overline{\alpha}_s \ .$$

  Der Weg H_s ist nicht geschlossen, aber H ist eine Homotopie von f nach g. Also gilt $V[f] = V[g]$.

- Seien umgekehrt geschlossene Wege $f, g : (\mathbb{S}^1, 1) \to (X, x_0)$ mit $V[f]) = V([g])$ gegeben. Es gibt dann eine Homotopie

  $$H : \quad \mathbb{S}^1 \times I \to X$$

  mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$, die aber nicht punktiert ist. Setze $\alpha(t) := H(1,t)$; dies ist wegen $H(1,1) = g(1) = x_0$ und $H(1,0) = f(1) = x_0$ ein geschlossener Weg in X und definiert somit eine Klasse $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Dann ist g homotop zu $\alpha \star f \star \overline{\alpha}$ und somit sind f, g in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert.

□

2.4 Satz von Seifert-van Kampen

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1 und X_2 offen in X, wobei X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend seien. Wähle einen Grundpunkt $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ mit Hilfe der Fundamentalgruppen $\pi_1(X_1, x_0)$, $\pi_1(X_2, x_0)$ und $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ zu beschreiben. Nach Satz 2.2.6 bekommen wir aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & X_1 \arrow[d, "\tilde{\iota}_1"] \\ X_2 \arrow[r, "\tilde{\iota}_2"'] & X_1 \cup X_2 \end{tikzcd}$$

von topologischen Räumen ein Diagramm von Fundamentalgruppen

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[d, "(\tilde\iota_1)_*"] \\
\pi_1(X_2, x_0) \arrow[r, "(\tilde\iota_2)_*"'] & \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Um dieses Diagramm weiter zu verstehen, brauchen wir ein wenig Gruppentheorie.

Definition 2.4.1
Seien G, G_0, G_1 und G_2 Gruppen. Ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\
G_2 \arrow[r, "j_2"'] & G
\end{tikzcd}$$

mit Gruppenhomomorphismen i_1, i_2, j_1, j_2 heißt pushout-Diagramm, wenn es die folgende universelle Eigenschaft hat: zu jedem Paar von Homomorphismen

$$h_1 : G_1 \to H \quad \text{und} \quad h_2 : G_2 \to H$$

mit $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$ gibt es genau ein $h : G \to H$ mit $h \circ j_1 = h_1$ und $h \circ j_2 = h_2$. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\
& & H
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe G mit den Morphismen j_1, j_2 heißt auch pushout des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\
G_2 &
\end{tikzcd}$$

Sie wird mit $G_1 \star_{G_0} G_2$ bezeichnet, wobei wir die Morphismen i_1 und i_2 in der Notation unterdrücken.

Bemerkungen 2.4.2.

1. Der Pushout ist also der limes im Sinne von Satz 1.14.9, also in kategorieller Sprache ein colimes,

$$G = \lim_{\to} \left(\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\
G_2 &
\end{tikzcd} \right)$$

in der Kategorie der Gruppen.

2. Der Pushout, wenn er existiert, ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

3. Ist $G_0 = \{1\}$ die triviale Gruppe mit $i_1(1) = 1_{G_1}$ und $i_2(1) = 1_{G_2}$, so heißt G das freie Produkt von G_1 und G_2. Wir schreiben $G = G_1 \star G_2$.

Um die Existenz von Pushouts von Gruppen zu zeigen, brauchen wir ein wenig mehr Gruppentheorie.

Definition 2.4.3

1. *Sei G eine Gruppe und $E \subset G$ eine Teilmenge. Der Durchschnitt aller Untergruppen von G, die die Teilmenge E enthalten, heißt die von E erzeugte Untergruppe $\langle E \rangle$.*

2. *Sei G eine Gruppe und $E \subset G$ eine Teilmenge. Der Durchschnitt aller Normalteiler von G, die die Teilmenge E enthalten, heißt der von E erzeugte Normalteiler $\mathcal{N}(E)$.*

3. *Gilt $\langle E \rangle = G$, so heißt E ein Erzeugendensystem der Gruppe G. Wir sagen, E erzeuge G. Gilt $\mathcal{N}(E) = G$, so sagen wir, E erzeuge G als Normalteiler.*

Bemerkungen 2.4.4.

1. Erzeugt eine Teilmenge $E \subset G$ die Gruppe G, so hat jedes Element $g \in G$ mit $g \neq 1$ eine Darstellung der Form
$$g = s_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{i_n} \qquad (*)$$
mit $s_i \in E$ und $i_k \in \mathbb{Z}$.

2. Das Erzeugendensystem ist nicht eindeutig, z.B. ist G selbst ein Erzeugendensystem für G. Auch die Darstellung $(*)$ ist nicht eindeutig; man kann zumindest immer Terme der Form $s_i \cdot s_i^{-1}$ kürzen.

3. $\mathcal{N}(E)$ besteht aus Elementen der Form $(*)$, ihren Konjugierten und den Produkten der Konjugierten.

4. Wird eine Gruppe von einem Element erzeugt, so heißt sie zyklisch.

Wir wenden diese Begriffe auf die Fundamentalgruppen in dem Diagramm (2) vor Definition 2.4.1 an:

Lemma 2.4.5.
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1 und X_2 offen in X, wobei X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend seien. Wähle $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Dann wird $\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$ von den Bildern von $\pi_1(X_1, x_0)$ und $\pi_1(X_2, x_0)$ erzeugt.

Beweis.
Sei $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig. Sei $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$ eine so feine Zerlegung von $I = [0,1]$, dass das Wegsegment $w([t_{i-1}, t_i])$ ganz in X_1 oder ganz in X_2 liegt. Indem man benachbarte Wegsegmente zusammenlegt, erreicht man $w(t_i) \in X_1 \cap X_2$ für alle $x = 0, \ldots, k$.

Sei
$$\begin{array}{rccl} w_i : & I & \to & X \\ & t & \mapsto & w((1-t)t_{i-1} + tt_i) \end{array}$$

eine Parametrisierung des i-ten Wegsegments. Wähle nun für jedes $j = 1, \dots k-1$ einen Weg v_i von x_0 nach $w(t_j)$ innerhalb der wegzusammenhängenden Menge $X_1 \cap X_2$. Die Wege

$$\overline{v_1} \star w_1, \quad \overline{v_2} \star w_2 \star v_1, \quad \dots \overline{v_{k-1}} \star w_{k-1} \star v_{k-1}, \quad w_k \star v_{k-1}$$

sind geschlossene Wege vom Grundpunkt x_0, die ganz in X_1 oder ganz in X_2 liegen. Sie sind daher Repräsentanten von Elementen in $\pi_1(X, x_0)$, die im Bild $(i_1)_* \pi_1(X_1, x_0)$ oder $(i_2)_* \pi_1(X_2, x_0)$ liegen. Die Klasse $[w]$ ist das Produkt dieser Elemente in $\pi_1(X, x_0)$ und daher in der von den Bildern von $\pi_1(X_1, x_0)$ und $\pi_1(X_2, x_0)$ erzeugten Untergruppe. □

Eine direkte Folge von Lemma 2.4.5 ist:

Korollar 2.4.6.

1. Ist ein topologischer Raum X Vereinigung zweier offener, einfach zusammenhängender Teilräume, deren Durchschnitt wegzusammenhängend ist, so ist X einfach zusammenhängend.

2. Insbesondere ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend: wähle als Teilräume die Komplemente von Nordpol und Südpol, die beide homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und damit beide einfach zusammenhängend sind. Ihr Durchschnitt ist homöomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, also für $n \geq 2$ zusammenhängend.

Definition 2.4.7

1. *Sei G eine Gruppe. Ein Erzeugendensystem $E \subset G$ heißt frei, falls aus $s_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{i_n} = 1$ mit $s_i \in E$ und $i_k \in \{\pm 1\}$ folgt, dass es ein $j \in \{1, \dots n-1\}$ gibt mit $s_j = s_{j+1}$ und $i_j = -i_{j+1}$. (Es gelten dann keine anderen Relationen als $s_i s_i^{-1} = 1$.)*

2. *Eine Gruppe G heißt frei, falls sie ein freies Erzeugendensystem E besitzt. Das Erzeugendensystem E legt die Gruppe fest; wir schreiben dann $G = \mathcal{F}(E)$.*

3. *Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge und $R \subset \mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge der frei erzeugten Gruppe. Bezeichne mit $\langle E, R \rangle = \mathcal{F}(E)/\mathcal{N}(R)$ die Faktorgruppe. Gilt $G \cong \langle E, R \rangle$, so sagen wir, G werde durch die Erzeuger E und die Relationen R beschrieben. $\langle E, R \rangle$ heißt eine Präsentierung der Gruppe. Kann man für eine Gruppe G eine Präsentierung mit E, R endlichen Mengen finden, so heißt G endlich präsentierbar.*

Beispiele 2.4.8.

1. Es gilt $\mathcal{F}(\emptyset) = \{1\}$, vgl. Satz 2.4.9, und $\mathcal{F}(\{*\}) = \mathbb{Z} = \langle \{t\}, \emptyset \rangle$.

2. Die freie Gruppe $\mathcal{F}(S) = \langle S, \emptyset \rangle$ mit $|S| > 1$ ist nicht abelsch.

3. Die Gruppe mit Erzeuger $E = \{a\}$ und Relation $R = \{a^n\}$ ist die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ferner haben wir $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle \{a, b\}, aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

4. Jede Gruppe G hat eine Präsentierung, denn das Ausmultiplizieren von Wörtern in G liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\epsilon : \quad \mathcal{F}(G) \to G \ ,$$

und der Normalteiler $R := \ker \epsilon \subset \mathcal{F}(G)$ gibt die richtigen Relationen. Nützliche Präsentierungen zu finden kann dagegen sehr schwierig sein.

Satz 2.4.9.
Die freie Gruppe $\mathcal{F}(E)$ auf einer Menge E hat die folgende universelle Eigenschaft: für jede Gruppe H gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_{grp}(\mathcal{F}(E), H) \cong \mathrm{Abb}_{\mathrm{Mengen}}(E, H) \ .$$

Daraus folgt sofort für $E = \emptyset$, dass $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathcal{F}(\emptyset), H) \cong \mathrm{Abb}_{\mathrm{Mengen}}(\emptyset, H)$. Da es genau eine Abbildung aus der leeren Menge gibt, muss $\mathcal{F}(\emptyset)$ die triviale Gruppe mit einem Element sein.

Beweis.
Sei $\iota : E \to \mathcal{F}(E)$ die natürliche Einbettung von Mengen. Gegeben $f \in \mathrm{Hom}_{grp}(\mathcal{F}(E), H)$, erhalte $f \circ \iota \in \mathrm{Abb}_{\mathrm{Mengen}}(E, H)$. Umgekehrt, gegeben $\varphi \in \mathrm{Abb}_{\mathrm{Mengen}}(E, H)$, definiere $f : \mathcal{F}(E) \to G$ durch

$$f(s_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{i_n}) = \varphi(s_1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi(s_n)^{i_n} \ .$$

Da es in der freien Gruppe keine Relationen gibt, ist f wohldefiniert und eindeutig festgelegt. □

Wir beschreiben nun das freie Produkt von Gruppen aus Bemerkung 2.4.2.3:

Definition 2.4.10
Seien die Gruppen G_1, G_2 durch Erzeugendensysteme E_1, E_2 und Relationen $R_1 \subset \mathcal{F}(E_1)$ und $R_2 \subset \mathcal{F}(E_2)$ gegeben. Dann ist das freie Produkt $G_1 \star G_2$ die Gruppe mit Erzeugern $E_1 \sqcup E_2$ und Relationen $R_1 \cup R_2 \subset \mathcal{F}(G_1 \sqcup G_2)$.

Bemerkungen 2.4.11.

1. Wir bilden also endliche Wörter in Elementen aus $G_1 \sqcup G_2$; die einzigen Relationen sind gegeben durch Relationen in G_1, angewandt auf Elemente in G_1 und Relationen in G_2, angewandt auf Elemente in G_2. Zwischen G_1 und G_2 gilt nur die Relation $1_{G_1} = 1_{G_2}$.

   Die Gruppenverknüpfung ist das Hintereinanderschalten von Wörtern. Das neutrale Element $1_{G_1 \star G_2}$ kann mit dem leeren Wort identifiziert werden.

2. Jedes Element von $G_1 \star G_2$ hat also eine reduzierte Darstellung der Form $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{in}$, wobei die Gruppenelemente abwechselnd in G_1 und G_2 liegen.

3. Es gilt $G \star \{1\} \cong G \cong \{1\} \star G$.

4. Zum Beispiel ist $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \star \langle b \rangle \cong \mathcal{F}(a, b)$ die freie Gruppe auf den beiden Erzeugern a, b. Sie ist nicht abelsch, da $ab \neq ba$ gilt. Auch die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$ ist unendlich und nicht-abelsch. Sie heißt unendliche Diedergruppe. In ihr gilt zum Beispiel:

$$aba \cdot abab = aba^2bab = ab^2ab = a^2b = b \ .$$

5. Wir betten in offensichtlicher Weise die Gruppen G_1 und G_2 in das freie Produkt $G_1 \star G_2$ als Wörter der Länge 1 ein:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \stackrel{j_1}{\to} & G_1 \star G_2 \\ g_1 & \mapsto & g_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G_2 & \stackrel{j_2}{\to} & G_1 \star G_2 \\ g_2 & \mapsto & g_2 \end{array}$$

Wir können nun die Existenz von pushouts von Gruppen sicher stellen:

Satz 2.4.12.
Gegeben sei ein Diagramm von Gruppen

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\ G_2 & \end{tikzcd}$$

Sei N die normale Untergruppe des freien Produkts $G_1 \star G_2$, die von den Elementen

$$\{i_1(g_0)\,(i_2(g_0))^{-1}\}_{g_0 \in G_0}$$

erzeugt wird. Dann ist der pushout des Diagramms die Faktorgruppe $G_1 \star G_2/N$ mit den Abbildungen

$$\tilde{j}_i : \quad G_i \xrightarrow{j_i} G_1 \star G_2 \to G_1 \star G_2/N \ .$$

Insbesondere ist das freie Produkt $G_1 \star G_2$ der pushout für den Fall $G_0 = \{1\}$, also der trivialen Gruppe.

Beweis.
Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "\tilde{j}_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "\tilde{j}_2"] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & G_1 \star G_2/N \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

setze für $g_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot \ldots \cdot g_{j_n} \in G_1 \star G_2$, vgl. Bemerkung 2.4.11,

$$h(g_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot \ldots \cdot g_{j_n}) := h_{\epsilon_1}(g_{j_1}) \cdot \ldots h_{\epsilon_n}(g_{j_n})$$

mit $\epsilon_k \in \{1,2\}$, je nachdem ob $g_{j_k} \in G_1$ oder $g_{j_k} \in G_2$ gilt. h ist so eindeutig festgelegt und auf dem Quotienten $G_1 \star G_2/N$ wohldefiniert, denn

$$h(i_1(g_0)) \stackrel{\text{def}}{=} h_1(i_1(g_0)) = h_2(i_2(g_0)) \stackrel{\text{def}}{=} h(i_2(g_0)) \ ,$$

also ist $N \subset \ker h$. □

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts:

Theorem 2.4.13 (Seifert-van Kampen)**.**
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1 und X_2 offen in X und $X_0 := X_1 \cap X_2$, wobei X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend seien. Wähle $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Dann ist das Diagramm (2)

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[d, "(\tilde{\iota}_1)_*"] \\ \pi_1(X_2, x_0) \arrow[r, "(\tilde{\iota}_2)_*"'] & \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \end{tikzcd}$$

ein Pushout-Diagramm. Insbesondere ist

$$\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \star_{\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \ .$$

Beweis.

1. Wegen Lemma 2.4.5 haben wir eine Surjektion
$$\tilde{\Phi}: \quad G := \pi_1(X_1, x_0) \star \pi_1(X_2, x_0) \to \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \ ;$$
wir müssen deren Kern bestimmen.

2. Sei $\alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$; dies wird unter
$$\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \xrightarrow{(\iota_1)_*} \pi_1(X_1, x_0) \xrightarrow{(\tilde{\iota}_1)_*} \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$$
auf
$$(\tilde{\iota}_1)_* \circ (\iota_1)_*(\alpha) = (\tilde{\iota}_1 \circ \iota_1)_*(\alpha) = (\tilde{\iota}_2 \circ \iota_2)_*(\alpha) = (\tilde{\iota}_2)_* \circ (\iota_2)_*(\alpha)$$
abgebildet. Daher müssen alle Elemente der Form $(\tilde{\iota}_1 \circ \iota_1)_*(\alpha)\left((\tilde{\iota}_2 \circ \iota_2)_*(\alpha)\right)^{-1}$ im Kern von $\tilde{\Phi}$ liegen. Damit liegt auch der von diesen Elementen erzeugte Normalteiler $\mathcal{N}$ von $G = \pi_1(X_1, x_0) \star \pi_1(X_2, x_0)$ im Kern von $\tilde{\Phi}$.

3. Es ist zu zeigen, dass der Normalteiler $\mathcal{N}$ schon der ganze Kern von $\tilde{\Phi}$ ist. Sei also $z = \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \in G$ mit $\alpha_i \in \pi_1(X_1, x_0)$ oder $\alpha_i \in \pi_1(X_2, x_0)$ und $\tilde{\Phi}(z) = 1$. Finde Repräsentanten $\alpha_i = [w_i]$, für die dann gilt:
$$[w_k] \cdot \ldots \cdot [w_1] = 1 \in \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \ .$$
Wir teilen das Standardintervall I in gleich lange Teile und finden einen geschlossenen Weg w, der auf dem i-ten Teilintervall mit dem umparametrisierten Weg w_i übereinstimmt. Dann ist der Weg w nach Voraussetzung in $X_1 \cup X_2$ nullhomotop. Sei $H : I^2 \to X$ eine entsprechende Homotopie von w in $X_1 \cup X_2$ auf den konstanten Weg c_{x_0}. Die Homotopie lässt Anfangs- und Endpunkt fest, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ für alle $t \in I$.

