

# Topologie, Wintersemester 2024/25

Birgit Richter

FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT HAMBURG, BUNDESSTRASSE 55, 20146 HAMBURG,  
GERMANY

*Email address:* `birgit.richter@uni-hamburg.de`, 20. Dezember 2024



# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Mengentheoretische Topologie	5
Einleitung	5
1. Metrische Räume	6
2. Topologische Räume	9
3. Basen, Subbasen und Umgebungen	11
4. Vergleich von Topologien	14
5. Unterräume	15
6. Trennungsaxiome	16
7. Initialtopologie und Produkte	19
8. Finaltopologie und Summen	21
9. Zusammenhang	23
10. Quotientenräume	27
11. Filter	31
12. Kompaktheit	34
13. Kompaktifizierungen	37
14. Direkte und inverse Limites topologischer Räume	40
Kapitel 2. Elementare Homotopietheorie	45
1. Homotopien	45
2. Die Fundamentalgruppe	47
3. Die Fundamentalgruppe der Kreislinie	50
4. Satz von Seifert-van Kampen	58
5. Transformationsgruppen	66
Literaturverzeichnis	73



# Mengentheoretische Topologie

## Einleitung

Die Topologie ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften geometrischer Objekte, die unter stetigen Verformungen erhalten bleiben. Die Topologie ist wichtig für die algebraische Topologie, die Geometrie, die Analysis, Funktionalanalysis und die Theorie der Lie-Gruppen. Sie hat wichtige Beziehungen zur Mengenlehre und Kategorientheorie.

Die moderne Formulierung der Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie hat sich relativ spät herausgebildet.

- 1906: Fréchet definiert metrische Räume.
- 1914: Felix Hausdorff definiert topologische Räume über den Umgebungsbegriff. Er nimmt an, dass ein Trennungsassiom gilt, welches man später nach ihm benannt hat und welches wir noch kennenlernen werden.
- 1925: Alexandroff definiert Topologien im heutigen Sinn.

Topologische Probleme wurden schon früher untersucht, zum Beispiel 1736 durch Euler beim Königsberger Brückenproblem: Gibt es einen Rundweg, bei dem man jede der sieben Brücken in Königsberg genau einmal überquert? Das Problem ist topologisch, weil es nicht auf die genaue Lage der Brücken ankommt. Das Problem ist invariant unter stetiger Deformation; entscheidend ist nur der zugrundeliegende Graph.

Wir werden in dieser Vorlesung erst Grundlagen der mengentheoretischen Topologie und dann einfache Begriffe der algebraischen Topologie kennenlernen. Diese hat das Ziel, topologischen Räumen und stetigen Abbildungen diskrete bzw. algebraische Objekte zuzuordnen. Ein Beispiel für eine diskrete Invariante ist das Folgende:

**Beispiel:** Es sei  $X$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Zwei Punkte  $x, y \in X$  heißen *Weg-äquivalent*, wenn es einen Weg gibt, der  $x$  und  $y$  verbindet, also eine stetige Abbildung  $w: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ . Wir schreiben dann  $x \sim y$ ; dies definiert eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit  $\pi_0(X)$  bezeichnet und heißt Menge der Wegekompenten. Dies liefert wirklich eine Invariante:

**Lemma:** Sind  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y \subset \mathbb{R}^m$  und sind  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ , so sind die Mengen  $\pi_0(X)$  und  $\pi_0(Y)$  gleichmächtig.

Die Beweisidee ist, Wege mittels  $f$  und  $g$  zu transportieren.

**Satz:** Es sei  $n \geq 2$ . Dann gibt es keine stetigen Abbildungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  und  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ .

**Beweis:** Indem wir gegebenenfalls eine Verschiebung vornehmen, können wir annehmen, dass  $f(0) = 0$  und  $g(0) = 0$  gilt. Für die Einschränkungen  $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$  und  $g|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$  gilt dann

$$g|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \circ f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

und

$$f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \circ g|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}},$$

aber die Menge  $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  hat zwei Elemente und die Menge  $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  hat für  $n \geq 2$  nur ein Element.

## 1. Metrische Räume

Aus der Analysis sind Sie mit der *Standardmetrik* oder auch der *euklidischen Metrik* auf dem  $\mathbb{R}^n$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n$$

vertraut.

DEFINITION 1.1. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Funktion

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Positivität:  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- (b) Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$ .
- (c) Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

Die reelle Zahl  $d(x, y)$  für  $x, y \in X$  heißt auch der *Abstand* von  $x$  und  $y$ ,

BEISPIELE. Die folgenden Räume sind metrische Räume:

- (a) Der  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik.
- (b) Der  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

- (c) Der  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

- (d) Der  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik

$$d_r(x, y) = \sqrt{d_2(x, y)}.$$

Diese Metrik stammt nicht von einer Norm.

- (e) Auf einer beliebigen Menge  $X$  gibt es immer die *diskrete Metrik* mit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

- (f) Auf dem Raum  $C([0, 1], \mathbb{R})$  der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert das Integral eine Metrik

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

BEMERKUNGEN. Teilmengen und Produkte metrischer Räume tragen wiederum eine Metrik:

- (a) Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Dann versteht die Einschränkung  $d|_{Y \times Y}$  die Teilmenge  $Y$  mit der Struktur eines metrischen Raumes.
- (b) Sind  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume, so hat auch das kartesische Produkt  $X_1 \times X_2$  durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

die Struktur eines metrischen Raumes.

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\varepsilon > 0$ . Dann führen wir für  $x \in X$  die Teilmenge

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

ein, die *offene Kugel vom Radius  $\varepsilon$  um  $x$* .

DEFINITION 1.2. Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt eine *Umgebung von  $x \in X$* , wenn sie eine offene Kugel um  $x$  enthält, also falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$  gilt.

- (b) Eine Teilmenge  $O \subset X$  heißt *offen*, falls es für jedes  $x \in O$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset O$  gilt, wenn also die Teilmenge  $O$  eine Umgebung jedes seiner Elemente ist.
- (c) Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

BEMERKUNGEN. Einige Eigenschaften sehen Sie sofort:

- (a) Jede offene Kugel  $B_\varepsilon(x)$  in einem metrischen Raum ist offen und insbesondere eine Umgebung von  $x$ . Denn sei  $y \in B_\varepsilon(x)$  beliebig. Setze  $\varepsilon' := \varepsilon - d(x, y) > 0$ . Dann ist  $B_{\varepsilon'}(y) \subset B_\varepsilon(x)$ . Denn ein  $z$  ist genau dann in  $B_{\varepsilon'}(y)$ , wenn  $d(z, y) < \varepsilon'$  und damit erhalten wir

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon' + d(x, y) = \varepsilon,$$

also  $z \in B_\varepsilon(x)$ .

- (b) Für jedes Element  $x$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist die Menge  $\{x\}$  abgeschlossen. Denn für  $y \in X \setminus \{x\}$  wählen wir ein  $\varepsilon < d(x, y)$  und erhalten  $B_\varepsilon(y) \subset X \setminus \{x\}$ . Also ist das Komplement  $X \setminus \{x\}$  offen.

SATZ 1.3. *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.*

- (U1) *Jede Umgebung von  $x \in X$  enthält auch  $x$ . Der metrische Raum  $X$  selbst ist eine Umgebung von  $x$ .*
- (U2) *Ist  $U$  eine Umgebung von  $x \in X$  und  $U \subset V$ , so ist auch  $V$  eine Umgebung von  $x$ .*
- (U3) *Sind  $U_1, U_2$  Umgebungen von  $x \in X$ , so auch ihr Schnitt  $U_1 \cap U_2$ .*
- (U4) *Ist  $U$  eine Umgebung von  $x \in X$ , so gibt es eine weitere Umgebung  $V$  von  $x$ , so dass  $U$  eine Umgebung aller  $y \in V$  ist.*

BEWEIS. Die Aussagen (U1) und (U2) sind klar. Für (U3) gibt es offene Kugeln  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $B_{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x) \subset U_1 \cap U_2$  und  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ .

Zum Beweis von (U4) bemerken wir, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$  gilt. Dann hat  $V := B_\varepsilon(x)$  die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

SATZ 1.4. *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt*

- (O1) *Die Mengen  $\emptyset$  und  $X$  sind offen.*
- (O2) *Mit zwei Mengen  $O_1, O_2$  ist auch ihr Schnitt  $O_1 \cap O_2$  offen.*
- (O3) *Für eine beliebige Familie  $(O_i)_{i \in I}$  offener Mengen ist auch die Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} O_i$  offen.*

BEWEIS. (O1) Für  $\emptyset$  ist die leere Bedingung erfüllt. Für  $X$  ist die Aussage (U1).

- (O2) Für jedes  $x \in O_1 \cap O_2$  finden wir offene Kugeln  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $B_{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x) \subset O_1 \cap O_2$  und somit ist der Schnitt  $O_1 \cap O_2$  offen. Allgemein sind endliche Schnitte offener Mengen offen.
- (O3) Liegt  $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$ , so gibt es wenigstens ein  $i \in I$  mit  $x \in O_i$ . Da  $O_i$  offen ist, finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset O_i$ . Dann ist auch  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ .  $\square$

Für den nächsten Satz erinnern wir an die de Morganschen Regeln: das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente,

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$$

und das Komplement eines Schnitts ist die Vereinigung der Komplemente,

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i).$$

SATZ 1.5. *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt*

- (A1) *Die Mengen  $\emptyset, X$  sind abgeschlossen.*
- (A2) *Mit zwei Mengen  $A_1, A_2$  ist auch ihre Vereinigung  $A_1 \cup A_2$  abgeschlossen.*
- (A3) *Für eine beliebige Familie  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossener Mengen ist auch der Schnitt  $\bigcap_{i \in I} A_i$  abgeschlossen.*

BEWEIS. Wir betrachten Komplemente:

- (A1) Es gilt  $\emptyset = X \setminus X$  und  $X = X \setminus \emptyset$  und  $X$  und  $\emptyset$  sind nach Satz 1.4 (O1) offen.

(A2) Die Mengen  $O_i := X \setminus A_i$  sind offen. Nach Satz 1.4 (O2) ist somit

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = O_1 \cap O_2$$

offen.

(A3) Die Mengen  $O_i := X \setminus A_i$  sind offen. Nach Satz 1.4 (O3) ist

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i = \bigcup_{i \in I} O_i$$

offen. □

DEFINITION 1.6. Es seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume.

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  heißt *stetig in*  $x \in X$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $d(x, y) < \delta$  folgt,  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .
- (b) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  heißt *stetig*, wenn sie in allen  $x \in X$  stetig ist.
- (c) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $d(x, y) < \delta$  folgt  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$  für alle  $x, y \in X$ .

Wir erinnern an folgende Eigenschaften von Urbildern einer Abbildung  $f: X \rightarrow X'$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ f^{-1}(X') &= X \\ f^{-1}(M \cup N) &= f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \\ f^{-1}(M \cap N) &= f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \\ f^{-1}(X' \setminus N) &= f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(N) = X \setminus f^{-1}(N) \\ M \subseteq N &\Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N) \end{aligned}$$

SATZ 1.7. Es seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist stetig.
- (b) Für jedes  $x \in X$  und für jede Umgebung  $V$  von  $f(x)$  ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$ .
- (c) Ist  $O$  offen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(O)$  offen in  $X$ .
- (d) Ist  $A$  abgeschlossen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X$ .

BEWEIS. Für (a) $\Rightarrow$ (b) sei  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$ . Da  $f$  als stetig vorausgesetzt ist, finden wir ein  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ .

Nun gilt  $E \subset f^{-1}f(E)$  für alle Teilmengen  $E \subset X$ . Somit ist

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}B_\varepsilon(f(x)) \subset f^{-1}(V)$$

und wir erhalten, dass  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$  ist.

Die Richtung (b) $\Rightarrow$ (c) ist klar, denn eine Menge ist offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Elemente ist.

Für (c) $\Rightarrow$ (d) nehmen wir an, dass  $A \subset Y$  abgeschlossen ist, also ist  $O := Y \setminus A$  offen. Deswegen ist

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus O) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(O) = X \setminus f^{-1}(O)$$

abgeschlossen.

Für (d) $\Rightarrow$ (a) sei  $x \in X$  beliebig. Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist die Menge  $Y \setminus B_\varepsilon(f(x))$  abgeschlossen und somit ist nach Voraussetzung  $f^{-1}(Y \setminus B_\varepsilon(f(x))) = X \setminus f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset X$  abgeschlossen. Dann ist das Komplement  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$  offen und enthält  $x$ , so dass es  $\delta > 0$  gibt mit  $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ , also  $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ . □

Man überzeugt sich mit ähnlichen Argumenten, dass  $f: X \rightarrow Y$  genau dann in  $x \in X$  stetig ist im Sinne von Definition 1.6.1, wenn für jede Umgebung  $V$  von  $f(x)$  die Menge  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$  ist.

DEFINITION 1.8. Zwei Metriken  $d_1, d_2$  auf einer Menge  $X$  heißen

(a) *stark äquivalent*, falls es  $\alpha, \beta > 0$  gibt, so dass für alle  $x, y \in X$  gilt

$$\alpha d_1(x, y) < d_2(x, y) < \beta d_1(x, y).$$

(b) Sie sind *äquivalent*, wenn es für jedes  $x \in X$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} d_1(x, y) < \delta &\Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon \\ d_2(x, y) < \delta &\Rightarrow d_1(x, y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN. Wieso interessiert es uns, ob Metriken äquivalent sind?

(a) Sind zwei Metriken  $d_1, d_2$  äquivalent, so gibt es für jede Kugel  $B_\varepsilon^{d_1}(x)$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\varepsilon^{d_1}(x)$  und umgekehrt. Äquivalente Metriken ergeben also dieselben offenen und somit auch dieselben abgeschlossenen Mengen.

(b) Sind  $d_1$  und  $d_2$  äquivalent, so sind die Abbildungen

$$\text{id}_X: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X: (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

stetig, weil alle Urbilder offener Mengen offen sind, so dass nach Satz 1.7 die Identitätsabbildung stetig ist.

(c) Sind  $d_1$  und  $d_2$  stark äquivalent, so sind die Abbildungen

$$\text{id}_X: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X: (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

sogar gleichmäßig stetig.

BEISPIELE.

(a) Wir betrachten auf  $\mathbb{R}$  die Metriken  $d(x, y) := |x^3 - y^3|$  sowie die euklidische Metrik  $d_2$ . Dann ist die Abbildung

$$\text{id}: (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

(b) Die Metriken  $d_1, d_2, d_\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$  sind stark äquivalent.

(c) Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine zu  $d$  äquivalente Metrik. Da für alle  $x, y \in X$   $d'(x, y) < 1$  gilt, ist die Metrik  $d'$  beschränkt. Insbesondere ist jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.

## 2. Topologische Räume

Stetige Abbildungen sollen für uns der grundlegende Begriff sein. Aus Satz 1.7 folgt, dass hierfür nicht die Metrik selbst, sondern die durch die Metrik definierten offenen Mengen bzw. Umgebungen entscheidend sind. In topologischen Räumen werden die offenen Mengen zum grundlegenden Begriff. Wir orientieren uns an Satz 1.4:

DEFINITION 2.1. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge  $X$ , zusammen mit einer Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$ , für die gilt

(O1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

(O2) Mit  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  ist auch der Schnitt  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ .

(O3) Für eine beliebige Familie  $(O_i)_{i \in I}$  von Mengen  $O_i \in \mathcal{T}$  ist auch die Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

Dann heißt  $\mathcal{T}$  eine *Topologie* auf  $X$  und die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen *offene Mengen* von  $\mathcal{T}$ .

Es reicht auch aus zu fordern, dass  $\mathcal{T}$  abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen. Der Durchschnitt über die leere Indexmenge  $I = \emptyset$  ist  $X$ , weil eine leere Bedingung vorliegt, und die Vereinigung über  $\emptyset$  ist  $\emptyset$ .

BEISPIELE.

(a) Metrische Räume mit offenen Mengen wie in Definition 1.2 sind nach Satz 1.4 topologische Räume.

- (b) Jede Menge  $X$  wird durch die Potenzmenge,  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , zum topologischen Raum, in dem alle Mengen offen sind. Dies ist die *diskrete Topologie* auf  $X$ . Diese Topologie wird durch die diskrete Metrik definiert.
- (c) Die *indiskrete Topologie* (oder *Klumpentopologie*) auf einer Menge  $X$  ist gegeben durch  $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ .
- (d) Die *koendliche Topologie* auf einer Menge  $X$  wird durch die folgenden offenen Mengen definiert:  $O \subset X$  ist offen, wenn das Komplement  $X \setminus O$  endlich ist oder  $O = \emptyset$  gilt.
- Offensichtlich sind dann nach Annahme  $\emptyset$  und wegen  $X \setminus X = \emptyset$  auch  $X$  in der Topologie. Wegen der de Morganschen Regeln ist die Topologie unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

DEFINITION 2.2. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist, also wenn gilt  $X \setminus A \in \mathcal{T}$ .
- (b) Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *Umgebung* von  $x \in X$ , falls es eine offene Menge  $O \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in O \subset U$ . Mit  $\mathfrak{U}(x)$  bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von  $x \in X$  und nennen  $\mathfrak{U}(x)$  das *Umgebungssystem* von  $x$ .
- (c) Ein  $x \in X$  heißt *Berührungspunkt* einer Teilmenge  $B \subset X$ , falls für alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gilt  $U \cap B \neq \emptyset$ , also wenn in jeder Umgebung von  $x$  Elemente von  $B$  liegen.
- (d) Es sei  $B \subset X$  eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\bar{B} := \bigcap_{C \supset B, C \text{ abgeschlossen}} C$$

die *abgeschlossene Hülle* oder den *Abschluss* von  $B$ .

- (e) Ein  $x \in X$  heißt *innerer Punkt* einer Teilmenge  $B \subset X$ , falls es eine Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gibt mit  $x \in U \subset B$ .
- (f) Es sei  $B \subset X$  eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\overset{\circ}{B} := \bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$$

den *offenen Kern* von  $B$ .

- (g) Es sei  $B \subset X$  eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\partial B := \{x \in X \mid \text{für alle } U \in \mathfrak{U}(x) \text{ gilt } U \cap B \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus B)\} = \bar{B} \cap \overline{X \setminus B}$$

den *Rand* von  $B$ . Jede Umgebung eines Randpunkts von  $B$  enthält also Elemente von  $B$  und Elemente des Komplements von  $B$ .

SATZ 2.3.

- (a) Die abgeschlossenen Mengen für eine Topologie  $(X, \mathcal{T})$  erfüllen die Eigenschaften (A1)-(A3) aus Satz 1.5.
- (b) Die Umgebungen für eine Topologie  $(X, \mathcal{T})$  erfüllen die Eigenschaften (U1)-(U4) aus Satz 1.3.

BEMERKUNG. Um eine Topologie zu definieren, kann man abgeschlossenen Mengen angeben, die (A1), (A2) und (A3) erfüllen.

DEFINITION 2.4. Es seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{T}')$  topologische Räume.

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *stetig* in  $x \in X$ , wenn alle Urbilder der Umgebungen von  $f(x)$  Umgebungen von  $x$  sind, also wenn für jedes  $U \in \mathfrak{U}(f(x))$  gilt  $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$ .
- (b) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, also wenn für jedes  $O' \in \mathcal{T}'$  gilt  $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$ .

Wegen Satz 1.7 ist diese Definition im Falle metrischer Räume äquivalent zu Definition 1.6. Man überlegt sich leicht, dass die Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig ist. Man überlege sich auch, dass eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  genau dann stetig ist, wenn sie in jedem  $x \in X$  stetig ist.

SATZ 2.5. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (a) • Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge  $A \subset X$  ist abgeschlossen und es gilt  $A \subset \bar{A}$ .

- Es gilt genau dann  $\bar{A} = A$ , wenn  $A$  abgeschlossen ist.
  - Die abgeschlossene Hülle  $\bar{A}$  ist die Menge der Berührungspunkte von  $A$  in  $X$ .
- (b)
- Der offene Kern  $\overset{\circ}{B}$  einer Teilmenge  $B \subset X$  ist offen und es gilt  $\overset{\circ}{B} \subset B$ .
  - Es gilt genau dann  $\overset{\circ}{B} = B$ , wenn  $B$  offen ist.
  - Der offene Kern  $\overset{\circ}{B}$  ist die Menge der inneren Punkte von  $B$  in  $X$ .

BEWEIS. Wir zeigen nur die Aussagen in 2.5 (a); die Aussagen in Satz 2.5 (b) folgen dual.

Die ersten beiden Behauptungen folgen sofort: Als Schnitt abgeschlossener Mengen, die  $A$  enthalten, ist  $\bar{A}$  nach Satz 2.3 abgeschlossen und enthält  $A$ . Die zeigt die erste Aussage.

Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $A$  eine der Mengen, über die der Schnitt  $\bar{A}$  genommen wird, also gilt  $\bar{A} \subset A$ . Die Umkehrung folgt, weil  $\bar{A}$  als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Für den Beweis der letzten Behauptung nehmen wir zunächst an, dass  $x \in \bar{A}$  aber es gibt ein  $U \in \mathcal{U}(x)$  mit  $U \cap A = \emptyset$ , so dass  $x$  kein Berührungspunkt von  $A$  ist. Dann ist  $A \subset X \setminus U$ . Wir wählen ein offenes  $O \subset U$  mit  $x \in O$ . Dann ist  $X \setminus U \subset X \setminus O$  und  $X \setminus O$  ist abgeschlossen mit  $A \subset X \setminus O$ . Dann muss  $\bar{A} \subset X \setminus O$  sein, so dass  $x$  doch nicht in  $\bar{A}$  liegt.

Es sei umgekehrt  $x$  ein Berührungspunkt und wir nehmen an, dass  $x \notin \bar{A}$  gilt. Dann ist  $V := X \setminus \bar{A}$  offen und  $x \in V$ . Aber  $V \cap A = \emptyset$ , so dass  $x$  doch kein Berührungspunkt sein kann.  $\square$

BEMERKUNGEN.

- (a) Es seien  $A, B$  Teilmengen eines topologischen Raums  $X$ . Aus  $A \subset B$  folgt dann  $\bar{A} \subset \bar{B}$ , denn jede Menge, die im Schnitt  $\bigcap_{C \supset B, C \text{ abg.}} C$  auftritt, tritt auch im Schnitt  $\bigcap_{C \supset A, C \text{ abg.}} C$  auf.
- (b) Ebenso gilt  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ , denn jede Menge, die in der Vereinigung  $\bigcup_{O \subset A, O \text{ offen}} O$  auftritt, tritt auch in der Vereinigung  $\bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$  auf.
- (c) Es gilt  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  und  $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Dies besprechen wir in den Übungen.

