Die Quaternionen und $SO(3), SO(4)$

Prof. Dr. Birgit Richter

28.11.22

Hauptergebnis

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Theorem Es seien $a, b \in \mathbb{S}^3$ und es seien

$$\varphi(a)\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto ax\bar{a}, \quad \psi(a,b)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, y \mapsto ay\bar{b}.$$

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Theorem Es seien $a, b \in \mathbb{S}^3$ und es seien

$$\varphi(a)\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto ax\bar{a}, \quad \psi(a,b)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, y \mapsto ay\bar{b}.$$

Dann beschreiben diese Abbildungen Epimorphismen $\mathbb{S}^3 \to SO(3)$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$, deren Kerne nur aus $\ker(\varphi) = \{\pm e\}$ beziehungsweise $\ker(\psi) = \{\pm(e,e)\}$ bestehen.

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Theorem Es seien $a, b \in \mathbb{S}^3$ und es seien

$$\varphi(a)\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto ax\bar{a}, \quad \psi(a,b)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, y \mapsto ay\bar{b}.$$

Dann beschreiben diese Abbildungen Epimorphismen $\mathbb{S}^3 \to SO(3)$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$, deren Kerne nur aus $\ker(\varphi) = \{\pm e\}$ beziehungsweise $\ker(\psi) = \{\pm(e,e)\}$ bestehen. Oft notiert man diese Abbildungen mittels der Identifizierung $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ daher als exakte Sequenzen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \to SO(3), \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \times SU(2) \to SO(4).$$

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Theorem Es seien $a, b \in \mathbb{S}^3$ und es seien

$$\varphi(a)\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto ax\bar{a}, \quad \psi(a,b)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, y \mapsto ay\bar{b}.$$

Dann beschreiben diese Abbildungen Epimorphismen $\mathbb{S}^3 \to SO(3)$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$, deren Kerne nur aus $\ker(\varphi) = \{\pm e\}$ beziehungsweise $\ker(\psi) = \{\pm(e,e)\}$ bestehen. Oft notiert man diese Abbildungen mittels der Identifizierung $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ daher als exakte Sequenzen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \to SO(3), \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \times SU(2) \to SO(4).$$

Für diejenigen, die die Topologievorlesung gehört haben: Die Abbildungen $SU(2) \to SO(3)$ und $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$ sind wichtige 2-blättrige Überlagerung.

Hauptergebnis

Ziel des heutigen Vortrags ist der Beweis des folgenden Resultats:

Theorem Es seien $a, b \in \mathbb{S}^3$ und es seien

$$\varphi(a)\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto ax\bar{a}, \quad \psi(a,b)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, y \mapsto ay\bar{b}.$$

Dann beschreiben diese Abbildungen Epimorphismen $\mathbb{S}^3 \to SO(3)$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$, deren Kerne nur aus $\ker(\varphi) = \{\pm e\}$ beziehungsweise $\ker(\psi) = \{\pm(e,e)\}$ bestehen. Oft notiert man diese Abbildungen mittels der Identifizierung $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ daher als exakte Sequenzen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \to SO(3), \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SU(2) \times SU(2) \to SO(4).$$

Für diejenigen, die die Topologievorlesung gehört haben: Die Abbildungen $SU(2) \to SO(3)$ und $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$ sind wichtige 2-blättrige Überlagerung. Die Gruppe $SU(2)$ ist isomorph zu $\mathrm{Spin}(3)$.

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ orthogonal, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ orthogonal, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass f die Norm erhält. Hierbei ist wie immer $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ orthogonal, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass f die Norm erhält.
Hierbei ist wie immer $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.
Die Menge aller orthogonalen Abbildung auf V wird mit $O(V)$ bezeichnet und sie bildet eine Gruppe.

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ orthogonal, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass f die Norm erhält. Hierbei ist wie immer $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.
Die Menge aller orthogonalen Abbildung auf V wird mit $O(V)$ bezeichnet und sie bildet eine Gruppe. Sie haben sich in der linearen Algebra überlegt, dass $\det(f) = \pm 1$ für jedes $f \in O(V)$ gilt. Wir setzen

$$SO(V) := \{f \in O(V), \det(f) = 1\}.$$

Wiederholung zu orthogonalen Abbildungen

Es sei $(V, \langle -, - \rangle$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ orthogonal, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass f die Norm erhält.
Hierbei ist wie immer $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.
Die Menge aller orthogonalen Abbildung auf V wird mit $O(V)$ bezeichnet und sie bildet eine Gruppe. Sie haben sich in der linearen Algebra überlegt, dass $\det(f) = \pm 1$ für jedes $f \in O(V)$ gilt. Wir setzen

$$SO(V) := \{f \in O(V), \det(f) = 1\}.$$

Dies ist die spezielle orthogonale Gruppe.
Sie haben in der linearen Algebra Normalformen für die zugehörigen Matrizen kennengelernt.