4. Wir führen nun folgende Konstruktion für diese Homotopie aus:
   - Wir zerlegen das Quadrat I^2 so in feine Teilquadrate, dass für die Bilder jedes Teilquadrats Q gilt $H(Q) \subset X_1$ oder $H(Q) \subset X_2$.
   - Für jeden Ecke e des Quadratgitters finde einen Hilfsweg $v(e)$ vom Grundpunkt $x_0 \in X$ nach $H(e) \in X$. Liegt $H(e)$ in X_1, X_2 oder $X_1 \cap X_2$, so soll auch der Hilfsweg $v(e)$ dort liegen. Ist $H(e) = x_0$, so wählen wir den konstanten Weg. Diese Konstruktion ist möglich, weil X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend sind.
   - Jede Kante $c : I \to I^2$ des Quadratgitters ist ein Weg, dessen Bild $H \circ c : I \to X$ ein Weg von $H(c(0))$ nach $H(c(1))$ ist, der entweder ganz in X_1 oder ganz in X_2 liegt. Dann ist
   $$\tilde{c} := \overline{v(c(1))} \star (H \circ c) \star v(c(0))$$
   ein geschlossener Weg mit Grundpunkt x_0, der ganz in X_1 oder in X_2 liegt.

5. Wir brauchen nun für solche geschlossenen Wege Bezeichnungen: ist $w : I \to X$ ein geschlossener Weg, der ganz in X_1, X_2 bzw. $X_1 \cap X_2$ liegt, so bezeichnen wir die entsprechenden Homotopieklassen
$$[w]_1 \in \pi_1(X_1, x_0) \text{ bzw. } [w]_2 \in \pi_1(X_2, x_0) \text{ bzw. } [w]_{12} \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \ .$$

Ist w ein Weg in $X_1 \cap X_2$, so können wir jedes der Elemente $[w]_1$ und $[w]_2$ als Gruppenelement im freien Produkt $G := \pi_1(X_1, x_0) \star \pi_1(X_2, x_0)$ auffassen. Für einen Weg w in $X_1 \cap X_2$ sind beide Elemente $[w]_1, [w]_2 \in G$ definiert, aber verschiedene Elemente von G. Allerdings unterscheiden sie sich um ein Element in dem Normalteiler $\mathcal{N}$,

$$[w]_1\mathcal{N} = [w]_2\mathcal{N} \in G/\mathcal{N} \ .$$

6. Die Restklassen $[\tilde{c}]_1\mathcal{N}$ bzw. $[\tilde{c}]_2\mathcal{N}$ des in 4. für jede Kante c definierten Wegs $\tilde{c}$ stimmen demnach überein, wenn sie beide definiert sind. Wir bezeichnen die Restklasse mit $\hat{c}$.

   Wir behaupten nun, dass für die Kanten des Bild des Weges H_0 in $G/\mathcal{N}$ gilt $\hat{c}_k \cdot \ldots \hat{c}_2 \cdot \hat{c}_1 = 1$. Wenden wir dies auf den in 3. konstruierten Weg w und die zugehörige Homotopie an, so ist $[w]\mathcal{N} = 1 \in G/\mathcal{N}$, also $w \in \mathcal{N}$. Damit ist der Satz gezeigt.

7. Es bleibt die Behauptung aus 6. zu zeigen: sei Q ein Teilquadrat mit Kanten u, r, l, o unten, rechts, links und oben. Dann sind die beiden Wege $r \star u \simeq o \star l$ homotop mit Homotopien, die den Anfangs- und den Endpunkt festlassen, weil das Teilquadrat Q einfach zusammenhängend ist.

   Wendet man H an und fügt wie in 4. Hilfswege ein, so erhält man $\tilde{r} \star \tilde{u} \simeq \tilde{o} \star \tilde{l}$, und zwar in X_1 oder X_2, je nach dem, wo das Quadrat Q unter H hin abgebildet wird. In jedem Fall erhalten wir in $G/\mathcal{N}$ die Gleichung $[\tilde{r}][\tilde{u}]\mathcal{N} = [\tilde{o}][\tilde{l}]\mathcal{N}$.

   Jetzt multiplizieren wir alle diese Gleichungen zusammen. Die Homotopie H ist am linken und rechten Rand des großen Quadrats konstant, und am oberen Rand ist der konstante Weg. Also ergeben alle diese Wege das neutrale Element in $G/\mathcal{N}$. Daraus folgt die Behauptung aus 6.

$\square$

Beispiele 2.4.14.

1. Sei $X := \mathbb{S}^1_{(1)} \vee \mathbb{S}^1_{(2)}$ das Bouquet aus zwei Kreisen. Wir überdecken es so mit zwei offenen Mengen X_1, X_2, dass der Grundpunkt x_0 mit vier Segmenten im Schnitt $X_1 \cap X_2$ liegt. Dann ist $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \{1\}$. Daher ist $\pi_1(\mathbb{S}^1_{(1)} \vee \mathbb{S}^1_{(2)}) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ die freie Gruppe auf zwei Erzeugern.

2. Induktiv finden wir $\pi_1(\vee_{i=1}^n \mathbb{S}^1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \star \ldots \star \mathbb{Z}}_{n} =: \mathcal{F}_n$. Hierbei ist $\mathcal{F}_n$ die freie Gruppe auf n Erzeugern.

3. Betrachte den zweidimensionalen Torus ohne einen Punkt, $X = T^2 \setminus \{p_0\}$. Der Raum ist ein Deformationsretrakt des Bouquets, $T^0 \setminus \{p_0\} \simeq \mathbb{S}^1_{(1)} \vee \mathbb{S}^1_{(2)}$ und nach Bemerkung 2.2.8.3 ist $\pi_1(T^2 \setminus \{p_0\}) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$.

Wir untersuchen nun, wie sich die Fundamentalgruppe durch Ankleben von Zellen wie in Definition 1.10.13 verändert.

Satz 2.4.15.
Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Sei $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ stetig mit $f(1) = x_0$. Sei $\iota : X \to X \cup_f \mathbb{D}^n$ die Inklusion von X. Dann ist für $n \geq 3$ der induzierte Gruppenhomomorphismus

$$\iota_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0)$$

ein Isomorphismus. Das Ankleben von Zellen e^n mit $n \geq 3$ verändert also die Fundamentalgruppe nicht.

Beweis.
Betrachte

$$F: \quad (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X \cup_f \mathbb{D}^n)$$

mit $F|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f$. Setze

$$X_1 := X \cup_f \mathbb{D}^n \setminus F(0) \quad X_2 := \mathring{\mathbb{D}} \subset X \cup_f \mathbb{D}^n \ .$$

Wähle y_0 in $X_1 \cap X_2$ beliebig und einen Weg w von y_0 nach x_0. Es liegt die Situation des Satzes 2.4.13 von Seifert-van Kampen vor.

- Es ist $\pi_1(X_2, y_0) = \{1\}$, da die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ sternförmig in Bezug auf 0 ist.
- Ferner ist der Durchschnitt

  $$X_1 \cap X_2 = \mathring{\mathbb{D}}^n \setminus \{F(0)\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

  nach Korollar 2.4.6.2 für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend, also ist $\pi_1(X_1 \cap X_2, y_0) = \{1\}$.

Nach dem Satz von Seifert-van Kampen 2.4.13 ist

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_0) \cong \pi_1(X_1, y_0) \ .$$

Ferner haben wir die Isomorphie

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(X, y_0) \ ,$$

wobei die letzte Isomorphie durch den Weg w vermittelt wird und die erste nach Bemerkung 2.2.8.3 folgt, weil X ein Deformationsretrakt von X_1 ist.

Insgesamt haben wir

$$\begin{tikzcd}
\{1\} = \pi_1(X_1 \cap X_2, y_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X_2, y_0) = \{1\} \arrow[d] \\
\pi_1(X_1, y_0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "w_*"'] & \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}, y_0) \arrow[d, "w_*"] \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}, x_0) \\
\pi_1(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

□

Die Situation ist anders beim Ankleben von 2-Zellen:

Satz 2.4.16.
Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Sei $f : \mathbb{S}^1 \to X$. Sei

$$\begin{array}{cccc} w_f : & I & \to & X \\ & t & \mapsto & f(\exp(2\pi i t)) \end{array}$$

Sei $v : I \to X$ ein beliebiger Weg von x_0 nach $f(1) = w_f(0) = w_f(1)$. Dann induziert die Inklusion $\iota : X \to X \cup_f \mathbb{D}^n$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\iota_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \ ,$$

dessen Kern der von

$$\alpha_f := [\overline{v} \star w_f \star v] \in \pi_1(X, x_0)$$

erzeugte Normalteiler $\mathcal{N}(\alpha_f)$ ist.

Bemerkungen 2.4.17.

1. Also ist
$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/\mathcal{N}(\alpha_f) \ .$$
2. Der Normalteiler $\mathcal{N}(\alpha_f)$ ist von der Wahl des Hilfswegs v unabhängig. Wir haben es also im Wesentlichen mit der Homotopieklasse des Weges w_f zu tun, der um den Rand der Zelle läuft. Durch das Ankleben der 2-Zelle haben wir das Element $\alpha_f \in \pi_1(X; x_0)$ "getötet".

Beweis.
Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 2.4.15 ist nun der entscheidende Unterschied, dass der Durchschnitt $X_1 \cap X_2 \simeq \mathbb{S}^1$ nicht einfach zusammenhängend ist, sondern von der Klasse von $\overline{v} \star w_f \star v$ erzeugt wird. Daher ist nach dem Satz von Seifert-van Kampen 2.4.13

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) \star_{\pi_1(\mathbb{S}^1,1)} \pi_1(\mathbb{D}^2) \cong \pi_1(X, x_0)/\mathcal{N}(\alpha_f) \ .$$

□

Korollar 2.4.18.
Sei G eine endlich präsentierte Gruppe, $G = \langle S, R \rangle$. Dann gibt es einen wegzusammenhängenden Raum X mit $x_0 \in X$, so dass $\pi_1(X, x_0) \cong G$ gilt.

Beweis.
Sei $S = \{s_1, \ldots s_m\}$ die endliche Menge der Erzeugenden. Setze $X_1 := \vee_{i=1}^m \mathbb{S}^1_i$ mit Grundpunkt $x_0 = [1]$. Wir wissen aus Beispiel 2.4.14, dass $\pi_1(X_1, x_0)$ die freie Gruppe $\mathcal{F}(S)$ auf der Menge S ist. Seien $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subset \mathcal{F}(S)$ die Relationen. Jede Relation r_i ist ein Wort in den Erzeugern $s_1, \ldots, s_m$. Finde nun geschlossene Wege

$$f_i : \quad \mathbb{S}^1 \to X_1 := \vee_{i \in S} \mathbb{S}^1_i$$

mit $f_i([\alpha]) = r_i$, wobei $[\alpha]$ ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ist. Konstruiere dann induktiv und finde mit Satz 2.4.16

$$\begin{aligned} X_2 := X_1 \cup_{f_1} \mathbb{D}^2 \quad &\Rightarrow \quad \pi_1(X_2, x_0) = \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(r_1) \\ X_{n+1} := X_n \cup_{f_n} \mathbb{D}^2 \quad &\Rightarrow \quad \pi_1(X_{n+1}, x_0) = \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(R) = \langle S, R \rangle = G \ . \end{aligned}$$

□

Beispiele 2.4.19.

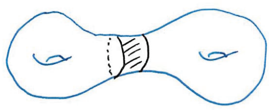
1. Für $k \geq 1$ sei $f_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $f_k(z) = z^k$. Setze
$$X_k := \mathbb{S}^1 \cup_{f_k} \mathbb{D}^2 \ .$$
Basispunkt ist $x_0 = 1 \in \mathbb{S}^1$. Ist $w(t) = \exp(2\pi i t)$ der Standarderzeugende von $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$, so ist $w_f(t) = \exp(2\pi i k t)$ und $\alpha_f = [w_f] = [w]^k = \alpha^k$. Damit ist $\pi_1(X_k, 1) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)/\mathcal{N}(\alpha^k) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

   Bildlich: man hat eine Kreisscheibe, deren Rand in k gleiche Segmente unterteilt wird. Diese werden gleichsinnig identifiziert. Durchläuft man also das Segment k-mal, so erhält man als Weg den Rand der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$, der in der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ zusammenziehbar ist.

2. Für $k = 2$ erhalten wir die projektive Ebene $\mathbb{R}P = X_2$, deren Fudamentalgruppe zyklisch von Ordnung 2 ist.

   Für $n \geq 3$ hat der projektive Raum eine Zellzerlegung
$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^2 \cup e^3 \cup \ldots \cup e^n \ .$$
Aus Satz 2.4.15 folgt $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

3. Wir untersuchen eine Fläche F_2 vom Geschlecht 2, indem wir sie durch zwei offene Mengen X_1, X_2 überdecken, die beide die Gestalt von Tori ohne eine offene Kreisscheibe haben. Ihr Überlapp ist ein offener Zylinder X_0, der homotop zu $\mathbb{S}^1$ ist.



   Mit Beispiel 2.4.14.3 finden wir
$$\pi_1(F_2, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \star_{\pi_1(X_0, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \cong (\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}) \ .$$
Wir benennen die Erzeuger a_1, b_1, a_2, b_2. Die Relation ist dann $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = \left(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}\right)^{-1}$.

   Für die Fundamentalgruppe einer Fläche F_g vom Geschlecht g erhalten wir
$$\pi_1(F_g, x_0) = \langle a_1, b_1, \ldots a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle \ .$$

2.5 Transformationsgruppen

Definition 2.5.1
Eine Menge mit der Struktur einer Gruppe und eines topologischen Raums heißt topologische Gruppe, falls die Multiplikation $\mu : G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $(-)^{-1} : G \to G$ stetig sind. Hierbei ist $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen.

Beispiele 2.5.2.

1. Jede Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe. (Dies gilt auch für die additive Gruppe $(\mathbb{K}, +)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ eines Körpers $\mathbb{K}$ oder additive Gruppe $(V, +)$ eines Vektorraums V.

2. Die additiven und multiplikativen Gruppen der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, versehen mit der euklidischen Topologie, sind topologische Gruppen.

3. Ist G topologische Gruppe, dann ist jede Untergruppe $H \leq G$ mit der Unterraumtopologie eine topologische Gruppe. Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 = \mathrm{SO}(2) < \mathbb{C}^\times$ eine topologische Gruppe.

4. Ein Produkt $G = \prod_{i \in I} G_i$ ist eine topologische Gruppe genau dann, wenn alle G_i topologische Gruppen sind. Zum Beispiel ist der n-dimensionale Torus $T^n := \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ eine topologische Gruppe.

5. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Gruppe
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n^2}$$
als offene Teilmenge eine topologische Gruppe. Die Stetigkeit von Multiplikation und Inversenabbildung folgt dabei aus den konkreten Formeln für Matrizen. In dieser Gruppe können Untergruppen $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ durch Gleichungen charakterisiert werden. Diese "klassischen Gruppen" sind topologische Gruppen, z.B.
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{SO}(n) & \subset & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$
Man beachte, dass die Gruppen $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ kompakt sind. Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, aber nicht kompakt.

6. Lie-Gruppen sind topologische Gruppen, bei denen der topologische Raum G überdies die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat und bei denen Multiplikation und Inversenabbildung differenzierbar sind.

Bemerkungen 2.5.3.

1. Sei G topologische Gruppe und $g \in G$. Dann sind die Linkstranslationen und Rechtstranslationen
$$\begin{array}{cccc} L_g: & G & \to & G \\ & g' & \mapsto & gg' \end{array} \qquad \text{bzw} \qquad \begin{array}{cccc} R_g: & G & \to & G \\ & g' & \mapsto & g'g \end{array}$$
Homöomorphismen mit Umkehrabbildungen $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ bzw. $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$.

2. Für jedes $g \in G$ betrachten wir die Konjugation $C_g := L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g : G \to G$.

3. Seien G_1, G_2 topologische Gruppen und $\varphi : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist φ genau dann stetig, wenn φ stetig im neutralen Element $1 \in G_1$ ist (Übungsaufgabe).

Definition 2.5.4

Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Wir sagen, G operiert auf X, wenn es eine stetige Abbildung
$$\rho : G \times X \to X$$

gibt mit $\rho(1,x) = x$ für alle $x \in X$ und $\rho(g_2, \rho(g_1, x)) = \rho(g_2 \cdot g_1, x)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

Dann heißt G Transformationsgruppe von X, und X heißt G-Raum.

Wir schreiben auch $\rho(g, x) = g.x = gx$. Wir haben einen Homomorphismus $G \to \text{Homöo}(X)$ von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X. Zum Beispiel operiert jede Gruppe auf sich selbst durch Linkstranslationen und durch Konjugation. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

Definition 2.5.5

Sei X ein topologischer Raum mit einer Operation einer topologischen Gruppe G.

1. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt invariant oder stabil unter G, falls $g.a \in A$ für alle $g \in G$ und alle $a \in A$ gilt.*

2. *Sei $x_0 \in X$ Dann heißt*
$$Gx_0 := \{g.x_0 \mid g \in G\}$$
die Bahn von x_0. Die Bahn Gx_0 ist invariant unter G.

   Die Gruppe
$$G_{x_0} := \mathrm{Stab}_G(x_0) := \{g \in G \mid gx_0 = x_0\} \leq G$$
heißt Stabilisatoruntergruppe oder Isotropiegruppe von x_0. (Es gilt $\mathrm{Stab}_G(gx_0) = g\mathrm{Stab}_G(x_0)g^{-1}$.)

3. *Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt Fixpunkt der Gruppenwirkung, wenn $\mathrm{Stab}_G(x_0) = G$ gilt.*

4. *Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls $gx \neq x$ für alle $g \in G$ mit $g \neq 1$ und alle $x \in X$ gilt (also wenn alle Stabilisatoren trivial sind).*

5. *Eine Gruppenwirkung heißt effektiv, falls $\rho(g, -) \neq \mathrm{id}_X$ für alle $g \neq 1$ gilt. (Freie Wirkungen sind insbesondere effektiv.)*

6. *Eine Gruppenwirkung heißt transitiv, falls $Gx_0 = X$ alle $x_0 \in X$ gilt (also wenn es nur eine Bahn gibt).*

Definition 2.5.6

Seien X, Y G-Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt G-äquivariant, falls $f(gx) = gf(x)$ für alle $g \in G$ und alle $x \in X$ gilt.

Bemerkung 2.5.7.

- Eine Gruppenwirkung $\rho : G \times X \to X$ induziert eine Äquivalenzrelation of X: es ist $x \sim_G y$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $gx = y$, also genau dann, wenn $y \in Gx$ gilt. Die Äquivalenzklasse von $x_0 \in X$ ist dann die Bahn von x_0, also $[x_0] = Gx_0$. Die Menge der Äquivalenzklassen, den sogenannten Bahnenraum, bezeichnen wir mit $X/G := X/_{\sim_G}$.

  Wie üblich versehen wir den Bahnenraum mit der Quotienttopologie, so dass $\pi : X \to X/G$ stetig ist.

- Eine G-äquivariante stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert eine Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & X/G & \to & Y/G \\ & [x] & \mapsto & [f(x)] \end{array}$$

Wir haben nämlich eine eindeutige Abbildung

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi^X"'] & Y \arrow[d, "\pi^Y"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

die stetig ist, weil $\pi^X \circ \tilde{f} = f \circ \pi^Y$ stetig ist. Ist f ein Homöomorphismus, so ist auch $\overline{f}$ ein Homöomorphismus.