DEFINITION 2.6. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge  $A \subset X$  liegt *dicht* in  $X$ , wenn der Abschluss von  $A$  gleich  $X$  ist,  $\bar{A} = X$ .
- (b) Eine Teilmenge  $A \subset X$  liegt *nirgends dicht*, wenn  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$  gilt.

BEISPIELE.

- Für  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  ist  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , also liegt  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  dicht.
- Ein Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  liegt nirgends dicht in  $\mathbb{R}^2$ .

DEFINITION 2.7. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X$  *konvergiert* gegen  $x \in X$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$ . Wir benutzen dann die Notation  $x_n \rightarrow x$ .

BEISPIEL. Wir betrachten die indiskrete Topologie  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ . Dann konvergiert jede Folge gegen jedes Element von  $X$ . Für eine Menge  $X$  mit mehr als zwei Elementen hat eine Folge also mehr als einen Grenzwert.

### 3. Basen, Subbasen und Umgebungen

Wir führen nun Begriffe ein, die es uns erlauben, Topologien explizit anzugeben.

DEFINITION 3.1. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (a) Eine Familie  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  heißt *Basis der Topologie*  $\mathcal{T}$ , wenn jedes  $O \in \mathcal{T}$  eine Vereinigung beliebig vieler  $B_i \in \mathcal{B}$  ist.
- (b) Eine Familie  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  heißt *Subbasis von*  $\mathcal{T}$ , falls jedes  $O \in \mathcal{T}$  eine beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen  $S \in \mathcal{S}$  ist.

BEISPIELE.

- (a) Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist die Menge  $\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$  eine Basis. Ist  $O \subset X$  offen, so finden wir für jedes  $x \in O$  eine offene Kugel  $B_\varepsilon(x) \subset O$  und können  $O$  schreiben als  $O = \bigcup_{x \in O} B_\varepsilon(x)$ .
- (b) Für die diskrete Topologie  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  ist  $\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in X\}$  eine Basis und im anderen Extremfall  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  ist  $\{X\}$  eine Basis.
- (c) Jedes System von Teilmengen  $\mathcal{S}$  von  $X$  ist Subbasis einer Topologie: Betrachtet man beliebige Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Teilmengen in  $\mathcal{S}$ , so sind die Axiome (O1),(O2) und (O3) automatisch erfüllt. Eine Basis dieser Topologie ist durch endliche Schnitte von Elementen aus  $\mathcal{S}$  gegeben,

$$\mathcal{B} := \{S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } S_{i_k} \in \mathcal{S}\}$$

und die Topologie ist

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_i B_i \mid B_i \in \mathcal{B} \right\}.$$

(Sub-)Basen ersparen viel Arbeit:

SATZ 3.2. *Es seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{T}')$  topologische Räume. Die folgenden Aussagen für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  sind äquivalent:*

- (a)  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  ist stetig.
- (b) Es sei  $\mathcal{B}'$  eine beliebige Basis von  $\mathcal{T}'$ . Für jedes  $B' \in \mathcal{B}'$  ist  $f^{-1}(B')$  offen, also  $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ .
- (c) Es sei  $\mathcal{S}'$  eine beliebige Subbasis von  $\mathcal{T}'$ . Für jedes  $S' \in \mathcal{S}'$  ist  $f^{-1}(S')$  offen, also  $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}$ .

BEWEIS. (a)  $\Rightarrow$  (b) und (a)  $\Rightarrow$  (c) sind klar, weil Elemente einer Basis offen sind. Da jede Basis auch eine Subbasis ist, folgt (c)  $\Rightarrow$  (b). Für (b)  $\Rightarrow$  (a) drücken wir eine offene Menge als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{B}'$  aus und wenden die Eigenschaften des Urbilds an.  $\square$

DEFINITION 3.3. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $\mathcal{B}(x) \subset \mathfrak{U}(x)$  des Umgebungssystems heißt *Umgebungsbasis von  $x$* , falls in jeder Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  ein  $B \in \mathcal{B}(x)$  liegt mit  $x \in B \subset U$ .

Insbesondere sind die Elemente einer Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  Umgebungen von  $x$ .

BEISPIEL. Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$ . Dann bilden die offenen Kugeln  $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Umgebungsbasis von  $x$ .

SATZ 3.4. *Es seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{T}')$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn  $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$  für alle  $U \in \mathcal{B}(f(x))$ , wobei  $\mathcal{B}(f(x))$  eine Umgebungsbasis von  $f(x)$  ist.*

BEWEIS. Ist  $f$  in  $x \in X$  stetig, so sind nach Definition die Urbilder von Umgebungen von  $f(x)$  Umgebungen von  $x$ , also insbesondere die Urbilder der Mengen in  $\mathcal{B}(f(x))$ .

Umgekehrt sei  $U$  eine beliebige Umgebung von  $f(x)$ . Dann enthält  $U$  eine Umgebung  $B \in \mathcal{B}(f(x))$ . Wir haben  $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(U)$  und  $f^{-1}(B)$  ist nach Voraussetzung eine Umgebung von  $x$ . Deswegen ist auch  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$ .  $\square$

Wir diskutieren nun Abzählbarkeitseigenschaften:

DEFINITION 3.5. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das Abzählbarkeitsaxiom

- (AZ1), wenn jedes  $x \in X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
- (AZ2), wenn die Topologie  $\mathcal{T}$  eine abzählbare Basis besitzt.

BEMERKUNG. Die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ2) impliziert (AZ1): Ist  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis, so betrachten wir für  $x \in X$  das System von Teilmengen  $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ .

Offenbar ist das System abzählbar. Es ist auch eine Umgebungsbasis von  $x$ : Es sei dazu  $x \in U$  eine Umgebung. Wir finden eine offene Menge  $x \in O \subset U$ , die als Vereinigung von Mengen in der Basis  $\mathcal{B}$  geschrieben werden kann:  $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ . Eine offene Menge  $O_i$  enthält  $x$ , also  $O_i \in \mathcal{B}(x)$  und es ist  $O_i \subset O \subset U$ .

BEISPIELE.

- (a) Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  gilt (AZ1): Betrachten Sie dazu für gegebenes  $x \in X$  die offenen Kugeln  $B_{1/n}(x)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Der  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Topologie erfüllt (AZ2): Nehmen Sie  $B_{1/n}(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{Q}^n$ .
- (c) Es sei  $X$  eine überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie. Dann gilt (AZ1), denn für jedes  $x \in X$  ist  $\{x\} \in \mathfrak{U}(x)$  eine einelementige Umgebungsbasis. Aber (AZ2) gilt nicht, denn alle einelementigen Mengen sind offen.

SATZ 3.6. *Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfülle die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1). Dann gilt:*

- (a) *Es  $x \in X$  ist genau dann ein Element von  $\overline{A}$ , wenn es eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  gibt mit  $a_n \rightarrow x$ .*
- (b) *Es sei  $(Y, \mathcal{T}')$  ein beliebiger weiterer topologischer Raum, der nicht unbedingt (AZ1) erfüllen muss. Dann ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn aus  $x_n \rightarrow x$  folgt, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .*

Gilt also die Abzählbarkeitsbedingung (AZ1) im Definitionsbereich, so reduziert sich Stetigkeit auf Folgenstetigkeit.

BEWEIS.

- Es gebe eine Folge  $a_n \rightarrow a$  mit  $a_n \in A$ . Dann liegen in jeder Umgebung  $U$  von  $a$  fast alle Folgenglieder, und diese sind Elemente von  $A$ . Also ist  $U \cap A \neq \emptyset$  für jede Umgebung  $U$  von  $a$ . Also ist  $a$  ein Berührungspunkt von  $A$ ; nach Satz 2.5 (a) gilt  $a \in \overline{A}$ . In diese Richtung geht die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1) nicht ein.
- Es sei umgekehrt  $x \in \overline{A}$ . Wir können wegen (AZ1) eine abzählbare Umgebungsbasis  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$  wählen. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} V_1 &:= U_1, \\ V_2 &:= U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

und induktiv  $V_n := V_{n-1} \cap U_n$ . Da  $x \in \overline{A}$  nach Satz 2.5 (a) Berührungspunkt von  $A$  ist, liegt in jedem  $V_n \cap A$  mindestens ein Element. Wir wählen jeweils ein solches  $a_n \in V_n \cap A$ .

Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ : Es sei  $W$  eine beliebige Umgebung von  $x$ . Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $U_N \subset W$  und somit  $V_N \subset W$ . Nach Konstruktion gilt sogar  $V_n \subset V_N \subset W$  für alle  $n \geq N$ . Insbesondere ist  $a_k \in W$  für alle  $k \geq N$ .

- Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig in  $x \in X$  im Sinne von Definition 2.4 (a); dann folgt die Folgenstetigkeit wie aus der Analysis bekannt. Es sei  $x_n \rightarrow x$  und  $U$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Dann ist  $f^{-1}(U) \subset X$  eine Umgebung von  $x$  und enthält fast alle Folgenglieder von  $(x_n)$ . Damit liegen aber auch fast alle Folgenglieder der Folge  $(f(x_n))$  in  $U$ .
- Für die umgekehrte Richtung sei  $B \subset Y$  abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass  $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$  gilt. Es sei  $x \in \overline{f^{-1}(B)}$  beliebig. Nach der ersten Aussage des Satzes gibt es eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in f^{-1}(B)$  und  $x_n \rightarrow x$ . Nach Voraussetzung der Folgenstetigkeit gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Da  $f(x_n) \in B$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $f(x) \in \overline{B} = B$ . Also ist  $x \in f^{-1}(B)$ . □

SATZ 3.7 (Vorstufe des Urysohnschen Einbettungssatzes). *Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, der das Abzählbarkeitsaxiom (AZ2) erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge in  $X$ .*

BEWEIS. Es sei  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein abzählbares System von Basismengen. Wir wählen für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $P_n \in B_n$ . Dann ist die Menge  $\mathcal{P} := \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dicht: In jeder Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  jedes  $x \in X$  liegt eine offene Menge  $O \subset U$ , die  $x$  enthält.  $O$  enthält eine offene Menge  $B_i$  der Basis und somit den Punkt  $P_i$ . Also ist  $P_i \in B_i \subset O \subset U$  und damit ist  $U \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ . □

#### 4. Vergleich von Topologien

DEFINITION 4.1. Es seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  Topologien auf der gleichen Menge  $X$ . Die Topologie  $\mathcal{T}_1$  heißt *feiner* als  $\mathcal{T}_2$  (und  $\mathcal{T}_2$  *größer* als  $\mathcal{T}_1$ ), wenn  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$  gilt. Dann ist jede offene Menge bezüglich  $\mathcal{T}_2$  auch offen bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .

BEMERKUNGEN.

- (a)  $\mathcal{T}_1$  ist feiner als  $\mathcal{T}_2$  genau dann, wenn die Identität als Abbildung der topologischen Räume

$$(X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\text{id}_X} (X, \mathcal{T}_2)$$

stetig ist.

- (b) Abbildungen aus der feineren Topologie  $(X, \mathcal{T}_1)$  heraus haben es einfacher, stetig zu sein, denn es gibt im Urbild mehr offene Mengen. Abbildungen in die gröbere Topologie  $(X, \mathcal{T}_2)$  hinein haben es einfacher, stetig zu sein, denn es muss für weniger offene Mengen das Urbild offen sein.
- (c) Es gibt weniger konvergente Folgen in der feineren Topologie  $(X, \mathcal{T}_1)$  als in der gröberen Topologie  $(X, \mathcal{T}_2)$ , denn es muss für mehr offene Mengen getestet werden, ob dort fast alle Folgenglieder liegen.
- (d) Die indiskrete Topologie  $(X, \{\emptyset, X\})$  ist die größte Topologie auf einer Menge  $X$ ; die diskrete Topologie  $(X, \mathcal{P}(X))$  ist die feinste Topologie auf einer Menge.
- (e) Topologien auf einem festen  $X$  sind partiell geordnet.

DEFINITION 4.2. Eine bijektive Abbildung  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, wenn  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind. Die topologischen Räume heißen dann *homöomorph*. Wir benutzen die Notation  $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}')$ .

BEISPIELE.

- (a) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$\overline{B_1(0)} = \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

ist homöomorph zum Quadrat  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ .

- (b) Die Abbildung

$$f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

$$t \mapsto e^{2\pi it}$$

ist zwar stetig und bijektiv, hat aber kein stetiges Inverses.

- (c) Die Abbildung

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 - |x|}$$

ist ein Homöomorphismus. Allgemeiner ist jedes offene Intervall in  $\mathbb{R}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .

- (d) Die stereographische Projektion

$$f: \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C},$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}$$

mit  $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  und  $N = (0, 0, 1)$  ist ein Homöomorphismus.

DEFINITION 4.3.

- (a) Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, falls das Bild offener Mengen offen ist.
- (b) Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *abgeschlossen*, falls das Bild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

SATZ 4.4. Eine bijektive Abbildung  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn  $f$  stetig und offen ist (und genau dann, wenn  $f$  stetig und abgeschlossen ist).

BEMERKUNG. Ist  $f$  ein Homöomorphismus, so induziert  $f$  durch  $\mathcal{T}_1 \ni O \mapsto f(O) \in \mathcal{T}_2$  eine Bijektion zwischen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$ .

## 5. Unterräume

DEFINITION 5.1. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Die *Unterraumtopologie*  $\mathcal{T}_{X|Y}$  ist definiert durch

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Axiome einer Topologie erfüllt sind. Eine Teilmenge  $B \subset Y$  ist also genau dann offen in  $Y$ , wenn es eine offene Menge  $O \in \mathcal{T}$  gibt mit  $B = Y \cap O$ . Eine Teilmenge  $A \subset Y$  ist genau dann abgeschlossen in  $Y$ , wenn  $A = Y \cap C$  für eine abgeschlossene Teilmenge  $C \subset X$  gilt.

SATZ 5.2.

- (a) Die Inklusion  $\iota: (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  ist stetig.
- (b) Es gilt die folgende universelle Eigenschaft: Es sei  $Z$  ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung  $f: Z \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn die Abbildung  $\iota \circ f: Z \rightarrow X$  stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \iota \circ f & \downarrow \iota \\ & & X \end{array}$$

BEWEIS.

- (a) Die erste Aussage folgt, weil  $\iota^{-1}(O) = Y \cap O$ . Ist  $O$  offen in  $X$ , so ist damit  $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{X|Y}$ .
- (b) Ist  $f$  stetig, so ist die Verkettung stetiger Abbildungen  $\iota \circ f$  stetig. Es sei umgekehrt  $\iota \circ f$  stetig und  $B \subset Y$  offen, also  $B = Y \cap O$  mit  $O \in \mathcal{T}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(Y \cap O) \\ &= f^{-1}(\iota^{-1}(O)) \\ &= (\iota \circ f)^{-1}(O) \end{aligned}$$

offen, weil  $\iota \circ f$  nach Voraussetzung stetig ist. □

BEMERKUNG. Gilt  $X \supset Y \supset Z$ , so ist

$$\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}.$$

weil ein  $O' \in \mathcal{T}_{X|Z}$  von der Form  $O' = Z \cap O$  ist mit  $O$  offen in  $X$  und somit  $O' = (O \cap Y) \cap Z \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$ . Ist umgekehrt  $O' \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$ , so gibt es ein  $O'' \in \mathcal{T}_{X|Y}$  mit  $O' = O'' \cap Z$ . Es gibt weiterhin  $O \in \mathcal{T}$  mit  $O' = O \cap Y$  und somit gilt  $O' = (O \cap Y) \cap Z = O \cap Z \in \mathcal{T}_{X|Z}$ .