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$.

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$. Diese Spiegelungen haben Determinante -1. Jedes $f \in SO(V)$ läßt sich als Produkt von höchstens k Spiegelungen schreiben, wobei k gerade ist und $k \leq \dim_{\mathbb{R}} V$.

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$. Diese Spiegelungen haben Determinante -1. Jedes $f \in SO(V)$ läßt sich als Produkt von höchstens k Spiegelungen schreiben, wobei k gerade ist und $k \leq \dim_{\mathbb{R}} V$.

Lemma Für jedes $f \in O(V)$ gilt: $f \circ s_a = s_{f(a)} \circ f$.

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$. Diese Spiegelungen haben Determinante -1. Jedes $f \in SO(V)$ läßt sich als Produkt von höchstens k Spiegelungen schreiben, wobei k gerade ist und $k \le \dim_{\mathbb{R}} V$.

Lemma Für jedes $f \in O(V)$ gilt: $f \circ s_a = s_{f(a)} \circ f$.

Beweis Wir rechnen nach, was auf einem beliebigen $v \in V$ passiert:

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$. Diese Spiegelungen haben Determinante -1. Jedes $f \in SO(V)$ läßt sich als Produkt von höchstens k Spiegelungen schreiben, wobei k gerade ist und $k \leq \dim_{\mathbb{R}} V$.

Lemma Für jedes $f \in O(V)$ gilt: $f \circ s_a = s_{f(a)} \circ f$.

Beweis Wir rechnen nach, was auf einem beliebigen $v \in V$ passiert:

$$\begin{aligned} f(s_a(v)) &= f(v - 2\langle a, v\rangle a) \\ &= f(v) - 2\langle a, v\rangle f(a) \\ &= f(v) - 2\langle f(a), f(v)\rangle f(a) \\ &= s_{f(a)}(f(v)). \end{aligned}$$

Wichtig für uns heute ist, dass die Gruppe $O(V)$ von den Spiegelungen

$$s_a\colon V \to V, \quad s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle a$$

erzeugt wird. Hierbei ist $a \in V$ mit $|a| = 1$. Diese Spiegelungen haben Determinante -1. Jedes $f \in SO(V)$ läßt sich als Produkt von höchstens k Spiegelungen schreiben, wobei k gerade ist und $k \leq \dim_{\mathbb{R}} V$.

Lemma   Für jedes $f \in O(V)$ gilt: $f \circ s_a = s_{f(a)} \circ f$.

Beweis   Wir rechnen nach, was auf einem beliebigen $v \in V$ passiert:

$$\begin{aligned} f(s_a(v)) &= f(v - 2\langle a, v\rangle a) \\ &= f(v) - 2\langle a, v\rangle f(a) \\ &= f(v) - 2\langle f(a), f(v)\rangle f(a) \\ &= s_{f(a)}(f(v)). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir bei der zweiten Umformung die Linearität von f benutzt und bei der dritten die Orthogonalität von f. $\square$

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.
Lemma Für jede Paar $a, b \in \mathbb{S}^3$ sind die Abbildungen

$$x \mapsto axb \text{ und } x \mapsto a\bar{x}b$$

orthogonale Abbildungen auf $\mathbb{H}$.