Definition 2.5.8
Sei X ein G-Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset X$ heißt <u>Fundamentalbereich</u> (für die G-Wirkung), falls jede Bahn F mindestens einmal schneidet.

Typischerweise wird der Fundamentalbreich F so gewählt, dass jede Bahn das Innere $\mathring{F}$ nur einmal schneidet, aber den Rand ∂F eventuell mehrfach.

Beispiele 2.5.9.

1. Sei (w_1, w_2) linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Das <u>Gitter</u>

$$\Gamma := \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \lambda_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist eine additive Gruppe, die auf $\mathbb{R}^2$ durch Addition operiert:

$$\rho(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, x) := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + x \ .$$

Ein Fundamentalbereich ist die Gitterwabe

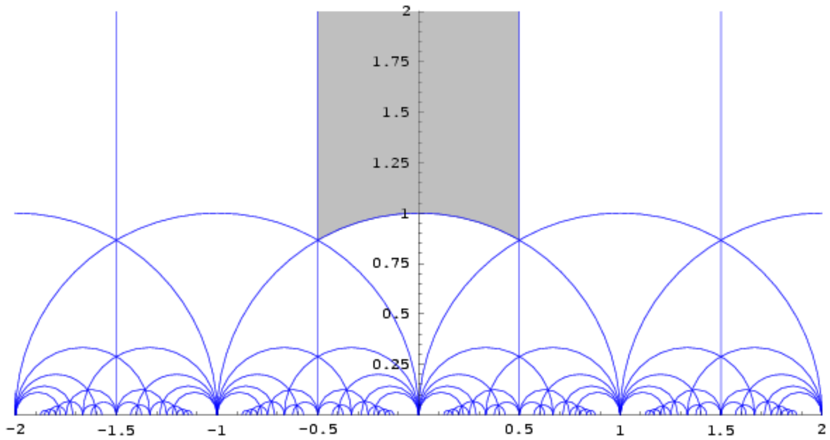
$$F := \{\alpha w_1 + \beta w_2 \,|\, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\} \ .$$

Es ist $\mathbb{R}^2/\Gamma \cong T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $F/\Gamma \cong T$.

2. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf der komplexen oberen Halbebene $\mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ durch

$$z \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z := \frac{az+b}{cz+d} \ ,$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$ gilt. Die Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert durch Einschränkung ebenfalls auf $\mathbb{H}$. Ein Fundamentalbereich ist in der folgenden Zeichnung [2] schraffiert:



[2] Quelle: Wikipedia

Der folgende Satz zeigt, dass Gruppenwirkungen sehr besondere identifizierungen ergeben. Die Projektion auf einen Quotientraum ist immer stetig.

Satz 2.5.10.
Sei X ein G-Raum. Die Projektion $\pi : X \to X/G$ ist stets offen.

Beweis.
Sei $B \subset X$ offen. Es ist $\pi(B)$ genau dann offen in der Quotiententopologie auf X/G, wenn $\mathrm{Sat}(B) = \pi^{-1}\pi(B) \subset X$ offen in X ist. Aber

$$\mathrm{Sat}(B) = \cup_{g\in G} gB$$

und mit B ist auch gB für alle $g \in G$ offen, weil L_g ein Homöomorphismus ist. $\square$

Satz 2.5.11.
Sei X ein G-Raum und $Y \subset X$ invariant. Dann induziert die Einbettung $\iota : Y \to X$ einen Homömorphismus

$$\bar{\iota} : \quad Y/G \to \pi^X(Y) \subset X/G \ .$$

Beweis.
Es ist klar, dass $\bar{\iota}$ bijektiv und stetig ist. Um zu zeigen, dass $\bar{\iota}$ offen ist, sei $B' \subset Y$ offen. Dann gibt es $B \subset X$ offen in X mit $B' = B \cap Y$. Nun ist

$$\bar{\iota}(\pi^Y(B')) = \pi^X(Y) \cap \pi^X(B)$$

und $\pi^X(B)$ ist offen in X/G nach Satz 2.5.10. Also ist $\pi^X(B) \cap \pi^X(Y)$ offen in $\pi^X(Y)$. $\square$

Satz 2.5.12.
Ist X_1 ein G_1-Raum und X_2 ein G_2-Raum, so ist $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie ein $G_1 \times G_2$ Raum. Es gilt

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \cong X_1/G_2 \times X_2/G_2 \ .$$

Beweis.
Mit der $G_1 \times G_2$-Wirkung auf X_1, die durch $(g_1, g_2).x := g_1 x$ gegeben ist, gilt $X_1/(G_1 \times G_2) \cong X_1/G_1$. Die Abbildung $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ ist für diese $G_1 \times G_2$-Wirkung äquivariant. Analoge Aussagen gelten für die analoge $G_1 \times G_2$-Wirkung auf X_2. Daher ist

$$\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2) : \quad (X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \to X_1/G_1 \times X_2/G_2$$

bijektiv und stetig.

Um zu zeigen, dass $\overline{p}$ offen ist, sei $\overline{B}$ offen in $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$. Dann ist $\pi^{-1}(\overline{B})$ offen in $X_1 \times X_2$ und nach Satz 1.8.4 von der Form

$$\pi^{-1}(\overline{B}) = \cup_{i\in I} B_1^i \times B_2^i$$

mit B_j^i offen in X_j. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{p}(\overline{B}) &= (\pi_{G_1} \times \pi_{G_2})(\cup_{i\in I} B_1^i \times B_2^i) \\ &= \cup_{i\in I} \pi_{G_1}(B_1^i) \times \cup_{i\in I} \pi_{G_2}(B_2^i) \end{aligned}$$

nach Satz 2.5.10 offen. □

Eine wichtige Beispielklasse topologischer Räume sind homogene Räume. Ist G eine topologische Gruppe und $H \leq G$ Untergruppe, so heißt G/H ein homogener Raum, wenn G eine Lie-Gruppe ist und H abgeschlossen in G ist. Der folgende Satz erklärt, warum wir fordern, dass H abgeschlossen in G ist:

Satz 2.5.13.
Sei G eine topologische Gruppe und $H < G$. Dann ist G/H genau dann Hausdorffsch, wenn H abgeschlossen ist.

Beweis.

- Sei G/H Hausdorffsch und $g \notin H$. Dann ist $gH \neq 1H = H$ in G/H, und es gibt disjunkte offene Umgebungen U von gH und V von $1H$ in G/H. Dann sind die Urbilder $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ offen in G und auch disjunkt. Insbesondere liegt $g \in \pi^{-1}(U)$ in G. Also ist H in G abgeschlossen.

- Sei nun umgekehrt H in G abgeschlossen. Betrachte die stetige Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \psi : & G \times G & \rightarrow & G \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & g_2 g_1^{-1} . \end{array}$$

  Da H abgeschlossen in G ist, ist auch das Urbild

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1}(H) & = & \{(g, hg) \,|\, g \in G, h \in H\} \\ & = & \{(g_1, g_2) \,| g_1 \sim_H g_2\} \\ & = & (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) \end{array}$$

  abgeschlossen in $G \times G$. Hier ist Δ die Diagonale in $G/H \times G/H$ und $\pi : G \to G/H$. Also ist auch die Diagonale Δ in $G/H \times G/H$ abgeschlossen, und nach Satz 1.7.5 ist G/H Hausdorffsch.

□

Satz 2.5.14.
Sei G eine topologische Gruppe und $H \leq G$. Der topologische Raum G/H ist genau dann diskret, wenn H offen ist. Insbesondere sind offene Untergruppen auch abgeschlossen.

Beweis.
Der topologische Raum G/H ist genau dann diskret, wenn die Nebenklasse $gH \in G/H$ für jedes $g \in G$ offen in G/H ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Teilmenge $\pi^{-1}(gH) = gH \subset G$ offen in G ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $H = L_{g^{-1}}(gH)$ offen ist. □

Satz 2.5.15.
Ist G eine topologische Gruppe, so ist die Zusammenhangskomponente $G_1 = Z(1)$ des neutralen Elements ein abgeschlossener Normalteiler in G.

Beweis.

- Nach Satz 1.9.11 ist $Z(1)$ als Zusammenhangskomponente abgeschlossen.
- Da die Inversenabbildung stetig ist, ist auch $(-)^{-1}(Z(1))$ zusammenhängend und enthält das neutrale Element $1 \in G$. Also liegt mit $g \in Z(1)$ auch $g^{-1} \in Z(1)$.
- Da L_g stetig ist, ist $g.Z(1)$ zusammenhängend für jedes $g \in G$. Ist $g \in Z(1)$, so liegt $g^{-1} \in Z(1)$ und somit $1 = gg^{-1} \in gZ(1)$. Also ist für jedes $g \in Z(1)$ das Bild $gZ(1) = Z(1)$. Die Zusammenhangskomponente $Z(1)$ ist somit unter Multiplikation abgeschlossen. Also ist $Z(1)$ eine abgeschlossene Untergruppe von G.
- Für jedes $g \in G$ liefert die Konjugation einen Homöomorphismus

  $$C_g : \quad Z(1) \to gZ(1)g^{-1} \ .$$

  Nun ist $1 = g1g^{-1} \in gZ(1)g^{-1}$ und daher $Z(1) = gZ(1)g^{-1}$ für alle $g \in G$ und daher $Z(1)$ normale Untergruppe.

□

2.6 Bahnen und homogene Räume

Betrachtung 2.6.1.
Sei X ein G-Raum und $x_0 \in X$. Dann kann man immer die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_{x_0} : & G/\mathrm{Stab}_G(x_0) & \to & Gx_0 \\ & g.\mathrm{Stab}_G(x_0) & \mapsto & gx_0 \end{array}$$

betrachten. Die Abbildung ist wohldefiniert und stetig. Sie ist überdies bijektiv und G-äquivariant, aber im Allgemeinen *kein* Homöomorphismus.

Beispiel 2.6.2.
Sei $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Auf $X = T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ operiere die topologische Gruppe $G = \mathbb{R}$ durch

$$\rho_\theta(t, z, w) = (\exp(2\pi \mathrm{i} t)z, \exp(2\pi \mathrm{i}\theta t)w) \ .$$

Ist $\theta \in \mathbb{Q}$, so sind die Bahnen geschlossen und φ ist ein Homöomorphismus. Im Falle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen die Bahnen dicht, die Topologie der Bahn $G_{x_0} \subset T$ ist also nicht die euklidische Topologie von $\mathbb{R}$.

Definition 2.6.3
Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine Operation $\rho : G \times X \to X$ heißt <u>*eigentlich*</u>*, falls die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \theta : G \times X & \to & X \times X \\ (g, x) & \mapsto & (x, g.x) \end{array}$$

eigentlich ist. Das heißt, dass θ abgeschlossen ist und das Urbild $\theta^{-1}(x, x')$ für alle Punkte $(x, x') \in X \times X$ kompakt ist.

Lemma 2.6.4.
Operiert eine topologische Gruppe G eigentlich auf einem topologischen Raum X, so gilt:

1. Der Bahnenraum X/G ist Hausdorfsch.

2. Ist die topologische Gruppe G Hausdorffsch, so auch X.

Beweis.

1. Weil θ abgeschlossen ist, ist
$$\theta(G \times X) = \{(x, x') \in X \times X \,|\, x' \in Gx\} \subset X \times X$$
abgeschlossen. Damit ist aber die Diagonale des Bahnenraums X/G abgeschlossen und X/G nach Satz 1.7.5 Hausdorffsch.

2. Weil die topologische Gruppe G Hausdorffsch ist, ist $1 \in G$ abgeschlossen und daher
$$\begin{array}{rccc} \iota: & X & \to & G \times X \\ & x & \mapsto & (1, x) \end{array}$$
ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge. Daher ist $\theta \circ \iota$ abgeschlossen und somit auch $\theta \circ \iota(X) = \Delta_X$ in $X \times X$ abgeschlossen. Nach Satz 1.7.5 ist X Hausdorffsch.

□

Satz 2.6.5.
Operiert G eigentlich auf X, so gilt:

1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \omega_{x_0}: & G & \to & X \\ & g & \mapsto & g.x_0 \end{array}$$
ist eigentlich.

2. Für alle $x_0 \in X$ ist der Stabilisator G_{x_0} kompakt.

3. Die Abbildung $\varphi_{x_0}: \; G/\mathrm{Stab}_G(x_0) \to Gx_0$ aus Betrachtung 2.6.1 ist ein Homöomorphismus.

4. Für jedes $x_0 \in X$ ist die Bahn $Gx_0 \subset X$ abgeschlossen.

Beweis.

1. Als Vorüberlegung betrachten wir eine eigentliche Abbildung $f : X \to Y$. Sei $Y' \subset Y$ und $\tilde{f} := f|_{f^{-1}(Y')} : f^{-1}(Y') \to Y'$. Man überlegt sich leicht, dass auch $\tilde{f}$ eigentlich ist. Insbesondere ist für jedes $x_0 \in X$
$$\begin{array}{rccc} \theta|_{G \times \{x_0\}} : G \times \{x_0\} & \to & \{x_0\} \times X \\ (g, x_0) & \mapsto & (x_0, g.x_0) \end{array}$$
und damit auch ω_{x_0} als Komponente von $\theta|_{G \times \{x_0\}}$ eigentlich.

2. Für jedes $x_0 \in X$ ist das Urbild

$$\omega_{x_0}^{-1}(x_0) = \{g \in G \,|\, gx_0 = x_0\} = G_{x_0}$$

   kompakt, weil ω_{x_0} eigentlich ist.

3. Wir wissen, dass die Abbildung φ_{x_0} aus Betrachtung 2.6.1 immer stetig und bijektiv ist,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\omega_{x_0}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\ & G/G_x \arrow[ur, "\varphi_{x_0}"'] & \end{tikzcd}$$

   Es bleibt zu zeigen, dass φ_{x_0} abgeschlossen ist. Wir wissen aus 1., dass $\varphi_{x_0} \circ \pi = \omega_{x_0}$ eigentlich und π surjektiv ist. $A \subset G/G_{x_0}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\pi^{-1}(A) \subset G$ abgeschlossen ist. Daraus folgt aber, dass $\omega_{x_0}\pi^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist, wenn $A \subset G/G_x$ abgeschlossen ist. Es gilt nun, weil π surjektiv ist:

$$\varphi_{x_0}(A) = \varphi_{x_0}(\pi \circ \pi^{-1}(A)) = \omega_{x_0}\pi^{-1}(A) \ ,$$

   also ist $\varphi_{x_0}(A)$ abgeschlossen.

4. Damit ist auch insbesondere $Gx_0 = \omega_{x_0}(G)$ abgeschlossen.

□

Wir brauchen eine gute notwendige Bedingung dafür, dass eine Gruppenwirkung eigentlich ist.

Definition 2.6.6
Sei X ein G-Raum. Eine Operation hat kompakte Wiederkehr, falls es für alle $(x, x') \in X \times X$ offene Umgebungen V_x von x und $V_{x'}$ von x' gibt, so dass

$$\mathcal{G}_{V_x,V_{x'}} := \{g \in G \,|\, (gV_x) \cap V_{x'} \neq \emptyset\} \ \subset \ G \qquad (+)$$

in einer kompakten Teilmenge von G liegt.

Dann ist wegen Satz 1.12.4 die Menge $\overline{\mathcal{G}_{V_x,V_{x'}}}$ kompakt. Jede Operation einer kompakten Gruppe hat insbesondere kompakte Wiederkehr.

Satz 2.6.7.
Sei X Hausdorffsch. Dann ist eine Operation $\rho : G \times X \to X$ mit kompakter Wiederkehr eigentlich.

Beweis.

- Wir nehmen für unseren Beweis überdies an, dass der topologische Raum X das Abzählbarkeitsaxiom (AZ1) aus Definition 1.4.8 erfüllt, d.h. dass jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Für den Beweis in der allgemeinen Situation verweisen wir auf T. tom Dieck, Transformationsgruppen, Satz 3.21.

- Wegen Satz 1.4.12.1 ist es unter der Annahme von (AZ1) möglich, Abgeschlossenheit durch Betrachtung von Folgen zu zeigen. Sei $A \subset G \times X$ abgeschlossen. Zu zeigen ist, dass $\theta(A)$ in $X \times X$ abgeschlossen ist. Es sei $(x_i, x_i') \in \theta(A)$ eine Folge, die in $X \times X$ konvergiert, $\lim(x_i, x_i') =: (x, x')$.

  Weil $(x_i, x_i') \in \theta(A)$, finde Urbilder $(g_i, x_i) \in A$ mit $x_i' = g_i x_i$. Wähle Umgebungen V_x und $V_{x'}$ wie in (+). Wir können annehmen, dass $x_i \in V_x$ und $x_i' \in V_{x'}$ für alle i – denn wegen der Konvergenz liegen sicher fast alle Folgenglieder in diesen Umgebungen. Setze $K := \overline{\mathcal{G}_{V_x, V_{x'}}}$, dann liegen alle g_i in der kompakten Menge K. Daher gibt es eine konvergente Teilfolge $g := \lim_i g_{j_i}$. Weil A abgeschlossen ist, gilt $(g, x) \in A$. Wegen der Stetigkeit von θ ist $\theta(g, x) = (x, x')$. Also ist $(x, x') \in \theta(A)$ und $\theta(A)$ somit abgeschlossen.

- Es ist
  $$\theta^{-1}(x, x') = \{g \in G \,|\, gx = x'\} \times \{x\} \ .$$
  Da X Hausdorffsch ist, ist der Punkt (x, x') in $X \times X$ abgeschlossen. Da θ stetig ist, ist $\theta^{-1}(x, x')$ abgeschlossen und wegen der kompakten Wiederkehr in einer kompakten Menge enthalten und daher nach Satz 1.12.4.2 kompakt.

□

Beispiel 2.6.8.
Die Operation der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n)$ auf $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
$$\mathrm{O}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$$
ist transitiv, aber nicht frei. Da die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ kompakt ist, hat die Operation kompakte Wiederkehr; da $\mathbb{S}^{n-1}$ Hausdorffsch ist, ist die Operation nach Satz 2.6.7 eigentlich.

Betrachte $e_n := (0, 0, \dots 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann ist $\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(n)}(e_n) = \mathrm{O}(n-1) \subset \mathrm{O}(n)$. Nach Satz 2.6.5.3 haben wir einen Homöomorphismus
$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1} \ .$$
Sphären sind also homogene Räume.