DEFINITION 5.3. Eine Abbildung  $f: X' \rightarrow X$  heißt *Einbettung*, falls die Einschränkung auf das Bild  $f: X' \rightarrow f(X')$  ein Homöomorphismus ist.

BEISPIELE.

- (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

ist zwar injektiv, aber keine Einbettung. Das Bild ist  $\mathbb{S}^1$  und es gibt keine stetige Umkehrabbildung von  $\mathbb{S}^1$  nach  $[0, 1)$ .

(b) Für jede stetige Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist ihr Graph

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ t &\mapsto (t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

eine Einbettung.

(c) Vorsicht: Ist  $f: X \rightarrow X'$  stetig und  $Y \subset X$ , so ist nach Satz 5.2 (b)  $f|_Y = f \circ \iota$  stetig. Aber man kann nicht umgekehrt aus der Stetigkeit einer Einschränkung  $f|_Y$  auf die Stetigkeit von  $f$  schließen. Als Gegenbeispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Einschränkung  $f|_{\mathbb{Q}}$  ist als konstante Funktion stetig,  $f$  selbst aber ist nirgends stetig.

(d) Einbettungen von  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  in den  $\mathbb{R}^3$  heißen *Knoten*. Ein Beispiel ist die Kleeblattschlinge



## 6. Trennungaxiome

Wir erweitern zunächst leicht den Umgebungsbegriff: Eine Umgebung  $V$  einer beliebigen Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $(X, \mathcal{T})$  ist eine Obermenge einer offenen Menge  $O \in \mathcal{T}$ , welche die Teilmenge enthält,  $A \subset O \subset V$ . Die Menge  $\mathfrak{U}(A)$  von Umgebungen von  $A$  heißt das *Umgebungssystem* von  $A$ .

DEFINITION 6.1. Für einen topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  werden folgende *Trennungseigenschaften* eingeführt:

- $T_1$  Zu je zwei verschiedenen Elementen von  $X$  gibt es jeweils Umgebungen, die das andere Element nicht enthalten: Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gibt es  $U \in \mathfrak{U}(x)$ ,  $V \in \mathfrak{U}(y)$  mit  $x \notin V$  und  $y \notin U$ .
- $T_2$  Zu je zwei verschiedenen Elementen von  $X$  gibt es jeweils Umgebungen, die sich nicht schneiden: Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gibt es  $U \in \mathfrak{U}(x)$ ,  $V \in \mathfrak{U}(y)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Ein solcher topologischer Raum heißt *hausdorffsch*.
- $T_3$  Zu jedem  $x \in X$  und jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$ , die  $x$  nicht enthält, gibt es disjunkte Umgebungen,  $U \in \mathfrak{U}(x)$ ,  $V \in \mathfrak{U}(A)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .
- $T_4$  Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B$  von  $X$  gibt es disjunkte Umgebungen,  $U \in \mathfrak{U}(A)$ ,  $V \in \mathfrak{U}(B)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

DEFINITION 6.2.

- (a) Ein Hausdorff-Raum, der  $T_3$  erfüllt, heißt *regulär*.
- (b) Ein Raum, der  $T_4$  erfüllt und hausdorffsch ist, heißt *normal*.

BEMERKUNGEN.

- (a) Die erste Trennungseigenschaft  $T_1$  ist äquivalent zu der Aussage, dass jede einelementige Teilmenge von  $X$  abgeschlossen ist.
- (b) Jeder Hausdorff-Raum erfüllt auch  $T_1$ , also gilt  $T_2 \Rightarrow T_1$ .
- (c) In Hausdorff-Räumen sind Grenzwerte von Folgen eindeutig. Sie wissen, dass in Räumen mit der indiskreten Topologie und mit mindestens zwei Elementen Grenzwerte nicht eindeutig sind. Diese Räume verletzen natürlich das Trennung axiom  $T_1$  und damit auch  $T_2$ .
- (d) Es gilt nicht  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$ . Um hier Aussagen zu erhalten, muss man zusätzlich  $T_2$  oder  $T_1$  fordern. Zum Beispiel ist die indiskrete Topologie  $\mathcal{T} = (\emptyset, X)$  für  $|X| > 1$  zwar  $T_3$ , aber nicht  $T_2$ .

SATZ 6.3. Ein Hausdorff-Raum, der auch  $T_4$  erfüllt, erfüllt  $T_3$ . Anders gesagt: aus Normalität folgt Regularität.

BEWEIS. Es sei  $X$  ein topologischer Raum, der  $T_4$  und  $T_2$  erfüllt. Aus  $T_2$  folgt auch  $T_1$  und daher sind die Mengen  $A := \{x\}$  abgeschlossen. Daher können wir im  $T_4$ -Raum  $X$  die abgeschlossene Menge  $A = \{x\}$  und jede davon disjunkte abgeschlossene Menge trennen; es gilt also  $T_3$ .  $\square$

Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, so wird die Menge  $X \times X$  durch die Basis

$$\mathcal{B}_{X \times X} := \{O_1 \times O_2 \mid O_i \in \mathcal{T}\}$$

zum topologischen Raum, also indem man als offene Mengen beliebige Vereinigungen von Mengen der Form  $O_1 \times O_2$  mit  $O_i \in \mathcal{T}$  betrachtet. Wir können Hausdorff-Räume auch folgendermaßen charakterisieren:

SATZ 6.4. Ein topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

in  $X \times X$  abgeschlossen ist.

BEWEIS. Es ist  $x \neq y$  genau dann, wenn  $(x, y) \notin \Delta$ . Die Diagonale  $\Delta$  ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $X \setminus \Delta$  offen ist, d.h. wenn es für jedes  $(x, y) \notin \Delta$  offene Mengen  $O_1, O_2$  gibt mit  $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset X \setminus \Delta$ . Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $x \in O_1, y \in O_2$  und  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Genau dann ist aber  $X$  nach Definition hausdorffsch.  $\square$

SATZ 6.5.

- (a) Ein topologischer Raum  $X$  erfüllt genau dann  $T_3$ , wenn für jedes  $x \in X$  die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.
- (b) Ein topologischer Raum  $X$  erfüllt genau dann  $T_4$ , wenn die abgeschlossenen Umgebungen jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  eine Umgebungsbasis für  $\mathfrak{U}(A)$  bilden. Damit gibt es insbesondere für jedes abgeschlossene  $A \subset X$  und jedes  $W \in \mathfrak{U}(A)$  eine offene Teilmenge  $U \subset X$  mit

$$(6.1) \quad A \subset U \subset \bar{U} \subset W$$

BEWEIS. Wir beweisen jeweils die Richtung „ $\Rightarrow$ “ und behandeln die Rückrichtung in einer Übungsaufgabe.

Zu (a): Es gelte  $T_3$  und es sei  $W$  eine Umgebung von  $x \in X$  und  $x \in O \subset W$  mit  $O$  offen. Dann ist  $A := X \setminus O$  abgeschlossen und enthält  $x$  nicht. Es gibt wegen  $T_3$  disjunkte offene Mengen  $U, V$  mit  $U \in \mathfrak{U}(x)$  und  $V \in \mathfrak{U}(A)$ . Es gibt also ein offenes  $O'$  mit  $A \subset O' \subset V$ .

Wir setzen  $B := X \setminus O'$ . Dann ist  $x \in B$ , weil  $x \in U$  und  $U \cap V = \emptyset$ , so dass  $x \in X \setminus V \subset X \setminus O'$  gilt. Weiterhin gilt wegen  $U \cap V = \emptyset$ , dass gilt

$$U \subset X \setminus V \subset X \setminus O'.$$

Damit ist  $X \setminus O' \in \mathfrak{U}(x)$ . Da  $X \setminus O' \subset X \setminus A = O \subset W$ , ist  $B \subset W$ .