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.
Lemma Für jede Paar $a, b \in \mathbb{S}^3$ sind die Abbildungen

$$x \mapsto axb \text{ und } x \mapsto a\bar{x}b$$

orthogonale Abbildungen auf $\mathbb{H}$.
Beweis Wir hatten letztes Mal gesehen, dass die Norm multiplikativ auf $\mathbb{H}$ ist. Damit folgt

$$|axb| = |a||x||b| = |x| \text{ und } |a\bar{x}b| = |a||\bar{x}||b| = |x|,$$

weil a und b Norm 1 haben und weil $|\bar{x}| = |x|$ gilt. $\square$

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.
Lemma Für jede Paar $a, b \in \mathbb{S}^3$ sind die Abbildungen

$$x \mapsto axb \text{ und } x \mapsto a\bar{x}b$$

orthogonale Abbildungen auf $\mathbb{H}$.
Beweis Wir hatten letztes Mal gesehen, dass die Norm multiplikativ auf $\mathbb{H}$ ist. Damit folgt

$$|axb| = |a||x||b| = |x| \text{ und } |a\bar{x}b| = |a||\bar{x}||b| = |x|,$$

weil a und b Norm 1 haben und weil $|\bar{x}| = |x|$ gilt. $\square$
Wir möchten die Spiegelung s_a für $a \in \mathbb{S}^3$ genauer untersuchen.
Dazu brauchen wir die sogenannte Dreier-Identität:

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.
Lemma Für jede Paar $a, b \in \mathbb{S}^3$ sind die Abbildungen

$$x \mapsto axb \text{ und } x \mapsto a\bar{x}b$$

orthogonale Abbildungen auf $\mathbb{H}$.
Beweis Wir hatten letztes Mal gesehen, dass die Norm multiplikativ auf $\mathbb{H}$ ist. Damit folgt

$$|axb| = |a||x||b| = |x| \text{ und } |a\bar{x}b| = |a||\bar{x}||b| = |x|,$$

weil a und b Norm 1 haben und weil $|\bar{x}| = |x|$ gilt. □
Wir möchten die Spiegelung s_a für $a \in \mathbb{S}^3$ genauer untersuchen.
Dazu brauchen wir die sogenannte Dreier-Identität:
Für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt:

$$yxy = 2\langle \bar{x}, y\rangle y - \langle y, y\rangle \bar{x}.$$

Wir betrachten speziell $O(\mathbb{H}) \cong O(\mathbb{R}^4)$ und $O(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \cong O(\mathbb{R}^3)$.
Lemma Für jede Paar $a, b \in \mathbb{S}^3$ sind die Abbildungen

$$x \mapsto axb \text{ und } x \mapsto a\bar{x}b$$

orthogonale Abbildungen auf $\mathbb{H}$.
Beweis Wir hatten letztes Mal gesehen, dass die Norm multiplikativ auf $\mathbb{H}$ ist. Damit folgt

$$|axb| = |a||x||b| = |x| \text{ und } |a\bar{x}b| = |a||\bar{x}||b| = |x|,$$

weil a und b Norm 1 haben und weil $|\bar{x}| = |x|$ gilt. $\square$
Wir möchten die Spiegelung s_a für $a \in \mathbb{S}^3$ genauer untersuchen.
Dazu brauchen wir die sogenannte Dreier-Identität:
Für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt:

$$yxy = 2\langle \bar{x}, y\rangle y - \langle y, y\rangle \bar{x}.$$

Dieses dreifache Produkt läßt sich also als Linearkombination von y und $\bar{x}$ beschreiben.

Beweis Wir hatten ja schon überlegt, dass (wie für $\mathbb{C}$) für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt:

$$x\bar{x} = \langle x, x \rangle e.$$

Beweis Wir hatten ja schon überlegt, dass (wie für $\mathbb{C}$) für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt:

$$x\bar{x} = \langle x, x \rangle e.$$

Setzt man für x den Wert $x + y$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) = \langle x + y, x + y \rangle e \\ &= \langle x, x \rangle e + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + \langle y, y \rangle e \\ &= x\bar{x} + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + y\bar{y}. \end{aligned}$$

Beweis Wir hatten ja schon überlegt, dass (wie für $\mathbb{C}$) für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt:

$$x\bar{x} = \langle x, x \rangle e.$$

Setzt man für x den Wert $x + y$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) = \langle x + y, x + y \rangle e \\ &= \langle x, x \rangle e + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + \langle y, y \rangle e \\ &= x\bar{x} + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + y\bar{y}. \end{aligned}$$

Weglassen der übereinstimmenden Terme ergibt damit

$$x\bar{y} + y\bar{x} = 2\langle x, y \rangle e.$$

Beweis Wir hatten ja schon überlegt, dass (wie für $\mathbb{C}$) für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt:

$$x\bar{x} = \langle x, x \rangle e.$$

Setzt man für x den Wert $x + y$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} &= (x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = \langle x+y, x+y \rangle e \\ &= \langle x, x \rangle e + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + \langle y, y \rangle e \\ &= x\bar{x} + \langle x, y \rangle e + \langle y, x \rangle e + y\bar{y}. \end{aligned}$$