Wir brauchen für spätere Zwecke die folgenden stärkeren Annahmen an eine Wirkung:

Bemerkung 2.6.9.
Ist G eine diskrete Gruppe und hat die Wirkung $\rho : G \times X \to X$ kompakte Wiederkehr, dann ist $\overline{\mathcal{G}_{V_x, V_{x'}}} \subset G$ kompakt und daher endlich.

Definition 2.6.10
Sei G diskret und X ein G-Raum. Dann heißt die Operation eigentlich diskontinuierlich, falls es für alle $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, so dass aus $g_1 U \cap g_2 U \neq \emptyset$ folgt $g_1 = g_2$.

Bemerkungen 2.6.11.
1. Es genügt zu fordern, dass es für jedes $x \in X$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G$ mit $g \neq 1$.

   Denn $g_1 U \cap g_2 U \neq \emptyset$ gilt genau dann, wenn es $x, x' \in U$ gibt mit $g_1 x = g_2 x'$, was aber genau dann der Fall ist, wenn $x = g_1^{-1} g_2 x'$. Genau dann ist aber $U \cap g_1^{-1} g_2 U \neq \emptyset$.

2. Eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen sind insbesondere frei.

2.7 Faserbündel und Überlagerungen

Betrachtung 2.7.1.

- Die Grundidee ist, eine stetige surjektive Abbildung $p : E \to B$ als stetige Familie der Urbilder $(p^{-1}(b))_{b\in B}$ zu verstehen. Hierbei heißt E der Totalraum von p, B die Basis und $p^{-1}(b)$ die Faser von p über $b \in B$.

- So ist die Idee aber noch zu allgemein, um nützlich zu sein. Zum Beispiel sehen für die stetige surjektive Abbildung
$$\begin{array}{rcl} p_2 : \mathbb{D}^2 & \to & [-1,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$
die Fasern verschieden aus: über $b = \pm 1$ hat man einen Punkt, sonst abgeschlossene Intervalle.

Definition 2.7.2

1. *Sei $p : E \to B$ eine stetige Abbildung und $U \subset B$ offen. Eine lokale Trivialisierung mit typischer Faser F über U ist ein Homöomorphismus*
$$h : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$$
mit $pr_1 \circ h(z) = p(z)$ für alle $z \in p^{-1}(U)$, als Diagramm
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim", "h"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

2. *Die Abbildung $E \xrightarrow{p} B$ heißt lokal trivial mit typischer Faser F, falls jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U mit lokaler Trivialisierung mit typischer Faser F besitzt. Eine solche Abbildung heißt auch Faserbündel.*

Eine lokal triviale Abbildung ist stets surjektiv. Denn jeder Punkt $b \in B$ hat eine Umgebung U, so dass $p|_{p^{-1}(U)}$ ist eine Surjektion sogar auf die ganze Umgebung U ist.

Definition 2.7.3

Eine lokal triviale Abbildung mit diskreter *typischer Faser F heißt Überlagerung.*

Beispiele 2.7.4.

1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & \exp(2\pi \mathrm{i} t) \end{array}$$
ist eine Überlagerung mit typischer Faser $\mathbb{Z}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$
eine Überlagerung, deren typische Faser n Elemente hat.

3. Die Abbildung $pr_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ ist ein Faserbündel mit typischer Faser $\mathbb{R}$, aber keine Überlagerung, da die Faser $\mathbb{R}$ nicht diskret ist.

4. Das Möbiussche Band ist ein Faserbündel über $\mathbb{S}^1$ mit typischer Faser $I = [0, 1]$.

Definition 2.7.5

1. *Sind $X_1 \xrightarrow{p_1} X$ und $X_2 \xrightarrow{p_2} X$ Räume mit einer Abbildung nach X, so heißt eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung über X, falls $p_2 \circ f = p_1$ gilt, also*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2. *Zwei Räume $(X_1 \xrightarrow{p_1} X)$ und $(X_2 \xrightarrow{p_2} X)$ über X heißen äquivalent, falls es einen Homöomorphismus $f : X_1 \to X_2$ über X gibt.*

3. *Zwei Überlagerungen X_1, X_2 bzw. zwei Faserbündel heißen äquivalent, falls es einen Homöomorphismus f über X von X_1 nach X_2 gibt. Dann bildet f jede Faser $p_1^{-1}(x)$ bijektiv auf die Faser $p_2^{-1}(x)$ ab.*

4. *Ein Faserbündel $E \to B$ mit Faser F heißt trivial, falls es äquivalent zum trivialen Faserbündel $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ ist.*

Beispiele 2.7.6.

1. Das Faserbündel $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist trivial.

2. Das durch das Möbiussche Band gegebene Faserbündel ist nicht trivial.

Betrachtung 2.7.7.
Im Falle einer Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, also einer lokal-trivialen Abbildung mit diskreter typischer Faser F, ist $p^{-1}(U) \cong U \times F \cong \sqcup_{y \in F} U \times \{y\}$. Die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ heißen Blätter. Die Einschränkung von p auf ein Blatt ist ein Homöomorphismus. Man sagt auch, p ist ein lokaler Homöomorphismus.

Definition 2.7.8

1. *Ist $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung mit typischer Faser F, so heißt $|F|$ die Blätterzahl von p.*

2. *Ist $|F| < \infty$, so heißt die Überlagerung $|F|$-blättrig.*

Bemerkung 2.7.9.
Sind $\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X$ und $\tilde{X}_2 \xrightarrow{p_2} X$ äquivalente Überlagerungen, so stimmt ihre Blätterzahl überein.

Beispiele 2.7.10.

1. Die Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ aus Beispiel 2.7.4.1 ist unendlich-blättrig.

2. Die Überlagerung $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ aus Beispiel 2.7.4.2 mit $p(z) = z^n$, mit $n \in \mathbb{N}$, ist n-blättrig.

Beispiele für Überlagerungen erhalten wir durch Gruppenoperationen.

Satz 2.7.11.
Sei G eine diskrete Gruppe und $\tilde{X}$ ein G-Raum. Operiert G eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$, vgl. Definition 2.6.10, so ist die kanonische Projektion $p : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ eine Überlagerung mit typischer Faser G. Insbesondere ist p $|G|$-blättrig, falls $|G| < \infty$.

Zum Beispiel operiert die Gruppe $\mathbb{Z}/2$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^n$, wobei der Erzeuger durch die Antipodenabbildung operiert. Daher ist

$$\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$$

eine zweiblättrige Überlagerung.

Beweis.
Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Weil die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist, können wir $\tilde{U} \in \mathcal{U}(\tilde{x})$ so wählen, dass $\tilde{U} \cap g\tilde{U} \neq \emptyset$ impliziert, dass $g = 1$ ist. Es ist dann $U := p\tilde{U} \in \mathcal{U}([\tilde{x}])$ eine Umgebung von $[\tilde{x}] := p\tilde{x} \in \tilde{X}/G$. Wir finden Homöomorphismen

$$p^{-1}(p\tilde{U}) = \cup_{g\in G} g\tilde{U} \cong \sqcup_{g\in G} g\tilde{U} \cong U \times G \ .$$

Hierbei haben wir erst ausgenutzt, dass $g\tilde{U} \cap g'\tilde{U} = \emptyset$ für $g \neq g'$ gilt, so dass die Vereinigung disjunkt ist. Da L_g ein Homöomorphismus ist, gilt $g\tilde{U} \cong \tilde{U}$. Im letzten Schritt wurde des weiteren benutzt, dass die Gruppe G mit der diskreten Topologie versehen ist. □

Ein Ziel der Überlagerungstheorie ist es, zu verstehen, welche Überlagerungen von dieser Form sind. Dazu brauchen wir Gruppen; deshalb müssen wir untersuchen, wie sich Fundamentalgruppen unter Überlagerungen verhalten.

Definition 2.7.12
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine Abbildung. Dann heißt eine Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ eine <u>Hochhebung</u> von f, wenn $p \circ \tilde{f} = f$ gilt. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Wir haben schon in Kapitel 2.3 für die Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ aus Beispiel 2.7.4.1 Hochhebungen von Wegen $w : I \to \mathbb{S}^1$ zu Wegen $\tilde{w} : I \to \mathbb{R}$ betrachtet. Wir beweisen nun ein Eindeutigkeitsresultat für Hochhebungen:

Lemma 2.7.13 (Eindeutigkeit von Hochhebungen)**.**
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung und Y ein *zusammenhängender* Raum. Stimmen zwei Hochhebungen $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ von $f : Y \to X$ in einem Punkt überein, so sind sie gleich, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Beweis.
Sei $y \in Y$ beliebig und $U \in \mathcal{U}(p\tilde{f}_1(y))$ eine trivialisierende Umgebung von $p\tilde{f}_1(y) = p\tilde{f}_2(y) = f(y) \in X$. Dann ist

$$p^{-1}U \cong U \times F \cong \sqcup_{z\in F} U \times \{z\} \ .$$

Sei $U_1 \subset p^{-1}U$ das Blatt, das $\tilde{f}_1(y)$ enthält und $U_2 \subset p^{-1}U$ das Blatt, das $\tilde{f}_2(y)$ enthält. Ferner betrachte eine Umgebung von y in Y:

$$V := \tilde{f}_1^{-1}(U_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}(y) \ .$$

Fall 1: Es gilt $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$. Dann ist $U_1 = U_2$ und, weil die Faser diskret ist, $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ für alle $z \in V$. Daher ist die Menge

$$W := \{z \in Y \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\} \subset Y \quad \text{offen.}$$

Fall 2: Es gilt $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$. Dann ist $U_1 \neq U_2$ und $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$ für alle $z \in V$. Daher ist auch die Menge

$$W' := \{z \in Y \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\} \subset Y \quad \text{offen.}$$

Damit ist Y als disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen geschrieben. Nach Voraussetzung ist $W \neq \emptyset$; da Y zusammenhängend ist, muss $W' = \emptyset$ gelten. □

Wir wollen nun Wege in X zu Wegen in $\tilde{X}$ mit vorgegebenen Anfangspunkt $\tilde{x} \in X$ heben.

Satz 2.7.14 (Eindeutige Hochhebbarkeit von Wegen)**.**
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung. Zu jedem Weg $w : I \to X$ und jedem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p\tilde{x} = w(0)$ gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{w}$ von w mit Anfangspunkt $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$.

Wir bemerken, dass die Hochhebung einer geschlossenen Kurve nicht unbedingt geschlossen ist. Dies hatten wir schon bei der Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ in Kapitel 2.3 gesehen.

Beweis.

- Die Eindeutigkeit einer Hochhebung folgt aus dem vorangehenden Lemma 2.7.13, weil das Intervall I zusammenhängend ist.

- Um die Existenz einer Hochhebung zu zeigen, wählen wir eine Lebesgue-Zahl $1/N$, so dass $w([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$ immer in einer trivialisierenden Menge liegt, $w([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]) \subset U_i$ mit Trivialisierungen:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}U_i \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

  Es sei $\tilde{U}_1$ das Blatt über U_1, das den gewählten Punkt $\tilde{x}$ enthält, also $\tilde{x} \in \tilde{U}_1$. Setze $\tilde{w}_1 := (p|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ w$ auf $[0, \frac{1}{N}]$. Fahre dann für $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$ so fort mit dem Blatt $\tilde{U}_2$ über U_2, das $\tilde{w}(\frac{1}{N})$ enthält. Man beachte, dass die Einschränkung von p auf ein Blatt $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U_i$ ein Homöomorphismus ist. Die Zusammensetzung der Wege $\tilde{w}_i$ erfüllt dann alle Bedingungen.

□

Wir müssen auch Homotopien, also durch I parametrisierte Familien von Abbildungen heben können.

Definition 2.7.15

1. *Eine Abbildung $p : E \to B$ hat die* Homotopiehochhebungseigenschaft *für einen Raum Y, falls es zu jeder Abbildung*

$$h : Y \times I \to B$$

und jeder Abbildung $g : Y \to E$ mit $p \circ g = h_0$ eine Abbildung $H : Y \times I \to E$ mit $p \circ H = h$ gibt, so dass $H(y,0) = g(y)$ für alle $y \in Y$ gilt. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

2. *Eine Abbildung $p : E \to B$ heißt Faserung, falls sie die Homotopiehochhebungseigenschaft für alle Räume Y hat.*

Satz 2.7.16.
Eine Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ ist eine Faserung, hat also die Homotopiehochhebungseigenschaft für alle Räume Y.

Beweis.

- Zu Abkürzung nennen wir eine Teilmenge $U \subset X$ zulässig, wenn U eine $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ trivialisierende offene Menge ist.

  Für einen beliebigen Punkt $(y,t) \in Y \times I$ hat der Punkt $h(y,t) \in X$ eine zulässige Umgebung $U(y,t)$ in X.

  Weil h stetig ist, finden wir nun eine offene Umgebung $W(y,t)$ von $y \in Y$ und ein offenes Intervall $I(y,t) \subset I$ um $t \in I$, so dass

  $$h(W(y,t) \times I(y,t)) \subset U(y,t) \ .$$

  Da I kompakt ist, können wir für festes $y \in Y$ das Intervall durch endlich viele Intervalle der Form $I(y,t)$ überdecken,

  $$I(y,t_1) \cup \ldots I(y,t_m) = I \qquad (*) \ .$$

  Betrachte die offene Teilmenge von Y

  $$V_y := \cap_{i=1}^m W(y,t_i) \ .$$

  Wenn nun $\frac{1}{N}$ eine Lebesguezahl für die Zerlegung $(*)$ von I ist, so liegt jedes der Bilder $h(V_y \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$ in einer zulässigen offenen Teilmenge von X.

- Wir suchen nun, immer noch für festgehaltenes $y \in Y$, Abbildungen

  $$H_{y,i} : \quad V_y \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \to \tilde{X}$$

  mit $p \circ H_{y,i} = h|_{V_y \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]}$, die zusätzlich den Bedingungen

  $$H_{y,i-1}(z, \frac{i-1}{N}) = H_{y,i}(z, \frac{i-1}{N}) \quad \text{und} \quad H_{y,0}(z,0) = g(z)$$

  für alle $z \in V_y$ gehorchen.

- Es gibt eine zulässige Menge $U \subset X$ mit $h(V_y \times [0, \frac{1}{N}]) \subset U$; ferner ist $p^{-1}(U) \cong U \times F \cong \sqcup_{j \in F} U \times \{j\}$. Setze $U_j := U \times \{j\}$ mit $j \in F$. Betrachte
$$g^{-1}(U_j) \cap V_y =: O_j \ ;$$
weil g stetig ist, sind dies offene Mengen in Y. Es ist $V_y := \cup_{j \in F} O_j$ und für $j \neq j'$ ist $O_j \cap O_{j'} = \emptyset$.
Definiere eine Abbildung
$$H_{y,0} := O_j \times [0, \frac{1}{N}] \to U_j$$
durch
$$p \circ H_{y,0}|_{O_j \times [0,\frac{1}{N}]} = h_{O_j \times [0,\frac{1}{N}]} \quad \text{und} \quad H_{y,0}(z,0) = g(z) \ .$$
Dies geht, weil $p|_{U_j}$ ein Homöomorphismus ist. Da die offenen Mengen O_j die Menge V_y disjunkt überdecken, ist somit $H_{y,0}$ auf $V_y \times [0, \frac{1}{N}]$ festgelegt.

- Wir fahren induktiv fort: ist $H_{y,i-1}$ definiert, so definieren wir $H_{y,i}$ anhand der Startwerte $H_{y,i-1}(z, \frac{i-1}{N})$. Für jedes $y \in Y$ erhalten wir so eine Funktion
$$H_y : \quad V_y \times I \to \tilde{X} \ .$$
Wir behaupten, dass dies eine wohldefinierte Funktion gibt: ist $z \in V_y \cap V_x$ für $x, y \in Y$, $x \neq y$, so gilt für alle $t \in I$
$$pH_y(z,t) = pH_x(z,t) = h(z,t) \ .$$
Da auch $H_x(z,0) = g(z) = H_y(z,0)$ gilt, folgt aus Lemma 2.7.13, angewandt auf das Intervall I, dass $H_y(z,-) = H_x(z,-)$ gilt. Wir haben die gesuchte Hochhebung der Homotopie h gefunden.

□

Korollar 2.7.17.
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung.

1. Seien $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1 : I \to \tilde{X}$ Wege mit gleichem Anfangspunkt, $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0) =: \tilde{x}$. Dann gilt $\tilde{w}_0 \simeq \tilde{w}_1$ relativ $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$ genau dann, wenn $p\tilde{w}_0 \simeq p\tilde{w}_1$ relativ $p\tilde{x}$ in X gilt.

2. Der Gruppenhomomorphismus
$$p_* : \quad \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$
ist injektiv.

Beweis.

- Die Richtung, die die Homotopie $\tilde{w}_0 \simeq \tilde{w}_1$ in $\tilde{X}$ relativ zu $\tilde{x}$ voraussetzt, ist klar, weil p als stetige Abbildung Homotopien auf Homotopien abbildet.

- Es gelte $p\tilde{w}_0 \simeq_{p\tilde{x}_0} p\tilde{w}_1$. Es gibt also eine Homotopie in X

$$h : I \times I \to X$$

mit $h(s,0) = p\tilde{w}_0(s)$, $h(s,1) = p\tilde{w}_1(s)$ für alle $s \in I$ und Anfangspunkt $h(0,t) = p\tilde{x}$ für alle $t \in I$. Finde nun wegen Satz 2.7.16 eine Hochhebung H in

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{w}_0"] \arrow[d, "\iota_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & X \end{tikzcd}$$

Es gilt dann $H_0 = \tilde{w}_0$ und $p \circ H = h$. Da für alle $t \in I$ der Punkt $H(0,t)$ in der Faser von $p\tilde{w}(0) = p\tilde{w}(1)$ ist und diese Faser bei einer Überlagerung diskret ist, gilt $H(0,t) = \tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$ für alle $t \in I$.

Zu zeigen ist $H_1 = \tilde{w}_1$. Wegen

$$pH(s,1) = p\tilde{w}_1(s) = h(s,1)$$

sind die beiden Wege in $\tilde{X}$

$$s \mapsto H(s,1) \quad \text{und} \quad s \mapsto \tilde{w}_1(s)$$

Hochhebungen des Wegs $s \mapsto p\tilde{w}_1(s)$ in X, die im Anfangspunkt übereinstimmen. Nach Lemma 2.7.13 stimmen diese überein, also $H_1 = \tilde{w}_1$. Also ist H eine Homoropie von $\tilde{w}_0$ auf $\tilde{w}_1$ in $\tilde{X}$.

- Die Teil 2. des Satzes folgt unmittelbar aus Teil 1.

□

Betrachtung 2.7.18.
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung mit typischer Faser F.