Zu (b): Es sei  $A := A_1$  abgeschlossen in  $X$  und  $W \in \mathfrak{U}(A_1)$ . Dann gibt es ein  $O$  mit  $A_1 \subset O \subset W$ , so dass  $A_2 := X \setminus O$  abgeschlossen ist. Da  $X$   $T_4$  erfüllt, finden wir  $U \in \mathfrak{U}(A_1)$  und  $V \in \mathfrak{U}(A_2)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Es gibt ein offenes  $O'$  mit  $A_2 \subset O' \subset V$ .

Wir zeigen, dass  $X \setminus O'$  eine abgeschlossene Umgebung von  $A = A_1$  mit  $X \setminus O' \subset W$  ist.

- $A_1 \subset X \setminus O'$ , weil  $A_2 \subset V$  und somit  $A_1 \subset X \setminus V \subset X \setminus O'$ .
- $A_1 \subset U \subset X \setminus O'$  gilt, weil  $U \subset X \setminus V$  ist.
- Es ist

$$X \setminus O' \subset X \setminus A_2 = X \setminus (X \setminus O) = O \subset W.$$

$\square$

Wir diskutieren, wie sich Trennungseigenschaften auf Teilmengen vererben:

SATZ 6.6.

- (a) Ist ein topologischer Raum  $X$  hausdorffsch bzw. regulär, so ist auch jede Teilmenge  $Y \subset X$  mit der induzierten Topologie hausdorffsch bzw. regulär.

(b) *Ist ein topologischer Raum  $X$  normal und  $Y \subset X$  abgeschlossen, so ist auch  $Y$  normal.*

BEWEIS.

(a) Es sei  $X$  hausdorffsch,  $Y \subset X$  und  $x_1, x_2 \in Y$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Es gibt also Umgebungen  $U_1$  von  $x_1$  und  $U_2$  von  $x_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Dann sind  $U'_i := U_i \cap Y$  Umgebungen von  $x_i$  in  $Y$  und auch disjunkt,  $U'_1 \cap U'_2 = \emptyset$ .

Es sei  $X$  regulär,  $Y \subset X$  und  $A' \subset Y$  abgeschlossen in  $Y$  und  $x \notin A'$ . Dann existiert  $A$  abgeschlossen in  $X$  mit  $A' = A \cap Y$ . Da auch  $x \notin A$  gilt und  $X$  regulär ist, gibt es disjunkte Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $A$  in  $X$ . Dann sind  $U' := U \cap Y$  und  $V' := V \cap Y$  disjunkte Umgebungen von  $x$  und  $A'$  in  $Y$ ; also ist auch der Unterraum  $Y$  regulär.

(b) Es sei  $X$  normal und  $Y \subset X$  abgeschlossen. Es seien  $A', B' \subset Y$  abgeschlossen in  $Y$  und disjunkt. Dann gibt es in  $X$  abgeschlossene Mengen  $A, B$  mit  $A' = A \cap Y$  und  $B' = B \cap Y$ . Da auch  $Y$  in  $X$  abgeschlossen ist, sind  $A'$  und  $B'$  als Schnitt abgeschlossener Mengen in  $X$  abgeschlossen. Die in  $X$  abgeschlossenen Mengen  $A', B'$  können im normalen Raum  $X$  durch disjunkte Umgebungen  $U \supset A'$  und  $V \supset B'$  getrennt werden. Dann trennen in  $Y$  die disjunkten Umgebungen  $U' := U \cap Y \supset A'$  und  $V' := V \cap Y \supset B'$  die Mengen  $A'$  und  $B'$ .

□

Wir wollen das Trennungsaxiom  $T_4$  durch die Existenz von Funktionen mit besonderen Eigenschaften charakterisieren. Wir geben zunächst den *Fortsetzungssatz von Tietze* ohne Beweis an:

SATZ 6.7. *Ist  $X$  ein normaler topologischer Raum, ist  $A \subset X$  abgeschlossen und ist  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung, so gibt es eine stetige Fortsetzung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ , d.h.  $F|_A = f$ .*

Man kann sogar hinbekommen, dass  $F$  zusätzlich  $\sup F = \sup f$ ,  $\inf F = \inf f$  und  $\inf f < F(x) < \sup f$  für alle  $x \notin A$  hinbekommen.

THEOREM 6.8 (Lemma von Urysohn). *Die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent.*

- (a) *Der Raum  $X$  erfüllt die Trennungseigenschaft  $T_4$ .*
- (b) *Für jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  und jede offene Menge  $U$  mit  $A \subset U \subset X$  existiert eine stetige Funktion*

$$f: X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R},$$

so dass gilt

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \notin U. \end{cases}$$

Die Abbildung  $f$  in (a) heißt auch Urysohn-Funktion.

BEWEIS.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Es sei  $B$  eine beliebige abgeschlossene Menge mit  $B \cap A = \emptyset$ . Ist  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Urysohn-Funktion für  $U := X \setminus B$ , so trennen die offenen Umgebungen  $A \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $B \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  die abgeschlossenen Teilmengen  $A$  und  $B$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) Der konstruktive Beweis startet mit  $U_0 := A$  und  $U_1 := U$ . Die Idee ist, dass wir Umgebungen  $U_s$  iterativ zwischen  $A$  und  $U$  platzieren mit der Eigenschaft, dass für  $s < s'$  gilt, dass  $U_s \subset U_{s'}$  ist.

Da  $X$  ein  $T_4$ -Raum ist, finden wir mit Satz 6.5 (6.1) ein  $U_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{U}(U_0)$ , so dass  $U_{\frac{1}{2}}$  offen ist und so dass gilt:

$$A = U_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1 = U.$$

Im nächsten Schritt setzen wir offene  $U_{\frac{1}{4}}$  und  $U_{\frac{3}{4}}$  dazwischen mit

$$A = U_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1 = U$$

und iterieren diesen Prozess. Wir erhalten damit eine 2-adische Verfeinerung, bei der wir im  $n$ -ten Schritt lokal

$$\dots \subset \overline{U_{\frac{k-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{k}{2^n}} \subset \dots$$

haben und dazwischen für Schritt  $n + 1$  jeweils ein offenes  $U_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}$  setzen mit

$$\dots \subset \overline{U}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset U_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U}_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{k}{2^n}} \subset \dots$$

Wir setzen  $D := \{\frac{i}{2^n}, n, i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq 2^n\}$ . Dann gilt für  $r, s \in D$  mit  $r < s$ , dass  $\overline{U}_r \subset U_s$ . Für ein  $t \in [0, 1]$  sei  $U_t := \bigcup_{r \in D, r \leq t} U_r$  und wir definieren:

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq 1 \mid x \in U_t\}, & \text{falls } x \in U, \\ 1, & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$

Für dieses  $f$  gilt dann:

- Ist  $x \in A = U_0$ , so ist  $f(x) = 0$ .
- Ist  $f(x) < t$ , dann gibt es ein  $r \in D$  mit  $r < t$  und  $x \in U_r$ .
- Ist dagegen  $f(x) > t$ , so gibt es ein  $r' \in D$  mit  $r' > t$  und  $x \notin \overline{U}_{r'}$ .