Weglassen der übereinstimmenden Terme ergibt damit

$$x\bar{y} + y\bar{x} = 2\langle x, y \rangle e.$$

Wir erhalten durch Ersetzen von x durch $\bar{x}$

$$\bar{x}\bar{y} + yx = 2\langle \bar{x}, y \rangle e$$

Beweis Wir hatten ja schon überlegt, dass (wie für $\mathbb{C}$) für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt:

$$x\bar{x} = \langle x, x\rangle e.$$

Setzt man für x den Wert $x + y$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} &= (x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = \langle x+y, x+y\rangle e \\ &= \langle x, x\rangle e + \langle x, y\rangle e + \langle y, x\rangle e + \langle y, y\rangle e \\ &= x\bar{x} + \langle x, y\rangle e + \langle y, x\rangle e + y\bar{y}. \end{aligned}$$

Weglassen der übereinstimmenden Terme ergibt damit

$$x\bar{y} + y\bar{x} = 2\langle x, y\rangle e.$$

Wir erhalten durch Ersetzen von x durch $\bar{x}$

$$\bar{x}\bar{y} + yx = 2\langle \bar{x}, y\rangle e$$

und durch Rechtsmultiplikation mit y wird dies zu

$$\langle y, y\rangle \bar{x} + yxy = \bar{x}\bar{y}y + yxy = 2\langle \bar{x}, y\rangle y.$$

$\square$

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$.

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $s_e(x) = -\bar{x}$.

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $s_e(x) = -\bar{x}$.

Beweis Mit der Dreier-Identität erhalten wir

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + \langle a, a\rangle x$$

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $s_e(x) = -\bar{x}$.

Beweis Mit der Dreier-Identität erhalten wir

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + \langle a, a\rangle x$$

und da a Norm eins hat, folgt

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + x = x - 2\langle a, x\rangle a = s_a(x).$$

$\square$

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $s_e(x) = -\bar{x}$.

Beweis Mit der Dreier-Identität erhalten wir

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + \langle a, a\rangle x$$

und da a Norm eins hat, folgt

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + x = x - 2\langle a, x\rangle a = s_a(x).$$

$\square$

Wir setzen $p_a(x) := axa$ wiederum für $a \in \mathbb{S}^3$. Dann ist $p_a = s_a \circ s_e$ und allgemein $s_a \circ s_b = p_a \circ p_{\bar{b}}$.

Korollar Es sei $a \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$s_a(x) = -a\bar{x}a$$

für alle $x \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $s_e(x) = -\bar{x}$.

Beweis Mit der Dreier-Identität erhalten wir

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + \langle a, a\rangle x$$

und da a Norm eins hat, folgt

$$-a\bar{x}a = -2\langle x, a\rangle a + x = x - 2\langle a, x\rangle a = s_a(x).$$

$\square$

Wir setzen $p_a(x) := axa$ wiederum für $a \in \mathbb{S}^3$. Dann ist $p_a = s_a \circ s_e$ und allgemein $s_a \circ s_b = p_a \circ p_{\bar{b}}$.

Da wir jede Drehung $f \in SO(\mathbb{H})$ als Produkt von höchstens vier Spiegelungen schreiben können, können wir also f auch als Produkt von höchstens vier Abbildungen p_a schreiben. Damit ist die Gruppe $O(\mathbb{H})$ erzeugt von den Abbildungen p_a und der Konjugation $x \mapsto \bar{x}$.

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Beweis Wir schreiben $g \in SO(\mathbb{H})$ als $p_u \circ p_v \circ p_w \circ p_z$,

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Beweis Wir schreiben $g \in SO(\mathbb{H})$ als $p_u \circ p_v \circ p_w \circ p_z$, also $g(x) = uvwzxzwvu$ mit $u, v, w, z \in \mathbb{S}^3$.

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Beweis Wir schreiben $g \in SO(\mathbb{H})$ als $p_u \circ p_v \circ p_w \circ p_z$, also $g(x) = uvwzxzwvu$ mit $u, v, w, z \in \mathbb{S}^3$. Mit $a := uvwz$ und $b = zwvu$ folgt die erste Behauptung.