- Wir bezeichnen mit $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten eines topologischen Raums X. Man beachte, dass dies keine Gruppe ist. Wir wollen aber dennoch ähnliche Struktur wie bei Fundamentalgruppen haben. Die Wahl eines Grundpunkts $x \in X$ gibt ein ausgezeichnetes Element in der Menge $\pi_0(X)$, nämlich die Wegkomponente von x.

- Jede stetige Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ von Räumen induziert eine Abbildung $\pi_0(X) \xrightarrow{\pi_0(f)} \pi_0(Y)$ von Wegkomponenten, da die stetige Abbildug f Punkte in der gleichen Wegkomponente von X auf Punkte in der gleichen Wegkomponente von Y abbildet.

- Wir brauchen Grundpunkte in den topologischen Räumen $\tilde{X}, X$ und F. Wir wählen ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$ als Grundpunkt von $\tilde{X}$ und dann $p\tilde{x}$ als Grundpunkt von X.

  Wir wählen ferner eine Identifikation $\iota : F \xrightarrow{\sim} p^{-1}(p\tilde{x}) \subset \tilde{X}$ von F mit der Faser $p^{-1}(p\tilde{x})$ des Grundpunkts $p\tilde{x} \in X$. Dann ist $f := \iota^{-1}(\tilde{x})$ ein Grundpunkt der typischen Faser F.

- Ziel ist eine Sequenz von Abbildungen:

$$1 \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\pi_1(p)=p_*} \pi_1(X, p\tilde{x}) \xrightarrow{d} \pi_0(F) \xrightarrow{\pi_0(\iota)} \pi_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(X) \to 1 \quad (*)$$

Hierbei ist p_* ein Gruppenhomomorphismus; die anderen Abbildungen sollen Abbildungen von Mengen mit Grundpunkt sein, also Grundpunkte auf Grundpunkte abbilden. Dies ist für $\pi_0(\iota)$ und $\pi_0(p)$ der Fall, wegen unserer Wahl der Grundpunkte.

- Wir definieren d: sei der Weg w ein Repräsentant einer Klasse in $\pi_1(X, p\tilde{x})$ und $\tilde{w}$ die nach Satz 2.7.14 eindeutige Hochhebung des Weges w mit Anfangspunkt $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$. Es ist $p\tilde{w}(1) = w(1) = p\tilde{x}$, also der Endpunkt $\tilde{w}(1)$ in der Faser über $p\tilde{x}$, die wir über ι mit F identifiziert hatten. Wir setzen $d([w]) = \iota^{-1}(\tilde{w}(1)) \in F$. Der Grundpunkt in $\pi_1(X, p\tilde{x})$ hat einen nullhomotopen Weg als Repräsentanten, der zu einem nullhomotopen Weg hochgehoben wird. Da die Faser diskret ist, folgt $\tilde{w}(1) = \tilde{x}$. Somit geht w unter d auf den Grundpunkt $f \in F$.

Satz 2.7.19.
Diese Sequenz (*) ist exakt. Für Mengen mit Grundpunkt heißt dies, dass das Urbild des Grundpunkts das Bild der vorhergehenden Abbildung ist.

1. Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p)$ ist injektiv.
2. Es gilt $\mathrm{Im}\, \pi_1(p) = d^{-1}(f)$ in $\pi_1(X, p\tilde{x})$.
3. Es gilt $\mathrm{Im}\, d = \pi_0(\iota)^{-1}(\tilde{x})$ in $\pi_0(F) \cong F$.
4. Es gilt $\mathrm{Im}\, \pi_0(\iota) = \pi_0(p)^{-1}(p\tilde{x})$ in $\pi_0(\tilde{X})$.
5. Die Abbildung $\pi_0(p)$ ist surjektiv.

Beweis.

- Aussage 1. ist Korollar 2.7.17.2. Aussage 5. folgt, weil bei einer Überlagerung wie bei jedem Faserbündel p surjektiv ist.

- Aussage 2:
  Sei $[w] \in \mathrm{Im}\, \pi_1(p)$, d.h. es gibt einen *geschlossenen* Weg $\tilde{w}$ in $\tilde{X}$, der den Weg w in X mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ hebt. Dann ist aber $d([w]) = \iota^{-1}(\tilde{w}(1)) = \iota^{-1}(\tilde{x}) = f \in F$.

  Sei umgekehrt $[w] \in \pi_1(X, p\tilde{x})$ mit $d[w] = f$. Das heißt aber, dass es eine Hochhebung $\tilde{w}$ von w gibt mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$ und $\tilde{w}(1) = \tilde{x}$, also einen geschlossenen Weg mit $[\tilde{w}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Dann gilt aber
  $$[w] = [p \circ \tilde{w}] = \pi_1(p)[\tilde{w}] \ .$$

- Aussage 3:
  Ist $f' \in \mathrm{Im}\, d \subset F$, so gibt es einen Weg $\tilde{w}$ vom Grundpunkt $\tilde{x}$ zu $\iota(f')$. Die Punkte $\tilde{x}$ und $\iota(f')$ liegen daher in der gleichen Zusammenhangskomponente von F, also $\pi_0(\iota)(f) = \tilde{x}$.

  Sei umgekehrt $f' \in F$ mit $\pi_0(\iota)[f'] = [\tilde{x}]$.

  Dann gibt es einen Weg $w : I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$ und $\tilde{w}(1) = \iota(f')$. Dieser Weg ist eine Hochhebung des Wegs $w := p \circ \tilde{w}$ in X. Der Endpunkt $\iota(f')$ des Wegs $\tilde{w}$ in $\tilde{X}$ liegt in der Faser über $\tilde{x}$. Also ist der Weg $w = p\tilde{w}$ in X geschlossen. Es gilt für diesen Weg $d[p \circ \tilde{w}] = \iota(f')$.

- Aussage 4:
  Ist $\tilde{y} \in \mathrm{Im}\, \iota \subset \tilde{X}$, so liegt $\tilde{y}$ über $p\tilde{x}$. Daher gilt sogar $p\tilde{y} = p\tilde{x}$.

  Sei umgekehrt $\tilde{y} \in \tilde{X}$ ein Repräsentant von $[\tilde{y}] \in \pi_0(p)^{-1}(p\tilde{x})$. D.h. es gilt $[p\tilde{y}] = [p\tilde{x}]$ in $\pi_0(X)$; daher gibt es einen Weg $w : I \to X$ von $p\tilde{y}$ nach $p\tilde{x}$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{\tilde{y}\} \arrow[r, "w_0"] \arrow[d, "\iota_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, "w"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & X
\end{tikzcd}$$

finde mit der Homotopiehochhebungseigenschaft von p einen Weg H in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $H(0) = \tilde{y}$ und Endpunkt $H(1)$ in der Faser über $p\tilde{x}$. Also ist $\tilde{y}$ in der gleichen Wegkomponente von $\tilde{X}$ wie ein Punkt in der Faser von $p\tilde{x}$ und somit $\tilde{y} \in \operatorname{Im} \pi_0(\iota) = \operatorname{Im} \iota$.

□

Korollar 2.7.20.
Für den projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ mit $n \geq 2$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

Beweis.
Betrachte die zweiblättrige Überlagerung $\mathbb{S}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$, vgl. die Bemerkung nach Satz 2.7.11. In der exakten Sequenz aus Satz 2.7.19 gilt nun

$$1 \to \pi_1(\mathbb{S}^n, 1) = \{1\} \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathbb{R}P^n, [1]) \xrightarrow{d} \pi_0(F) \to \pi_0(\mathbb{S}^n) = \{1\} \ .$$

Es ist das Bild von d somit ganz $\pi_0(F)$, nur $1 \in \pi_1(\mathbb{R}P^n, [1])$ geht auf $\iota^{-1}(\tilde{x})$. Wählt man den zu $1 \in \mathbb{S}^n$ antipodalen Punkt als Grundpunkt, so sieht man, dass

$$|\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1])| = |\pi_0(F)| = |F| = 2 \ .$$

Da es bis auf Isomorphie nur eine Gruppe mit zwei Elementen gibt, ist die Behauptung gezeigt.
□

Allgemeiner gilt:

Satz 2.7.21.
Sei G eine diskrete Gruppe und operiere G eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. Dann ist nach nach Satz 2.7.11 $\tilde{X} \xrightarrow{p} \tilde{X}/G$ eine Überlagerung mit typischer Faser G.

Man beachte, dass die typische Faser in dieser Situation zusätzlich eine Gruppenstruktur trägt; wir wählen ι so, dass der Grundpunkt von F das neutrale Element ist. Dann ist d ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, p\tilde{x}) \xrightarrow{d} G$.

Beweis.
Seien $w_i : I \to X$ für $i = 1, 2$ geschlossene Wege in X mit $w_i(0) = w_i(1) = p\tilde{x} =: x$. Seien $\tilde{w}_i : I \to \tilde{X}$ Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt $\tilde{w}_i(0) = \tilde{x}$. Finde eindeutig bestimmte Elemente $g_i \in G$ mit $g_i\tilde{x} = \tilde{w}_i(1)$. Dann ist $d[w_i] = g_i$. Der Weg $g_1\tilde{w}_2 \star \tilde{w}_1$ läuft von $\tilde{x}$ über $g_1\tilde{x}$ zu $g_1 g_2\tilde{x}$ und hebt den Weg $w_2 \star w_1$ in X mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ zu einem Weg in $\tilde{X}$ hoch. Daher ist

$$d(w_2 \star w_1) = g_1\tilde{w}_2 \star \tilde{w}_1(1) = g_1 g_2 \tilde{x} \ .$$

□

Lemma 2.7.22.
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung. Sei $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und seien $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1$ Wege in $\tilde{X}$ mit gleichem Anfangspunkt $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0) =: \tilde{x}$.

Dann haben die Wege gleichen Endpunkt, $\tilde{w}_0(1) = \tilde{w}_1(1)$, genau dann, wenn ihre Bilder $w_1 := p\tilde{w}_1$ und $w_2 := p\tilde{w}_2$ in X gleiche Endpunkte haben, $w_0(1) = w_1(1)$, und für die Klasse des geschlossenen Wegs $\overline{w}_1 \star w_0$ in X gilt $[\overline{w}_1 \star w_0] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Beweis.

- Es ist klar, dass die erste Aussage, $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$, die zweite impliziert.

- Es gelte die zweite Aussage. Finde daher einen geschlossenen Weg $\tilde{w}$ in $\tilde{X}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$ und
$$\pi_1(p)[\tilde{w}] = [\overline{w}_1 \star w_0] \ .$$

Nach Satz 2.7.19 ist $\operatorname{Im} \pi_1(p) = \ker(d)$, also ist $d[\overline{w}_1 \star w_0] = \tilde{x}$. Es ist

$$\begin{array}{ll} \tilde{u}_0(t) = \tilde{w}(\frac{1}{2}t) & \text{Hochhebung von } w_0 \\ \tilde{u}_1(t) = \tilde{w}(1 - \frac{1}{2}t) & \text{Hochhebung von } w_1 \end{array}$$

Beide Hochhebungen sind Wege von $\tilde{x}$ nach $\tilde{w}(\frac{1}{2})$. Da die Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt nach Lemma 2.7.13 eindeutig sind, ist $\tilde{u}_0 = \tilde{w}_0$ und $\tilde{u}_1 = \tilde{w}_1$. Damit sind auch die Endpunkte von $\tilde{w}_0$ und $\tilde{w}_1$ gleich, nämlich gleich $\tilde{w}(\frac{1}{2})$. □

Mit Hilfe dieses Lemmas untersuchen wir für eine Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ die Existenz von Hochhebungen allgemeinerer Abbildungen $f : Y \to X$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Dazu müssen wir etwas mehr Eigenschaften von Y voraussetzen.

Satz 2.7.23.
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung und Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $f : Y \to X$ stetig. Wähle $y_0 \in Y$ und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, so dass $f(y_0) = p\tilde{x}_0$ gilt.

Dann gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ von f mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, falls die Bedingung

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \qquad (*)$$

gilt.

Beweis.

- Die Bedingung $(*)$ ist notwendig: falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt wegen $f = p \circ \tilde{f}$
$$f_*\pi_1(Y, y_0) = p_*(\tilde{f}_*\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \ .$$

- Gilt umgekehrt $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, so ist eine Hochhebung $\tilde{f}$ von f zu konstruieren. Sei $y \in Y$ beliebig; da Y wegzusammenhängend ist, finde einen Weg w von y_0 nach y. Der Weg $v := f \circ w : I \to X$ hat den Anfangspunkt $f(y_0) = p\tilde{x}_0$. Sei $\tilde{v}$ eine Hochhebung von v zu einem Weg in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{v}(0) = \tilde{x}_0$. Setze
$$\tilde{f}(y) := \tilde{v}(1) \ .$$
Es ist zu zeigen, dass $\tilde{f}$ wohldefiniert und stetig ist.

- Zur Wohldefiniertheit:
sei w' ein anderer Weg von y_0 nach y. Wir betrachten wiederum die Hochhebung des Wegs $v' := f \circ w'$ in X zu einem Weg $\tilde{v}'$ in $\tilde{X}$. Es gilt

$$p\tilde{v}(1) = f \circ w(1) = f(y) = f \circ w'(1) = p \circ \tilde{v}'(1) \ .$$

Außerdem ist wegen Bedingung $(*)$

$$[\overline{p\tilde{v}'} \star p\tilde{v}] = [(f \circ \overline{w'}) \star (f \circ w)] = f_*[\overline{w'} \star w] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \ .$$

Aus Lemma 2.7.22 folgt nun, dass $\tilde{v}(1) = \tilde{v}'(1)$ gilt, also ist $\tilde{f}$ wohldefiniert.

- Stetigkeit von $\tilde{f}$:
Sei $\tilde{U}$ eine beliebige offene Umgebung von $\tilde{f}(y)$ in $\tilde{X}$. Wir wollen eine Umgebung $W \in \mathcal{U}(y)$ finden mit $\tilde{f}(W) \subset \tilde{U}$, um die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu zeigen. Es schadet nichts, wenn wir $\tilde{U}$ so verkleinern, dass $p(\tilde{U}) =: U$ eine trivialisierende Umgebung in X ist, d.h. $p|_{\tilde{U}}$ ist ein Homöomorphismus auf U.

  Weil Y lokal wegzusammenhängend und f stetig ist, finde eine wegzusammenhängende Umgebung $W \in \mathcal{U}(y)$ mit $f(W) \subset \tilde{U}$. Wir wollen zeigen, dass dann $\tilde{f}(W) \subset \tilde{U}$ gilt; dann ist $\tilde{f}$ stetig.

  Sei dazu $y' \in W$ beliebig und w' ein Weg in W von y zu y'; ein solcher Weg existiert, weil W wegzusammenhängend ist. Der Weg $w' \star w$ ist dann ein Weg in W von y_0 über y zu y'. Setze

$$v' := p|_{\tilde{U}}^{-1} f w' \star \tilde{v} \ ,$$

  wobei $\tilde{v}$ die alte Hochhebung von $v = fw$ ist. Dies ist ein Weg mit $p \circ v' = (f \circ w') \star (f \circ w)$ und $v'(0) = \tilde{x} \in V$ und $v'(1) = p^{-1} f w'(1) = \tilde{f}(y') \in \tilde{U}$.

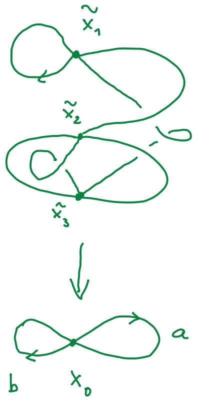
□

2.8 Äquivalenz von Überlagerungen

Wir hatten bereits in Korollar 2.7.17 gesehen, dass für eine Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ der Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, p\tilde{x})$ injektiv ist.

Definition 2.8.1
Die Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ von $\pi_1(X, p\tilde{x})$ heißt <u>charakterisierende Untergruppe</u> *der Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$.*

Beispiel 2.8.2.
Die charakterisierende Untergruppe hängt stark von der Wahl des Grundpunkts $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ab. Zum Beispiel ist bei der Überlagerung



$[b] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, aber $[b] \notin p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$.

Wir können aber in gewissen Situationen die Abhängigkeit vom Grundpunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ kontrollieren:

Satz 2.8.3.
Sei w ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_1$ zu $\tilde{x}_2$, wobei beide Punkte in der gleichen Faser liegen, $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Setze $\alpha := [p \circ w] \in \pi_1(X, p\tilde{x}_1)$. Dann ist

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \alpha \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2) \cdot \alpha^{-1}\,.$$

Ist also der Totalraum $\tilde{X}$ der Überlagerung wegzusammenhängend, so sind die charakterisierenden Untergruppen konjugiert.

Beweis.
Wir hatten in Betrachtung 2.2.11 gesehen, dass für die Fundamentalgruppe von $\tilde{X}$ gilt

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [\tilde{w}]\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)[\tilde{w}]^{-1}$$

gilt. Wenn man darauf p_* anwendet, folgt sofort die Aussage. □

Satz 2.8.4.
Mit den gleichen Bezeichnungen wie im vorangegangenen Satz 2.8.3 gilt: Sei U eine Untergruppe von $\pi_1(X, p\tilde{x})$, die zu einer charakterisierenden Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ konjugiert ist. Dann gibt es einen Punkt in der gleichen Faser, $\tilde{x}' \in p^{-1}(p\tilde{x})$, so dass $U = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ gilt.

Beweis.
Es gelte

$$U = \alpha^{-1} \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cdot \alpha$$

mit $\alpha := [w] \in \pi_1(X, p\tilde{x})$. Sei nun $\tilde{w}$ eine Hochhebung des geschlossenen Wegs w in X mit Startpunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Setze $\tilde{x}' := \tilde{w}(1)$. Dann ist

$$U = \underbrace{p_*[\tilde{w}]^{-1}}_{\alpha^{-1}} \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cdot \underbrace{p_*[\tilde{w}]}_{\alpha} = p_*\left([\tilde{w}]^{-1} \star \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \star [\tilde{w}]\right) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))\ .$$

□

Wir definieren daher:

Definition 2.8.5
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung, für die $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist. Für $x \in X$ nennen wir die Konjugationsklasse von Untergruppen von $\pi_1(X,x)$

$$C(\tilde{X},p) =: \{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \,|\, \tilde{x} \in p^{-1}(x)\}$$

die <u>charakterisierende Konjugationsklasse</u> der Überlagerung p.

Diese verdient wegen des folgenden Satzes wirklich ihren Namen:

Satz 2.8.6.
Zwei wegzusammenhängende Überlagerungen $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ und $\tilde{X}' \xrightarrow{p'} X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind genau dann äquivalent, wenn ihre charakterisierenden Konjugationsklassen gleich sind, $C(\tilde{X},p) = C(\tilde{X}',p')$.

Beweis.

- Zunächst sei ein Homöomorphismus $\tilde{X} \xrightarrow{f} \tilde{X}'$ über X geben,

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\sim", "f"'] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

  Dann ist wegen $p = p' \circ f$

$$p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})) = p'_* \circ f_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = p'_*(\pi_1(\tilde{X}',f\tilde{x})) \ .$$

  Wegen Satz 2.8.3 sind dann die Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$ und $p'_*(\pi_1(\tilde{X}',\tilde{x}')$ für jede Wahl der Grundpunkte konjugiert.

- Seien für zwei Überlagerungen die charakterisierenden Konjugationsklassen gleich. Wähle $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ fest. Dann ist $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$ eine Untergruppe in der Konjugationsklasse $C(\tilde{X},p) = C(\tilde{X}',p')$. Für die Überlagerung p' finden wir nach Satz 2.8.4 einen Punkt $\tilde{x}' \in (p')^{-1}(x)$, so dass gilt

$$p(\tilde{x}) = p'(\tilde{x}') \quad \text{und} \quad p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = p_*\pi_1(\tilde{X}',\tilde{x}') \ .$$

  Mit X sind auch die Totalräume $\tilde{X}$ und $\tilde{X}'$ lokal wegzusammenhängend. Weil $\tilde{X}$ und $\tilde{X}'$ lokal wegzusammenhängend sind, gibt es nach Satz 2.7.23 Abbildungen

$$\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}' \quad \text{und} \quad \tilde{p}' : \tilde{X}' \to \tilde{X} \ ,$$

  so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}' \arrow[d, "p'"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{X}' \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}'"] \arrow[r, "p'"] & X \end{tikzcd}$$

  kommutieren und $\tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ und $\tilde{p}'(\tilde{x}') = \tilde{x}$ gilt.

  Die Abbildung $\tilde{p}' \circ \tilde{p}$ bildet $\tilde{x}$ auf $\tilde{x}$ ab, genau wie $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Aus Lemma 2.7.13 folgt daher $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$; genauso folgt $\tilde{p} \circ \tilde{p}' = \mathrm{id}_{\tilde{X}'}$. Damit sind die Überlagerungen äquivalent.

□

2.9 Die universelle Überlagerung

Definition 2.9.1
Eine wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt <u>*universell*</u>*, wenn der Totalraum $\tilde{X}$ einfach-zusammenhängend ist.*

Satz 2.9.2.
Es sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung und $x \in X$. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ ist universell.

2. Die charakterisierende Konjugationsklasse ist trivial, $C(\tilde{X}, p) = \{1\} \subset \pi_1(X, x)$.

3. Ist $w : I \to X$ ein geschlossener Weg in X mit $w(0) = w(1) = x$ und ist $\tilde{w} : I \to \tilde{X}$ eine Hochhebung von w, so ist $\tilde{w}$ nicht geschlosssen, falls w nicht nullhomotop ist.

Beweis.

1.⇒ 2. Die charakterisierende Konjugationsklasse ist nach Definition

$$C(\tilde{X}, p) = \{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \,|\, \tilde{x} \in p^{-1}(x)\}$$

und $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$, da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

2.⇒ 3. Sei $\tilde{w}$ eine geschlossene Hochhebung von w. Dann ist $[\tilde{w}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$ das neutrale Element und somit auch $p_*[\tilde{w}] = 1 = [w]$, also ist w nullhomotop.

3.⇒ 1. folgt, da p_* nach Korollar 2.7.17.2 injektiv ist.

□

Bemerkungen 2.9.3.

1. Die Wahl von $x \in X$ ist für die Aussagen unerheblich.

2. Ist X lokal wegzusammenhängend und sind $\tilde{X}$ und $\tilde{X}'$ universelle Überlagerungen, so ist $\tilde{X}$ wegen Satz 2.8.6 äquivalent zu $\tilde{X}'$ (aber nicht kanonisch äquivalent). Wir nennen $\tilde{X}$ dann auch *die* universelle Überlagerung von X.

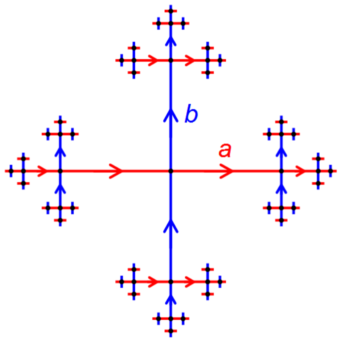
Beispiele 2.9.4.

1. Der Kreis $\mathbb{S}^1$ hat die universelle Überlagerung $\pi = \exp(2\pi \mathrm{i} -) : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

2. Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ hat die universelle Überlagerung $\mathbb{R}^2$.

3. Das Bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ hat die universelle Überlagerung [3]

[3] Quelle der Graphik: Wikipedia



4. Der projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ hat für $n \geq 2$ die Sphäre $\mathbb{S}^n$ als universelle Überlagerung, denn nach Korollar 2.4.6.2 ist $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend. (Für $n = 1$ ist $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{S}^1/\pm \cong \mathbb{S}^1$.)

Wir wollen eine große Klasse von topologischen Räumen finden, die universelle Überlagerungen haben.

Definition 2.9.5
Ein Raum X heißt <u>semi-lokal einfach-zusammenhängend</u>, falls es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, so dass jeder geschlossene Weg in U nullhomotop in X ist.

Bemerkungen 2.9.6.

1. Ein topologischer Raum habe die Eigenschaft, dass es für jeden Punkt eine in X zusammenziehbare Umgebung gibt. Dann ist X semi-lokal einfach-zusammenhängend. Dies gilt zum Beispiel für Mannigfaltigkeiten.

2. Es existiere eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eines topologischen Raums X. Dann hat jede trivialisierende Umgebung eines Punktes $x \in X$ die Eigenschaft aus der Definition. Denn $p|_U$ ist ein Homöomorphismus und $p^{-1}w$ ist in $\tilde{X}$ zusammenziehbar. Das Bild unter p ist dann eine Homotopie in X, die zeigt, dass w in X nullhomotop ist.

Es macht also nur Sinn, nach universellen Überlagerungen für semi-lokal einfach-zusammenhängende Räume zu suchen. Der Bequemlichkeit halber vereinbaren wir:

Definition 2.9.7
Ein Raum X heißt <u>hinreichend zusammenhängend</u>, wenn er wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach-zusammenhängend ist.

Wir können nun die Existenz universeller Überlagerungen für hinreichend zusammenhängende Räume zeigen:

Satz 2.9.8.
Jeder hinreichend zusammenhängende Raum X hat eine universelle Überlagerung.

Beweis.
Die Idee ist, verschiedene Homotopieklassen von Wegen in X in der Überlagerung zu verschiedenen Punkten im Totalraum $\tilde{X}$ der universellen Überlagerung zu machen.

- Wir wählen einen Grundpunkt $x \in X$ und betrachten die Menge

$$\tilde{X} := \{(x', [w]) \text{ mit } x' \in X \text{ und } w : I \to X \text{ mit } w(0) = x, w(1) = x'\}$$

wobei die Homotopieklassen von Wegen in X relativ zu den Endpunkten x und x' zu nehmen sind. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} p: & \tilde{X} & \to & X \\ & (x',[w]) & \mapsto & x' \end{array} .$$

ist eine Surjektion, weil X wegzusammenhängend ist. Wir müssen $\tilde{X}$ so mit einer Topologie versehen, dass p zu einer Überlagerung wird, und dann nachweisen, dass $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = 1$ gilt.

- Für $y \in X$ sei U eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(y)$, die wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Mit $F(y)$ bezeichnen wir die Menge der Homotopieklassen von Wegen vom Grundpunkt x nach y.

  Für $(y',[w]) \in p^{-1}(U)$, also für $y' \in U$, sei $v^y_{y'}$ ein Weg von y' nach y, der in U verläuft. Ein solcher Weg existiert, weil die Umgebung U wegzusammenhängend gewählt wurde. Setze

$$\begin{array}{rccc} h: & p^{-1}(U) & \to & U \times F(y) \\ & (y',[w]) & \mapsto & (y',[v^y_{y'} \star w]) \end{array}$$

  - h ist eine Bijektion. h ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von $v^y_{y'}$, weil jeder geschlossene Weg in U in X nullhomotop ist.
  - Für $\alpha \in F(y)$ setze

$$V(U,\alpha) := h^{-1}(U \times \{\alpha\}) = \{(x',[w]) \text{ mit } x' \in U \text{ und } [v^y_{x'} \star w] = \alpha\} \ .$$

    Es gilt

$$\begin{tikzcd} V(U,\alpha) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p|_{V(U,\alpha)}"'] & & U \times \{\alpha\} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

    Insbesondere ist $p|_{V(U,\alpha)}$ bijektiv. Wir topologisieren $V(U,\alpha)$ so, dass $p|_{V(U,\alpha)}$ ein Homöomorphismus wird.
  - Es ist klar, dass die Familie der Mengen $V(U,\alpha)$ den Raum $\tilde{X}$ überdeckt.
  - Wir betrachten Schnitte:

$$\begin{aligned} V(U,\alpha) \cap V(U',\beta) &= \{(x',[w]) \text{ mit } x' \in U, \alpha = [v^y_{x'} \star w]\} \\ &\cap \{(y',[w']) \text{ mit } y' \in U', \beta = [v^y_{y'} \star w']\} \end{aligned}$$

    Ist $U \cap U' = \emptyset$, so ist der Schnitt $V(U,\alpha) \cap V(U',\beta)$ leer. Ist der Schnitt $U \cap U'$ dagegen nicht leer, so ist $V(U,\alpha) \cap V(U',\beta)$ von der Form $V(U \cap U',\gamma)$ für ein geeignetes $\gamma \in F(y)$.

- Damit bilden die $V(U,\alpha)$ eine Basis einer Topologie auf der Menge $\tilde{X}$. Dann ist p für diese Topologie stetig nach Konstruktion und lokal trivial, also eine Überlagerung.

- Sei nun w ein geschlossener Weg in X und $\tilde{w}$ ein Hochhebung zu einem Weg in $\tilde{X}$. Wir zeigen, dass $\tilde{w}$ genau dann geschlossen ist, wenn w nullhomotop ist. Nach Satz 2.9.2 folgt dann, dass $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung ist.

  Da es nach Bemerkung 2.9.3.2 nicht auf die Wahl von Grundpunkten ankommt, sei $\tilde{w}(0) = (x,[c_x]) = \tilde{w}(1)$. Der Weg $\tilde{w}: I \to \tilde{X}$ sieht so aus: $\tilde{w}(t) = (x_t,[w_t])$, wobei w_t für jedes $t \in I$ ein Weg mit Anfangspunkt $w_t(0) = x$ und Endpunkt $w_t(1) = x_t$ ist.

Aus $p\tilde{w} = w$ folgt $w(t) = x_t$ für alle $t \in I$, also $\tilde{w}(t) = (w(t), [w_t])$. Der Weg w_t hat Anfangspunkt x und Endpunkt $w(t)$. Betrachte andererseits $w_t'(s) = w(t{\cdot}s)$. Auch $(w(t), [w_t])$ hebt den Weg w zu einem Weg in $\tilde{X}$. Mit der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen folgt $\tilde{w}(t) = (w(t), [w_t])$ mit $w_t(s) = w(t \cdot s)$.

Daher ist $\tilde{w}(1) = \tilde{w}(0)$ äquivalent zu $(w(0), [c_x]) = (w(1), [w])$. Das ist aber äquivalent zu $[w] = [c_x]$, so dass die Behauptung gezeigt ist.

□

2.10 Deckbewegungen

Definition 2.10.1

1. *Eine Selbstäquivalenz einer Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} \tilde{X}$ heißt Deckbewegung. Eine Deckbewegung ist also ein Homöomorphismus $f : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{X}$ über X, also $p \circ f = p$.*

2. *Die Menge*
$$D(\tilde{X}, p) := \{f : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{X} \mid p \circ f = p\}$$
ist eine Gruppe, die Deckbewegungsgruppe der Überlagerung p.

Satz 2.10.2.
Sei G diskret. Operiert die Gruppe G eigentlich diskontinuierlich auf einem wegzusammenhängenden Raum $\tilde{X}$, so ist für die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ aus Satz 2.7.11 die Deckbewegungsgruppe gleich G, also $D(\tilde{X}, p) = G$.

Beweis.
Es ist klar, dass $G \subset D(\tilde{X}, p)$ gilt, denn für jedes $g \in G$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\
& \tilde{X}/G &
\end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ eine Deckbewegung, also $p \circ f = p$. Wähle $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Dann ist $p \circ f(\tilde{x}) = p\tilde{x}$. Also existiert $g \in G$ mit $f(\tilde{x}) = g\tilde{x}$. Daraus folgt aber mit Satz 2.7.13, dass $f = g$ gilt. □

Beispiele 2.10.3.

1. Die Überlagerung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ hat die Deckbewegungsgruppe $D(\mathbb{R}^n, p) = \mathbb{Z}^n$.

2. Die Überlagerung $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1$ mit $p(z) = z^n$ kann man auffassen als Überlagerung $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_n$. Sie hat daher die Deckbewegungsgruppe $D(\mathbb{S}^1, p_n) = \mathbb{Z}_n$.

3. Für $n \geq 2$ hat die Überlagerung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$ die Deckbewegungsgruppe $\mathbb{Z}_2$.

Umgekehrt gilt:

Satz 2.10.4.
Ist $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so operiert die Deckbewegungsgruppe $D(\tilde{X}, p)$ eigentlich diskontinuierlich auf dem Totalraum $\tilde{X}$.

Sind $f_1, f_2 \in D(\tilde{X}, p)$ und gilt $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$ für wenigstens ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$, so ist $f_1 = f_2$. Insbesondere hat die Wirkung der Deckbewegungsgruppe keine Fixpunkte.

Beweis.
Sei $f \in D(\tilde{X}, p)$. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig. Wähle eine trivialisierende Umgebung U von $p\tilde{x}$. Sei $\tilde{U}$ die Komponente des Urbilds $p^{-1}(U)$, die $\tilde{x}$ enthält. Dann ist $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus.

Angenommen, es gibt $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $f(\tilde{y}) \in \tilde{U}$. Dann ist $p\tilde{y} = pf\tilde{y}$. Aber $p|_{\tilde{U}}$ ist ein Homöomorphismus, also folgt $\tilde{y} = f\tilde{y}$. Mit Satz 2.7.13 folgt wie oben $f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Damit erfüllt jede trivialisierende Umgebung die Bedingung für "eigentlich diskontinuierlich" in Definition 2.6.10. □

Bemerkungen 2.10.5.

- Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G, so ist der <u>Normalisator</u> von H in G

$$N_G(H) := \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\} \ .$$

- $N_G(H)$ ist eine Untergruppe von G.
- H ist eine normale Untergruppe von $N_G(H)$.
- H ist genau dann eine normale Untergruppe von G, wenn $N_G(H) = G$ gilt. Insbesondere ist für die triviale Untergruppe $N_G(1) = G$.
- Wenn G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir $N(H)$ statt $N_G(H)$.

Satz 2.10.6.
Sei X lokal wegzusammenhängend und $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Jede Wahl eines Grundpunkts $\tilde{x} \in \tilde{X}$ bestimmt einen Isomorphismus von der Faktorgruppe auf die Deckbewegungsgruppe

$$\varphi : \quad N_{\pi_1(X,p\tilde{x})}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \ / \ p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} D(\tilde{x}, p) \ .$$

Beweis.

- Es sei $[w] \in N(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ und sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit Anfangspunkt $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$. Setze $\tilde{x}' := \tilde{w}(1) \in \tilde{X}$. Es gilt, vgl. Satz 2.8.3,

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}') = [w]^{-1} p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})[w]^{-1} = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \ .$$

  Im letzten Schritt haben wir ausgenützt, dass $[w]$ im Normalisator der Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ von $\pi_1(X, p\tilde{x})$ liegt.

- Wir können daher Satz 2.7.23 anwenden und finden eine Hochhebung f

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

mit $f(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. Das ist wohldefiniert, d.h. f hängt nur von der Homotopieklasse von w ab. Dieses f ist ein Homöomorphismus, denn es existiert nach den gleichen Argumenten auch eine Hochhebung $g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $g(\tilde{x}') = \tilde{x}$. Aus der Eindeutigkeit der Hochhebungen folgt $g \circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Wir erhalten so eine Abbildung in die Deckbewegungsgruppe

$$\tilde{\varphi} : \quad N(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \to D(\tilde{X}, p) \ .$$

- Wir zeigen nun, dass die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei $[v_1] \in Np_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ mit $\tilde{\varphi}[v_1] = g_1$ und $[v_2] \in Np_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ mit $\tilde{\varphi}[v_2] = g_2$. Für die Hochhebung $\widetilde{v_1 \star v_2}$ des Wegs $v_1 \star v_2$ in X gilt

$$\widetilde{v_1 \star v_2}(1) = g_1(\tilde{v}_2(1)) = g_1(g_2(\tilde{x}))$$

  und somit gilt $\tilde{\varphi}([v_1] \cdot [v_2]) = g_1 \circ g_2 = \varphi[v_1] \cdot \varphi[v_2]$.

- Der Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}$ ist surjektiv. Ist $f \in D(\tilde{X}, p)$ gegeben, so finden wir, weil $\tilde{X}$ als wegzusammenhängend vorausgesetzt wurde, einen Weg $\tilde{w}$ von $\tilde{x}$ nach $f(\tilde{x})$. Setze

$$\alpha := [p \circ \tilde{w}] \in \pi_1(X, p(\tilde{x})) \ .$$

  Dann ist

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_* f_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, f(\tilde{x})) = \alpha^{-1} \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cdot \alpha$$

  und deswegen $\alpha \in N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Es gilt offensichtlich $\tilde{\varphi}(\alpha) = f$.

- Wir bestimmen den Kern des Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}$: sei $\varphi[w] = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $[w]$ eine geschlossene Hochhebung $\tilde{w}$ hat, also wenn $[w] = p_*[\tilde{w}]$ für $[\tilde{w}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Genau dann ist aber $[w] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.

□

Korollar 2.10.7.
Es sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum und $\tilde{X} \xrightarrow{p} \tilde{X}$ die universelle Überlagerung. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gewählt.

Dann ist $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$ und daher gibt es zu jedem $[w] \in \pi_1(X, p\tilde{x})$ genau eine Deckbewegung $\varphi[w] : \tilde{X} \to \tilde{X}$, die $\tilde{x}$ auf $\tilde{w}(1)$ abbildet, wobei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$ ist. Das heißt, dass

$$\pi_1(X, p\tilde{x}) \xrightarrow{\varphi} D(\tilde{X}, p)$$

ein Isomorphismus ist.