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Beweis Wir schreiben $g \in SO(\mathbb{H})$ als $p_u \circ p_v \circ p_w \circ p_z$, also $g(x) = uvwzxzwvu$ mit $u, v, w, z \in \mathbb{S}^3$. Mit $a := uvwz$ und $b = zwvu$ folgt die erste Behauptung.
Hat g Determinante -1, so ist $g \circ s_e \in SO(\mathbb{H})$ also

$$g \circ s_e(x) = axb$$

wie oben.

Satz Zu jeder orthogonalen Abbildung $g \in O(\mathbb{H})$ gibt es $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit

$$g(x) = axb, \text{ falls } g \in SO(4)$$

und

$$g(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } \det(g) = -1.$$

Beweis Wir schreiben $g \in SO(\mathbb{H})$ als $p_u \circ p_v \circ p_w \circ p_z$, also $g(x) = uvwzxzwvu$ mit $u, v, w, z \in \mathbb{S}^3$. Mit $a := uvwz$ und $b = zwvu$ folgt die erste Behauptung.
Hat g Determinante -1, so ist $g \circ s_e \in SO(\mathbb{H})$ also

$$g \circ s_e(x) = axb$$

wie oben. Dann ist $g(-\bar{x}) = axb$ und $g(x) = c\bar{x}b$ mit $c := -a$. $\square$

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$.

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.
Umgekehrt bildet jedes $g \in SO(\mathbb{H})$ mit $g(e) = e$ den Unterraum $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auf sich ab, weil dann $b = \bar{a} = a^{-1}$ gelten muss und

$$\overline{ax\bar{a}} = a\bar{x}\bar{a} = a(-x)\bar{a} = -ax\bar{a} \text{ für } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.
Umgekehrt bildet jedes $g \in SO(\mathbb{H})$ mit $g(e) = e$ den Unterraum $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auf sich ab, weil dann $b = \bar{a} = a^{-1}$ gelten muss und

$$\overline{ax\bar{a}} = a\bar{x}\bar{a} = a(-x)\bar{a} = -ax\bar{a} \text{ für } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

Wir fassen a jetzt als Variable auf und definieren

$$\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H})),\ \varphi(a)(x) = ax\bar{a}.$$

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.
Umgekehrt bildet jedes $g \in SO(\mathbb{H})$ mit $g(e) = e$ den Unterraum $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auf sich ab, weil dann $b = \bar{a} = a^{-1}$ gelten muss und

$$\overline{ax\bar{a}} = a\bar{x}\bar{a} = a(-x)\bar{a} = -ax\bar{a} \text{ für } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

Wir fassen a jetzt als Variable auf und definieren

$$\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H})),\ \varphi(a)(x) = ax\bar{a}.$$

Analog betrachten wir

$$\psi\colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(\mathbb{H}),\ \psi(a,b)(x) = ax\bar{b}.$$

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.
Umgekehrt bildet jedes $g \in SO(\mathbb{H})$ mit $g(e) = e$ den Unterraum $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auf sich ab, weil dann $b = \bar{a} = a^{-1}$ gelten muss und

$$\overline{ax\bar{a}} = a\bar{x}\bar{a} = a(-x)\bar{a} = -ax\bar{a} \text{ für } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

Wir fassen a jetzt als Variable auf und definieren

$$\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H})),\ \varphi(a)(x) = ax\bar{a}.$$

Analog betrachten wir

$$\psi\colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(\mathbb{H}),\ \psi(a,b)(x) = ax\bar{b}.$$

Bevor wir jetzt den Hauptsatz beweisen, brauchen wir noch ein Hilfsresultat über das Zentrum von $\mathbb{H}$.

Uns interessiert insbesondere die Gruppe $SO(3) \cong SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$. Ein $f \in SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ können wir ausdehnen zu einer Abbildung $\tilde{f} \in SO(4) \cong SO(\mathbb{H})$, indem wir $\tilde{f}(e) = e$ setzen.
Umgekehrt bildet jedes $g \in SO(\mathbb{H})$ mit $g(e) = e$ den Unterraum $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auf sich ab, weil dann $b = \bar{a} = a^{-1}$ gelten muss und

$$\overline{ax\bar{a}} = a\bar{x}\bar{a} = a(-x)\bar{a} = -ax\bar{a} \text{ für } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

Wir fassen a jetzt als Variable auf und definieren

$$\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to SO(\mathrm{Im}(\mathbb{H})),\ \varphi(a)(x) = ax\bar{a}.$$

Analog betrachten wir

$$\psi\colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(\mathbb{H}),\ \psi(a,b)(x) = ax\bar{b}.$$

Bevor wir jetzt den Hauptsatz beweisen, brauchen wir noch ein Hilfsresultat über das Zentrum von $\mathbb{H}$.

$$Z(\mathbb{H}) := \{u \in \mathbb{H}, uv = vu \text{ für alle } v \in \mathbb{H}\}$$

heißt *das Zentrum von* $\mathbb{H}$.