Man kann also Fundamentalgruppen als Deckbewegungsgruppen universeller Überlagerungen berechnen.

Definition 2.10.8
Eine wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt regulär, falls für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ normale Untergruppe in $\pi_1(X, p\tilde{x})$ ist.

Für reguläre Überlagerungen erhalten wir aus Satz 2.10.8 den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \quad \pi_1(X, x) \ / \ p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\cong} D(\tilde{X}, p) \ .$$

Den Beweis des folgenden Satzes überlassen wir als Übung:

Satz 2.10.9.
Sei $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ Überlagerung. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ ist regulär.

2. Für alle $\tilde{x,}\tilde{x}' \in \tilde{X}$ mit $p\tilde{x} = p\tilde{x}' =: x$ ist $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}')$ als Untergruppe von $\pi_1(X, x)$.

3. Hat ein geschlossener Weg in X eine geschlossene Hochhebung, so sind alle seine Hochhebungen geschlossen.

4. Ist X zusätzlich lokal wegzusammenhängend, so sind 1. - 3. auch äquivalent zu: $D(\tilde{X}, p)$ operiert transitiv auf $F = p^{-1}(x)$.

Beispiele 2.10.10.

1. Universelle Überlagerungen sind regulär, denn die triviale Untergruppe ist stets ein Normalteiler.

2. Eine wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, deren Basis X abelsche Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ hat, ist regulär, denn alle Untergruppen einer abelschen Gruppe sind Normalteiler.

3. Zweiblättrige Überlagerungen sind regulär, falls sie wegzusammenhängend sind. (Denn Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.)

2.11 Klassifikationssatz für Überlagerungen

Wir konstruieren zunächst eine Klasse von Überlagerungen hinreichend zusammenhängender Räume.

Satz 2.11.1.
Ist X ein hinreichend zusammenhängender Raum und $x \in X$. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $H < \pi_1(X, x)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X}_H \xrightarrow{p_H} X$ und ein $\tilde{x}_H \in \tilde{X}_H$ mit

$$p_H(\tilde{x}_H) = x \quad \text{und} \quad p_{H*}\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) = H \ .$$

Beweis.

- Nach Satz 2.9.8 existiert die universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ von X. Wähle $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Wegen Korollar 2.10.7 fixiert dies einen Isomorphismus

$$\varphi : \pi_1(X, x) \to D(\tilde{X}, p) \ .$$

  Daher ist $\varphi(H)$ eine Untergruppe der Deckbewegungsgruppe $D(\tilde{X}, p)$. Sei $\tilde{X}_H := \tilde{X}/\varphi(H)$ der Quotientenraum; definiere eine Abbildung

$$\begin{array}{rccl} p_H : & \tilde{X}_H & \to & X \\ & [y] & \mapsto & p(y) \ . \end{array}$$

  Die Abbildung p_H ist offensichtlich wohldefiniert, surjektiv und stetig. Als Grundpunkt von $\tilde{X}_H$ wählen wir $\tilde{x}_H := \pi(\tilde{x})$. Es gilt $p_H(\tilde{x}_H) = x$. Mit der kanonischen Projektion

$\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}_H$ auf den Quotientenraum haben wir die folgende Situation: die universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ faktorisiert über

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& \tilde{X}_H = \tilde{X}/\varphi(H) \arrow[dl, "p_H"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

- Es ist nun zu zeigen, dass $\tilde{X}_H \xrightarrow{p_H} X$ eine Überlagerung ist. Sei U eine die universelle Überlagerung p trivialisierende Umgebung eines beliebigen Punktes $x' \in X$,

  $$p^{-1}U \cong \sqcup_{y \in F} U \times \{y\} = \sqcup_{y \in F} U_y \ .$$

  Wir führen eine Äquivalenzrelation ein: U_y sei äquivalent zu $U_{y'}$, wenn es eine Deckbewegung $h \in \varphi(H)$ gibt mit $hU_y = U_{y'}$. Wir wählen einen Vertreter U_{y_0} für jede Äquivalenzklasse. Dann ist für $\tilde{X}_H \xrightarrow{p_H} X$

  $$p_H^{-1}(U) \cong \sqcup \pi(U_{y_0}) \ .$$

  Dies ist eine Vereinigung paarweise disjunkte offener Mengen. Jede wird durch Einschränkungen von p homöomorph auf U abgebildet, so dass die Umgebung U in X auch p_H trivialisiert; es liegt also eine Überlagerung vor.

- Wir müssen für die so konstruierte Überlagerung noch die Untergruppe $p_{H*}\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_H)$ ausrechnen.

  Für $[w] \in \pi_1(X, x)$ sei $\tilde{w}_H$ der hochgehobene Weg in $\tilde{X}_H$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_H$ und $\tilde{w}$ der hochgehobene Weg in der universellen Überlagerung $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}$. Es gilt dann $\pi(\tilde{w}) = \tilde{w}_H$, weil beide Wege Hochhebungen des Wegs w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_H$ sind.

  Sei $\tilde{w}_H$ geschlossen, d.h. sei $[w_H] = p_{H*}(\tilde{w})$. Genau dann gilt $\tilde{w}(1) = \varphi(w)(\tilde{x}) = h\tilde{x}$ für ein $h \in \varphi(H)$. Genau dann ist $\varphi[w] \in \varphi(H)$, und daher ist $p_{H*}\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) = H$.

$\square$

Für jede Untergruppe $H < \pi_1(X, x)$ faktorisiert also die universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ über

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& \tilde{X}_H = \tilde{X}/\varphi(H) \arrow[dl, "p_H"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Umgekehrt sind alle Überlagerungen von dieser Form:

Satz 2.11.2.
Sei X hinreichend zusammenhängend und $\tilde{X}' \xrightarrow{p'} X$ eine wegzusammenhängender Überlagerung. Dann überlagert die universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ den Totalraum $\tilde{X}'$.

Beweis.
Wähle einen Grundpunkt $\tilde{x}' \in \tilde{X}'$ und als Grundpunkt für X den Punkt $x := p'(\tilde{x}')$. Wähle schließlich einen Grundpunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$. Dann ist

$$H := p'_* \pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}') < \pi_1(X, x)$$

eine Untergruppe und

$$\tilde{X} \to \tilde{X}/\varphi(H) =: \tilde{X}_H$$

ist nach Satz 2.7.11 eine Überlagerung.

Außerdem haben wir eine Überlagerung $p_H : \tilde{X}_H \to X$. Nach Satz 2.10.6 ist die Untergruppe $p_{H*}\pi_1(\tilde{X}_H, \pi(\tilde{x})) = H$, und somit sogar gleich, also insbesondere konjugiert zu $p'_*\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}')$. Nach Satz 2.8.6 sind die beiden Überlagerungen äquivalent. □

Damit erhalten wir

Theorem 2.11.3 (Klassifikationssatz für Überlagerungen)**.**
Sei X hinreichend zusammenhängend und $x \in X$. Dann gibt es natürliche Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen wegzusammen-} \\ \text{hängender Überlagerungen von } X \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } \pi_1(X,x) \end{array} \right\}$$

Hier bei wird einer Überlagerung $\tilde{X}' \xrightarrow{p'} X$ die Konjugationsklasse von $\pi_1(p')\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}')$ wie in Definition 2.8.5 zugeordnet und einer Untergruppe $H < \pi_1(X, x)$ die in Satz 2.11.1 konstruierte Überlagerung.

Bemerkungen 2.11.4.

1. Ist N eine normale Untergruppe von $\pi_1(X, x)$, dann entspricht ihr, bis auf Äquivalenz, eine reguläre reguläre Überlagerung.

   Die normale Untergruppe N ist der einzige Vertreter ihrer Konjugationsklasse. In diesem Fall ist die Deckbewegungsgruppe

   $$D(\tilde{X}_N, p_N) \cong \pi_1(X, x)/N \ .$$

   Im allgemeinen ist die Formel komplizierter, vgl. Satz 2.10.6:

   $$D(\tilde{X}_H, p_H) = N_{\pi_1(X,x)}\Big(\pi_1(p_H)\pi_1(\tilde{X}_H, x_H)\Big) \,/\, \pi_1(p_H)\pi_1(\tilde{X}_H, x_H) \ .$$

2. Ist X hinreichend zusammenhängend und $\pi_1(X, x) \cong \{1\}$, so hat X nur triviale Überlagerungen $X \xrightarrow{\sim} X$.

Beispiele 2.11.5.

1. Es gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$. Die einzigen Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind von der Form $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bis auf Äquivalenz gibt es daher nur die Überlagerungen

   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & \exp(2\pi i n t) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrcl} p_n : & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & z & \mapsto & z^n \end{array}$$

   Die folgenden Überlagerungen sind alle isomorph zur ersten Überlagerung

   $$\begin{array}{rcl} \pi_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & [t] \end{array}$$

Wir haben den folgenden Turm von Überlagerungen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[dd, "\pi_1"'] \arrow[dr, bend right, "\pi_2"] \arrow[drr, "\pi_3"] \arrow[drrr, bend left, "\pi_6"] & & & \\
& \mathbb{S}^1 \arrow[dl, bend right, "p_2"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[dll, "p_3"] & \mathbb{S}^1 \arrow[ll, bend right] \arrow[l, bend left] \arrow[dlll, bend left, "p_6"] \\
\mathbb{S}^1 & & &
\end{tikzcd}$$

Man beachte, dass dies dem folgenden Diagramm im Untergruppenverband von $\mathbb{Z}$ entspricht:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dd] \arrow[dr, bend right] \arrow[drr] \arrow[drrr, bend left] & & & \\
& 2\mathbb{Z} \arrow[dl, bend right] & 3\mathbb{Z} \arrow[dll] & 6\mathbb{Z} \arrow[ll, bend right] \arrow[l, bend left] \arrow[dlll, bend left] \\
\mathbb{Z} & & &
\end{tikzcd}$$

2. Ist X hinreichend zusammenhängend und $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$, so hat X bis auf Äquivalenz nur eine nicht-triviale wegzusammenhängende Überlagerung. Dies trifft zum Beispiel auf $X = \mathbb{R}P^n$ mit $n \geq 2$ zu; die einzige nicht-triviale wegzusammenhängende Überlagerung ist $\mathbb{S}^n$. Dies ist auch die universelle Überlagerung.

3. Der topologische Raum $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ hat sehr viele Überlagerungen, weil seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$, vgl. Beispiel 2.4.14.1 sehr viele Untergruppen hat.

Für viele Gruppen ist es nicht leicht, Untergruppen zu klassifizieren. Daher geben wir noch eine explizite Klassifikation von wegzusammenhängenden Überlagerungen hinreichend zusammenhängender Räume mit endlich vielen Blättern.

Betrachtung 2.11.6.

1. Die Permutationsgruppe Σ_n auf n Elementen ist die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots n\}$. Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

2. Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine n-blättrige Überlagerung. Wähle einen Grundpunkt $x \in X$ und eine beliebige Numerierung $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ der Punkte in der Faser von x, also mit $p(\tilde{x}_i) = x$.

   Wir definieren eine Abbildung

   $$\rho: \quad \pi_1(X, x) \to \Sigma_n \ .$$

   Sei $[w] \in \pi_1(X, x)$ und $\tilde{w} : I \to \tilde{X}$ die nach Satz 2.7.14 eindeutig bestimmte Hochhebung mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_j$. Setze dann $\rho[w](i) = j$, wenn $\tilde{w}(1) = x_i$ gilt. Weil die Hochhebung eindeutig ist, ist die Selbstabbildung $\rho[w]$ von $\{1, \ldots, n\}$ injektiv, also eine Permutation.

   Die so definierte Abbildung ρ ist offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus.

Wir brauchen einige Begriffe für Gruppenhomomorphismen in die symmetrische Gruppe:

Definition 2.11.7
Sei G eine Gruppe.

1. *Ein Homomorphismus $\rho : G \to \Sigma_n$ heißt transitiv, wenn es zu jedem Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ein $g \in G$ gibt mit $\rho(g)(i) = j$.*

2. *Zwei Homomorphismen $\rho, \rho' : G \to \Sigma_n$ heißen äquivalent, wenn es ein $\sigma \in \Sigma_n$ gibt mit $\rho'(g) = \sigma\rho(g)\sigma^{-1}$ für alle $g \in G$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von ρ mit $\langle\rho\rangle$.*

3. *Wir bezeichnen mit $\langle G, \Sigma_n\rangle$ die Menge der Äquivalenzklassen aller transitiven Gruppenhomomorphismen von G nach Σ_n.*

In der Situation von Betrachtung 2.11.6 machen wir uns weiter klar:

Betrachtung 2.11.8.

1. Ändert man die Numerierung der Urbildpunkte durch ein Element $\sigma \in \Sigma_n$, so erhält man die unter σ zu ρ konjugierte Abbildung, vgl. etwa die Argumente im Beweis von Satz 2.8.3.

2. Ist $\tilde{X}$ *wegzusammenhängend*, so ist $\rho : \pi_1(X, x) \to \Sigma_n$ transitiv. Zu $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j \in p^{-1}(x)$ finde einen Weg $\tilde{w}$ von $\tilde{x}_j$ nach $\tilde{x}_i$. Dieser ist die eindeutige Hochhebung des geschlossenen Wegs $w := p\tilde{w}$ in X mit Anfangspunkt $\tilde{x}_j$. Daher gilt $\rho[w](j) = i$ für vorgegebene i, j.

Definition 2.11.9
Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine n-blättrige zusammenhängende Überlagerung mit einer beliebigen Numerierung der Blätter über einem Punkt $x \in X$. Wir bezeichnen die Klasse eines transitiven Homomorphismus $\rho : \pi_1(X, x) \to \Sigma_n$ mit $\mathcal{S}(\tilde{X}, p) \in \langle\pi_1(X, x), \Sigma_n\rangle$. Jeden Homöomorphismus in dieser Klasse nennt man einen charakterisierenden Homomorphismus der Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$.

Wir können nun n-blättrige Überlagerungen folgendermaßen beschreiben:

Satz 2.11.10 (Klassifikationssatz für n-blättrige Überlagerungen)**.**
Sei X ein hinreichend zusammenhängender Raum und $x \in X$. Dann gilt:

1. Zwei n-blättrige Überlagerungen $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ und $\tilde{X}' \xrightarrow{p'} X$ sind genau dann äquivalent, wenn $\mathcal{S}(\tilde{X}, p) = \mathcal{S}(\tilde{X}', p')$ gilt.

2. Für jedes Element $\langle\rho\rangle \in \langle\pi_1(X, x), \Sigma_n\rangle$ gibt es eine n-blättrige wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ mit $\mathcal{S}(\tilde{X}, p) = \langle\rho\rangle$.

Beweis.

1. Wähle Numerierungen der Fasern $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n\}$ und $p'^{-1}(x) = \{\tilde{x}'_1, \dots \tilde{x}'_n\}$. Wir erhalten wie in Betrachtung 2.11.6 Homomorphismen

$$\rho, \rho' : \quad \pi_1(X, x) \to \Sigma_n \ .$$

Gibt es eine Äquivalenz $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$, so kann man die Numerierung so wählen, dass $f(\tilde{x}_i) = \tilde{x}'_i$ gilt. Dann ist $\rho = \rho'$ und erst recht $\mathcal{S}(\tilde{X}, p) = \mathcal{S}(\tilde{X}', p')$.

Gelte umgekehrt $\mathcal{S}(\tilde{X}, p) = \mathcal{S}(\tilde{X}', p')$. Wähle die Numerierung so, dass $\rho = \rho'$ gilt. Nun ist aber

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) = \{[w] \in \pi_1(X, x) \,|\, \rho[w](i) = i\}$$

und daher gilt $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) = p'_*\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}'_i)$. Aus Satz 2.8.6 folgt, dass die Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ zu der Überlagerung $X' \xrightarrow{p'} X$ äquivalent ist.

2. Sei $\langle\rho\rangle \in \langle\pi_1(X, x), \Sigma_n\rangle$ gegeben. Dann ist

$$H := \{[w] \in \pi_1(X, x) \,|\, \rho[w](1) = 1\}$$

eine Untergruppe von $\pi_1(X, x)$. Da ρ transitiv ist, finde für jedes $i = 1, \dots n$ eine Klasse $[w_i] \in \pi_1(X, x)$ mit $\rho[w_i](1) = i$. Dann ist $([w_i]H)_{i=1,\dots,n}$ ein Vertretersystem für die Nebenklassen von H und daher der Index der Untergruppe $[\pi_1(X, x) : H] = n$.

Zu der Untergruppe H gibt es nach Satz 2.11.1 eine wegzusammenhängende Überlagerung $\tilde{X}_H \xrightarrow{p_H} X$ mit Grundpunkt $\tilde{x}_H \in \tilde{X}_H$ und $H = p_{H*}(\tilde{X}_H, \tilde{x}_H)$. Nach Konstruktion ist die Überlagerung n-blättrig.

Wir müssen noch den Gruppenhomomorphismus nach Σ_n bestimmen, der zu der Überlagerung $\tilde{X}_H \xrightarrow{p_h} X$ gehört. Setze dazu $\tilde{x}_1 := \tilde{x}_H$. Sei $\tilde{w}_i$ die Hochhebung von w_i mit $\tilde{w}_i(0) = \tilde{x}_1$. Setze $\tilde{x}_i := \tilde{w}_i(1)$. Es gilt $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j$ für $i \neq j$. Es sei $\rho_H : \pi_1(X, , x) \to \Sigma_n$ der durch diese Numerierung der Punkte der Faser festgelegte Gruppenhomomorphismus. Dann gilt

$$\rho_H[w](1) = 1 \text{ für alle } [w] \in H \quad \text{ und } \rho_H[w_i](1) = i \text{ für } i = 2, \dots n \ .$$

Seien $[v] \in \pi_1(X, x)$ und $i \in \{1, \dots n\}$ beliebig. Es ist $[v][w_i] \in [w_j]H$ für ein gewisses j und daher

$$\rho_H[v](i) = \rho([v][w_i])(1) = \rho[w_j](1) = j$$

und ebenso

$$\rho[v](i) = \rho([v][w_i])(1) = \rho[w_j](1) = j \ .$$

Dies gilt für alle $i = 1, \dots n$; daher ist $\rho_H = \rho$.

$\square$

Beispiel 2.11.11.
Wir bestimmen die inäquivalenten wegzusammenhängenden zweiblättrigen Überlagerungen von $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Wegen Beispiel 2.4.14.1 ist $\pi_1(X)$ eine freie Gruppe auf zwei Elementen. Wir untersuchen daher Gruppenhomomorphismen

$$\rho : \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = \langle t_1 \rangle \star \langle t_2 \rangle \to \Sigma_2 = \{\mathrm{id}, \tau\} \cong \mathbb{Z}_2 \ .$$

Wegen Satz 2.4.9 sind die Werte von ρ auf den Erzeugern t_1, t_2 frei wählbar:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
t_1	id	id	τ	τ
t_2	id	τ	id	τ

Man sieht sofort, dass ρ_1 nicht transitiv ist, aber ρ_2, ρ_3 und ρ_4 transitiv sind. Weil in diesem Fall Σ_2 abelsch ist, sind diese drei Gruppenhomomorphismen nicht konjugiert.

Es gibt also drei inäquivalente wegzusammenhängende zweiblättrige Überlagerungen von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

2.12 Graphen und Untergruppen freier Gruppen

Ziel dieses Unterkapitels ist es, mit topologischen Methoden, nämlich Überlagerungen von Graphen, die algebraische Aussage zu zeigen, dass Untergruppen freier Gruppen wieder frei sind.

Definition 2.12.1

1. *Ein Graph besteht aus zwei Mengen*

$$V(\Gamma) := \{P_i\}_{i \in I} \quad \text{und} \quad E(\Gamma) := \{e_j\}_{j \in J} \, .$$

Die Elemente $P_i \in V(\Gamma)$ werden Ecken, die Elemente $e_j \in E(\Gamma)$ Kanten (englisch: edge) genannt. Jede Kante $e_j \in E(\Gamma)$ besteht aus einem Paar (e_j^+, e_j^-) von Elementen, genannt orientierte Kanten. Jeder orientierten Kante wird ein Anfangs- und ein Endpunkt in $V(\Gamma)$ zugeordnet. Der Endpunkt von e_j^+ ist der Anfangspunkt von e_j^- und umgekehrt.

Wir realisieren einen Graphen Γ geometrisch durch einen topologischen Raum $|\Gamma|$, indem man für jede Kante ein Intervall nimmt und diese an den gemeinsamen Ecken zusammenklebt.

2. (a) *Ein Weg w in einem Graphen Γ ist eine endliche Folge orientierter Kanten $w = x_{i_n} \dots x_{i_1}$, mit x_{i_j} von der Form e_k^+ oder e_k^-, so dass der Endpunkt von x_{i_j} der Anfangspunkt von $x_{i_{j+1}}$ ist.*
   (b) *Der Weg $w = x_{i_n} \dots x_{i_1}$ hat Länge n.*
   (c) *Ein Weg w heißt geschlossen, falls der Endpunkt von w gleich seinem Anfangspunkt ist.*
   (d) *Ein Weg der Form $e_j^+ e_j-$ oder $e_j^- e_j$ heißt Dorn.*
   (e) *Ein Weg heißt reduziert, falls er kein Segment der Form $e_j^+ e_j^-$ oder $e_j^- e_j^+$ enthält, also keinen Dorn enthält.*
   (f) *Für $w = x_{i_n} \dots x_{i_1}$ ist $w^- := w = x_{i_n}^- \dots x_{i_1}^-$ mit*

$$x_{i_j} := \begin{cases} e_k^+ & \text{falls } x_{i_j} = e_k^- \\ e_k^- & \text{falls } x_{i_j} = e_k^+ \end{cases}$$

3. *Ein Graph Γ heißt zusammenhängend, wenn es zu jedem Paar von Ecken einen Weg gibt, der die beiden Ecken verbindet.*

4. *Ein zusammenhängender Graph Γ heißt Baum, falls Γ keine reduzierten* geschlossenen *Wege enthält.*

Lemma 2.12.2.
Je zwei Ecken eines Baums $\mathcal{T}$ sind durch einen *eindeutigen* reduzierten Weg verbunden.

Beweis.
Wir nehmen an, es gebe zwei verschiedene reduzierte Wege $w_1 \neq w_2$, die zwei Ecken im Graph Γ verbinden. Sei w_1 der kürzeste Weg, der in so einem Paar von reduzierten Wegen im Graph Γ überhaupt auftritt.

Die Wege w_1, w_2 sind reduziert, aber $w_1 w_2^{-1}$ muss einen Dorn enthalten, weil $\mathcal{T}$ ein Baum ist. Gilt

$$w_1 = x_{i_n} \dots x_{i_1} \quad \text{und} \quad w_2^{-1} = y_{i_m} \dots y_{i_1} \, ,$$

so ist $x_{i_n} = y_{i_m}^-$ oder $x_{i_1} = y_{i_1}$. In beiden Fällen können wir eine Kante weglassen und bekommen einen kürzeren Weg $\tilde{w}$ in Γ, im Widerspruch zur Minimalität von w_1. □

Definition 2.12.3
Seien w_1, w_2 Wege in einem Graph. Wir sagen, w_1 ist äquivalent zu w_2, in Zeichen $w_1 \sim w_2$, wenn w_1 aus w_2 durch endlich viele Einfügungen oder Streichungen von Dornen entsteht.

Bemerkung 2.12.4.
Sei Γ ein zusammenhängender Graph. Dann ist Γ genau dann ein Baum, wenn je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt äquivalent sind.

Definition 2.12.5
Es sei $\mathcal{F}(S)$ die freie Gruppe auf der Menge S. Ihr Cayley-Graph $\mathcal{T}$ ist wie folgt definiert.

- *Starte mit einem Grundpunkt P und füge für jedes $s \in S$ zwei orientierte Kanten hinzu. (Diese werden den Gruppenelementen s und s^{-1} entsprechen.)*
- *Iterativ füge nun an jedem Endpunkt wieder 2 orientierte Kanten für jedes $s \in S$ hinzu.*

Der entstehende Graph ist ein Baum. Wege in diesem Baum entsprechen Elementen in der freien Gruppe $\mathcal{F}(S)$. Den Cayley-Graph für die freie Gruppe $\mathcal{F}(2)$ findet man in Beispiel 2.9.4.3.

Definition 2.12.6
Ist Γ ein zusammenhängender Graph, so heißt ein Baum $\mathcal{T} \subset \Gamma$ ein Spannbaum, falls $V(\mathcal{T}) = V(\Gamma)$.

Satz 2.12.7.
Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Spannbaum.

Beweis.
Wir führen den Beweis für den Fall, wenn die Menge $E(\Gamma)$ der Kanten abzählbar ist. Ein allgemeines Argument mit dem Zornschen Lemma findet man in Kapitel 5.5 des Buchs von Stöcker-Zieschang.

Wähle eine beliebige Ecke $P \in V(\Gamma)$. Für jede Ecke $Q \in V(\Gamma)$ sei $\ell(Q)$ die kleinste Länge eines Wegs von P nach Q. Wähle nun für jede Ecke Q mit $\ell(Q) = 1$ eine beliebige Kante von P nach Q aus. Dies gibt einen Baum $\mathcal{T}_1 \subset \Gamma$, der alle Ecken der Länge $\ell \leq 1$ als Ecken hat.

Nun fahren wir induktiv fort: angenommen, wir haben einen Unterbaum $\mathcal{T}_n$ gefunden, der alle Ecken Q mit $\ell(Q) \leq n$ als Ecken hat. Jede Ecke Q' mit $\ell(Q') = n+1$ ist mit $\mathcal{T}_n$ durch wenigstens eine Kante verbunden, von denen man eine auswählt, um den Baum $\mathcal{T}_{n+1}$ zu erhalten. □

Definition 2.12.8
Sei Γ ein Graph und $P \in V(\Gamma)$. Die Menge $\pi_1(\Gamma, P)$ der Äquivalenzklassen geschlossener Wege w an P in Γ heißt die Fundamentalgruppe des Graphen Γ an P.

Bemerkungen 2.12.9.

1. Dies ist eine Gruppe mit Multiplikation $[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$ und Inversem $[w]^{-1} = [w^-]$ wie in Definition 2.12.1.2. Das neutrale Elemente ist die Äquivalenzklasse der Wege, die auf den konstanten Weg in P reduziert werden können.

2. Sei Γ ein zusammenhängender Graph. Wir bestimmen einen Satz von Erzeugern von $\pi_1(\Gamma, P)$. Sei $\mathcal{T}$ ein Spannbaum von Γ.

   - Für jede Ecke $P_i \in V(\Gamma)$ gibt es einen eindeutigen reduzierten Weg w_i von P nach P_i im Spannbaum $\mathcal{T}$.
   - Für eine Kante $e_i \in E(\Gamma)$ mit
   $$P_l \xrightarrow{e_i^+} P_k$$
   setze $v := w_k^- e_i^+ w_l$. Dies ist ein geschlossener Weg an P. Dann ist jeder geschlossene Weg $w = e_{i_m}^{\epsilon_m} \dots e_{i_1}^{\epsilon_1}$ an P äquivalent zu einem Produkt von offenen Wegen der Form v_i und v_i^-, etwa w zu $v_{i_m}^{\epsilon_m} \dots e_{i_1}^{\epsilon_1}$.
   - Ist nun die Kante $e_i \in E(\mathcal{T})$, so ist v_i ein geschlossener Weg im Spannbaum $\mathcal{T}$ und damit äquivalent zu P. Es reicht also aus, die Kanten $e_i \in E(\Gamma) \setminus E(\mathcal{T})$ zu betrachten.

Wir fassen zusammen:

Satz 2.12.10.
Sei Γ ein Graph und $\mathcal{T}$ ein Spannbaum von Γ. Dann wird die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Gamma, P)$ erzeugt von den Klassen $[v_i]$ für $e_i \in E(\Gamma) \setminus E(\mathcal{T})$.

Bemerkung 2.12.11.
Sei Γ ein Graph. Wir erinnern an den topologischen Raum $|\Gamma|$ aus Definition 2.12.1.1, der entsteht, wenn man für jede Kante ein Intervall nimmt und diese an den gemeinsamen Ecken zusammenklebt. Man kann dann zeigen, dass für die Fundamentalgrupen $\pi_1(\Gamma, P) \cong \pi_1(|\Gamma|, P)$ gilt.

Satz 2.12.12.
Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Gamma, P)$ eines zusammenhängenden Graphen Γ ist frei. Genauer ist

$$\pi_1(\Gamma, P) \cong \mathcal{F}(\{e_i \mid e_i \in E(\Gamma) \setminus E(\mathcal{T})\}) \ .$$

Beweis.
Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall, dass die Kantenmenge abzählbar ist. Betrachte den Graphen $\Gamma/\mathcal{T}$, der durch Identifizieren des Spannbaums $\mathcal{T}$ zu einer Ecke entsteht. Da der Spannbaum $\mathcal{T}$ zusammenziehbar ist, gilt

$$\pi_1(\Gamma/\mathcal{T}, [P]) \cong \pi_1(\Gamma, P) \ .$$

Der Graph $\Gamma/\mathcal{T}$ hat eine Ecke, seine geometrische Realisierung $|\Gamma/\mathcal{T}|$ ist daher ein Bouquet von Kreisen. Dessen Fundamentalgruppe ist wegen Beispiel 2.4.14.2 eine freie Gruppe. □

Definition 2.12.13
Wir sagen, ein Graph $\tilde{\Gamma}$ überlagert einen Graphen Γ, falls es Abbildungen

$$\Phi : E(\tilde{\Gamma}) \to E(\Gamma) \quad \textit{und} \quad \Phi : V(\tilde{\Gamma}) \to V(\Gamma)$$

gibt, so dass

1. *Φ die Anfangs und Endpunkte von Kanten respektiert: aus $\tilde{P} \xrightarrow{\tilde{e}^+} \tilde{Q}$ folgt $\Phi(\tilde{P}) \xrightarrow{\Phi(\tilde{e}^+)} \Phi(\tilde{Q})$.*

2. *Φ die Involution, die durch Orientierungsumkehr gegeben ist, respektiert, $\Phi(\tilde{e}_i^-) = \Phi(\tilde{e}_i)^-$.*

3. *Ist $\Phi(\tilde{P}_i) = P_i$ und sind $\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \ldots$ die orientierten Kanten mit Anfangspunkt $\tilde{P}_i$ und sind $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots$ die orientierten Kanten mit Anfangspunkt P_i, so induziert Φ eine Bijektion $\{\tilde{e}_{i_k}\} \leftrightarrow \{e_{i_k}\}$. (Dies ist eine diskrete Version der lokalen Trivialität von Überlagerungen, vgl. Bemerkung* **??***.)*

Beispiele 2.12.14.
Sei Γ der Graph mit einer Ecke und zwei Kanten e_1, e_2. (Die geometrische Realisierung von Γ ist ein Bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ von 2 Kreisen.) Wir geben zwei Überlagerungen dieses Graphen an:

1. Sei $\tilde{\Gamma}_1$ der Graph mit $V(\Gamma_1) = \mathbb{Z}^2$ und Kanten, die Einheitsintervalle parallel zu den Koordinatenachsen sind. Die Abbildung Φ wirft Intervalle parallel zur x-Achse auf e_1 und Intervalle parallel zur y-Achse auf e_2. Dies ist eine Überlagerung.

2. Für den Cayley-Graph $\tilde{\Gamma}_2$ für die freie Gruppe $\mathcal{F}(2)$ aus Beispiel 2.9.4.3. kann man ganz analog eine Überlagerung auf Γ angeben: horizontale Kanten gehen auf e_1, vertikale auf e_2.

Bemerkungen 2.12.15.
Sei $\Phi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ eine Überlagerung von Graphen.

1. Gegeben $P \in V(\Gamma)$ und $\tilde{P} \in \Phi^{-1}(P)$. Wir können Wege in Γ, die in $P \in V(\Gamma)$ starten, hochheben zu einem eindeutigen Weg in $\tilde{\Gamma}$, der in $\tilde{P}$ startet. Dies ist eine diskrete Version von Satz 2.7.14.

2. Die Abbildung
$$\pi_1(\phi) : \quad \pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{P}) \to \pi_1(\Gamma, p)$$
ist injektiv. Dies ist eine diskrete Version von Korollar 2.7.17.2.

Betrachte nun die zugehörige Überlagerung topologischer Räume
$$|\tilde{\Gamma}| \xrightarrow{|\tilde{\Phi}|} |\Gamma| \ .$$

Aus dem Klassifikationssatz 2.11.3 folgt, dass jede Untergruppe $H \leq \pi_1(|\Gamma|, P)$ mit $P \in V(\Gamma)$ realisierbar als Überlagerung von $|\Gamma|$ ist. Es ist nun eine Tatsache, dass die Überlagerungen von $|\Gamma|$ bis auf Äquivalenz von Überlagerungen von Graphen herkommen, also von der Form $|\tilde{\Gamma}| \to |\Gamma|$ sind.

Damit können wir zeigen:

Satz 2.12.16 (Nielsen-Schreier)**.**
Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.

Beweis.
Sei $G = \mathcal{F}(S)$ eine freie Gruppe. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Menge S abzählbar ist. Dann ist $G = \pi_1(\vee_S \mathbb{S}^1)$.

Zu $H < \mathcal{F}(S)$ gehört nach dem Klassifikationssatz 2.11.3 eine Überlagerung von topologischen Räumen

$$\tilde{X}_H \xrightarrow{p_H} \vee_S \mathbb{S}^1$$

mit $\pi_1(p_H)_* \pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{p}) \cong H < \mathcal{F}(S)$.

Die Überlagerung $\tilde{X}_H$ ist äquivalent zu einer Überlagerung $|\tilde{\Gamma}_H|$, die von einer Überlagerung von Graphen

$$\Phi_H : \quad \tilde{\Gamma}_H \to \vee_S \mathbb{S}^1$$

wie in Definition 2.12.13 herkommt. Damit ist die Gruppe

$$H \cong \pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{p}) \cong \pi_1(\tilde{\Gamma}_H, \tilde{p})$$

nach Satz 2.12.12 frei, weil sie Fundamentalgruppe des Graphen Γ_H ist. □

Bemerkung 2.12.17.
Ist G eine freie Gruppe vom Rang n und $H < G$ eine Untergruppe vom Index k, so ist H eine freie Gruppe vom Rang $k(n-1)+1$.

Untervektorräume haben nie eine größere Dimension als der Vektorraum, in dem sie enthalten sind. Untergruppen einer freien abelschen Gruppe A haben nie einen größeren Rang als A. Das Analogon bei freien Gruppen ist aber falsch: die Untergruppe H hat stets einen größeren Rang als die umfassende Gruppe G (außer im trivialen Fall $k = 1$ oder im Fall $n = 1$, wenn G aber auch abelsch ist).

A Das Zornsche Lemma

Sei S eine Menge. Wir erinnern an die folgenden Begriffe und Resultate der Mengenlehre:

(i) Eine partielle Ordnung auf S ist eine Relation $x \leq y$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$x \leq x \qquad \text{Reflexivität}$$

$$x \leq y \;\wedge\; y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z \qquad \text{Transitivität}$$

$$x \leq y \;\wedge\; y \leq x \;\Rightarrow\; x = y \qquad \text{Antisymmetrie}\,.$$

(ii) Eine Totalordnung auf S ist eine partielle Ordnung, für die je zwei Elemente vergleichbar sind:

$$x, y \in S \quad \Rightarrow \quad x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x\,.$$

(iii) Sei S partiell geordnet, $T \subset S$ Teilmenge.

Ein Element $b \in S$ heißt eine obere Schranke der Teilmenge T, falls

$$x \leq b \quad \text{für alle} \quad x \in T\,.$$

(iv) Sei S partiell geordnet. Ein Element $m \in S$ heißt ein maximales Element, falls

$$m \leq x \quad \Rightarrow \quad m = x\,.$$

Das maximale Element muss nicht eindeutig sein. Als Beispiel betrachte die Menge der Ideale des Rings $\mathbb{Z}$ mit Teilordnung durch Inklusion. In ihr sind alle Primideale (p) mit p Primzahl maximal.

(v) Eine partiell geordnete Menge S heißt induktiv geordnet, falls jede nicht–leere, total geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke besitzt.

(vi) Zornsches Lemma Sei S eine nicht–leere, induktiv geordnete Menge. Dann besitzt S maximale Elemente.

B Glossar englischer Begriffe

Wir geben für einige topologische Begriffe die englischen Vokabeln an.

Deutsch	Englisch
Bahn	orbit
Basis	base
Berührpunkt	closure point
eigentlich diskontinuierlich	properly discontinuous
Ecke eines Graphs	vertex, node
Faser	fibre
Faserung	fibration
Hochhebungseigenshaft	lifting property
innerer Punkt	inner point
Kante eines Graphs	edge
offener Kern	interior
Rand	boundary
Satz vom Schinkenbrötchen	ham sandwich theorem
Satz vom Igel	hairy ball theorem
Schleifenraum	loop space
Spannbaum	spanning tree
Subbasis	subbase
Umgebung	neighbourhood
verbundene Summe	connected sum

Index