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Es ist klar, dass alle αe mit allen Quaternionen kommutieren (und dass u mit u kommutiert).

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Es ist klar, dass alle αe mit allen Quaternionen kommutieren (und dass u mit u kommutiert). Daher ist

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \{x \in \mathbb{H}, xv = vx\}$$

für $v = \alpha e + u$.

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Es ist klar, dass alle αe mit allen Quaternionen kommutieren (und dass u mit u kommutiert). Daher ist

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \{x \in \mathbb{H}, xv = vx\}$$

für $v = \alpha e + u$. Wir dürfen daher annehmen, dass $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ ist.

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Es ist klar, dass alle αe mit allen Quaternionen kommutieren (und dass u mit u kommutiert). Daher ist

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \{x \in \mathbb{H}, xv = vx\}$$

für $v = \alpha e + u$. Wir dürfen daher annehmen, dass $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ ist. Durch Ersetzen von x durch $x - \alpha e$ und Normierung können wir $u^2 = -e = x^2$ erhalten.

Satz Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$.

Beweis Wir zeigen eine stärkere Aussage, nämlich, dass für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}e$ gilt

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}u.$$

Es ist klar, dass alle αe mit allen Quaternionen kommutieren (und dass u mit u kommutiert). Daher ist

$$\{x \in \mathbb{H}, ux = xu\} = \{x \in \mathbb{H}, xv = vx\}$$

für $v = \alpha e + u$. Wir dürfen daher annehmen, dass $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ ist. Durch Ersetzen von x durch $x - \alpha e$ und Normierung können wir $u^2 = -e = x^2$ erhalten. Dann folgt allerdings

$$(x-u)(x+u) = x^2 - ux + xu - u^2 = 0,$$

also $x = \pm u$. $\square$

Beweis des Hauptresultats

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e, e)\}$.

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e, e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e, e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e,e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\varphi(ab)(x) = abx\overline{ab} = abx\bar{b}\bar{a} = \varphi(a)(\varphi(b)(x)).$$

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e, e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\varphi(ab)(x) = abx\overline{ab} = abx\bar{b}\bar{a} = \varphi(a)(\varphi(b)(x)).$$

Ist $a \in \ker(\varphi)$, so ist also $\varphi(a)(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, also

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e,e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\varphi(ab)(x) = abx\overline{ab} = abx\bar{b}\bar{a} = \varphi(a)(\varphi(b)(x)).$$

Ist $a \in \ker(\varphi)$, so ist also $\varphi(a)(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, also

$$axa^{-1} = ax\bar{a} = x \text{ für alle } x.$$

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e,e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\varphi(ab)(x) = abx\overline{ab} = abx\bar{b}\bar{a} = \varphi(a)(\varphi(b)(x)).$$

Ist $a \in \ker(\varphi)$, so ist also $\varphi(a)(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, also

$$axa^{-1} = ax\bar{a} = x \text{ für alle } x.$$

Damit ist $a \in Z(\mathbb{H})$, also in $\mathbb{R}e$.

Beweis des Hauptresultats

Wir zeigen, dass φ und ψ Gruppenhomomorphismen sind mit Kern $\{\pm e\}$ bzw. $\{\pm(e,e)\}$. Wir führen den Beweis für φ; der für ψ läuft völlig analog.
Die Homomorphieeigenschaft folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\varphi(ab)(x) = abx\overline{ab} = abx\bar{b}\bar{a} = \varphi(a)(\varphi(b)(x)).$$

Ist $a \in \ker(\varphi)$, so ist also $\varphi(a)(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, also

$$axa^{-1} = ax\bar{a} = x \text{ für alle } x.$$

Damit ist $a \in Z(\mathbb{H})$, also in $\mathbb{R}e$. Da $|a| = 1$ gilt, ist damit $a = \pm e$. $\square$