Daher sind dann

$$f^{-1}[0, t) = \bigcup_{r \in D, r < t} U_r$$

und

$$f^{-1}(t, 1] = \bigcup_{r' \in D, r' > t} (X \setminus \overline{U}_{r'})$$

offen und  $f$  ist somit stetig, weil die Teilmengen der Form  $[0, t)$  und  $(t, 1]$  eine Subbasis der Topologie auf  $[0, 1]$  bilden. □

## 7. Initialtopologie und Produkte

Die Unterraumtopologie ist ein Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion:

**DEFINITION 7.1.** Gegeben sei eine Menge  $X$ , eine Familie topologischer Räume  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  und eine Familie von Abbildungen  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$ . Eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  heißt *Initialtopologie* bezüglich der Familie  $(f_i)_{i \in I}$ , wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

Ist  $Y$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  genau dann stetig, wenn  $f_i \circ g: Y \rightarrow X_i$  für alle  $i \in I$  stetig ist,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & (X, \mathcal{T}) \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{array}$$

**SATZ 7.2.** Auf einer Menge  $X$  gibt es bezüglich  $(f_i)_{i \in I}$  eine eindeutig bestimmte Initialtopologie. Die Initialtopologie ist die größte Topologie auf  $X$ , so dass alle  $f_i: X \rightarrow X_i$  stetig sind. Eine Subbasis ist

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

**BEWEIS.** Ist  $\mathcal{T}$  eine Initialtopologie auf  $X$ , so folgt mit

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\text{id}_X} & (X, \mathcal{T}) \\ & \searrow f_i & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i), \end{array}$$

dass die Abbildungen  $f_i$  stetig sind, weil  $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  immer stetig ist.

Es seien  $\mathcal{T}_{(1)}$  und  $\mathcal{T}_{(2)}$  zwei Initialtopologien auf  $X$ . Wir betrachten für jedes  $i \in I$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}_{(1)}) & \xrightarrow{\text{id}_X} & (X, \mathcal{T}_{(2)}) \\ & \searrow f_i & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{array}$$

Da alle  $f_i$  stetig sind, muss die Identität stetig sein. Also ist die Topologie  $\mathcal{T}_{(1)}$  feiner als die Topologie  $\mathcal{T}_{(2)}$ . Vertauscht man die Rollen der Topologien, so folgt auch die umgekehrte Aussage. Somit gilt  $\mathcal{T}_{(1)} = \mathcal{T}_{(2)}$ , also sind Initialtopologien eindeutig.

Eine Initialtopologie  $\mathcal{T}$  muss sicher die Mengen in der Subbasis  $\mathcal{S}$  enthalten, denn andernfalls wären die  $f_i$  und damit die Identität nicht stetig. Da  $\mathcal{T}$  die größte solche Topologie sein soll, muss  $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$  gelten.

Es bleibt zu zeigen, dass die durch  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie die universelle Eigenschaft erfüllt. Wenn  $g: Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$  stetig ist, so ist die Verkettung  $f_i \circ g$  stetig. Es seien also umgekehrt die Abbildungen  $f_i \circ g$  für alle  $i \in I$  stetig. Wir müssen nach Satz 3.2 zeigen, dass für jedes  $S \in \mathcal{S}$  die Menge  $g^{-1}(S)$  offen in  $Y$  ist. Wir betrachten für ein  $i \in I$  und  $O_i \in \mathcal{T}_i$  die Menge  $S = f_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{S}$  und

$$g^{-1}(S) = g^{-1}f_i^{-1}(O_i) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i)$$

ist offen, weil  $f_i \circ g$  stetig ist. □

Wir erinnern an das *kartesische Produkt*  $\prod_{i \in I} X_i$  einer Familie von Mengen, dessen Elemente Familien  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen mit  $x_i \in X_i$  sind. Wir haben Projektionsabbildungen

$$\begin{aligned} \pi_i: \prod_{j \in I} X_j &\rightarrow X_i \\ (x_j)_{j \in I} &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

für welche die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $X$  eine beliebige Menge, so gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen  $f: X \rightarrow \prod_{j \in I} X_j$  und Familien von Abbildungen  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \prod_{j \in I} X_j \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i, \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Abb}(X, \prod_{j \in I} X_j) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Abb}(X, X_j) \\ f &\mapsto (\pi_j \circ f)_{j \in I}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen wir mit  $\text{Abb}$  die Menge aller Abbildungen.

Die Umkehrabbildung schickt die Familie  $(f_i)_{i \in I}$  auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \prod_{j \in I} X_j \\ t &\mapsto (\dots, f_j(t), \dots). \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir hier die Menge  $\prod_{j \in I} X_i$  dadurch beschreiben, dass wir die Abbildungen aus einer beliebigen Menge  $X$  in  $\prod_{j \in I} X_i$  hinein beschreiben.

**DEFINITION 7.3.** Es sei  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die Initialtopologie auf der Menge  $X := \prod_{i \in I} X_i$  bezüglich der Projektionen  $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  heißt die *Produkttopologie* auf  $X$ .

**SATZ 7.4.** Die Produkttopologie  $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$  hat die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{T}_i, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

BEWEIS. Bezüglich der Topologie mit Basis  $\mathcal{B}$  sind die Projektionen  $\pi_i: \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$  stetig: Ist  $O_i \in \mathcal{T}_i$  offen, so ist

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \prod_{j \in I} O_j \quad \text{mit} \quad O_j = \begin{cases} X_j, & \text{für } j \neq i \\ O_i, & \text{für } j = i \end{cases}$$

sogar ein Element der Basis. Damit ist

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\}$$

eine Subbasis der Topologie. Es liegt nach Satz 7.2 die Initialtopologie vor.  $\square$

SATZ 7.5. Zu jeder Familie stetiger Funktionen  $(f_i: T \rightarrow X_i)_{i \in I}$  gibt es genau eine stetige Funktion  $f: T \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , so dass  $\pi_i \circ f = f_i$  für alle  $i \in I$ .

BEWEIS. Die Abbildung  $f$  existiert als Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts,

$$f(t) = (\dots, f_i(t), \dots),$$

und  $f$  ist eindeutig. Sie ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Initialtopologie aus Definition 7.1.  $\square$

BEISPIELE.

- (a) Der  $\mathbb{R}^n$  wird mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$  versehen. Dadurch erhält man die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Es sei für jedes  $i \in I$  ein Unterraum  $A_i \subset X_i$  mit der Unterraumtopologie gegeben. Dann ist  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  eine Teilmenge und hat nach Definition 5.1 eine Unterraumtopologie. Diese ist gleich der Produkttopologie,

$$\mathcal{T}_{\prod A_i} = \mathcal{T}_{\prod X_i} \upharpoonright \prod A_i,$$

weil eine Subbasis der Produkttopologie gegeben ist durch die Mengen  $\pi_i^{-1}(O_i)$  mit  $O_i$  offen in  $A_i$ . Das heißt aber  $O_i = A_i \cap \tilde{O}_i$  mit  $\tilde{O}_i \in \mathcal{T}_{X_i}$ . Dies ist aber eine Subbasis der Unterraumtopologie.

- (c) Insbesondere ist mit  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  der  $n$ -Torus  $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$  in natürlicher Weise ein topologischer Raum.

## 8. Finaltopologie und Summen

Finaltopologien sind dual zu Initialtopologien:

DEFINITION 8.1. Gegeben sei eine Menge  $X$ , eine Familie topologischer Räume  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  und eine Familie von Abbildungen  $(f_i: X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ . Eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  heißt *Finaltopologie* bezüglich  $(f_i)_{i \in I}$ , wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

Ist  $Y$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $g: X \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $g \circ f_i: X_i \rightarrow Y$  für alle  $i \in I$  stetig ist:

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{T}_i) & \xrightarrow{f_i} & (X, \mathcal{T}) \\ & \searrow g \circ f_i & \downarrow g \\ & & Y. \end{array}$$

Der Beweis des folgenden Satzes ist dual zum Beweis von Satz 7.2

SATZ 8.2. Auf  $X$  gibt es bezüglich der  $(f_i)_{i \in I}$  eine eindeutig bestimmte Finaltopologie. Die Finaltopologie ist die feinste Topologie auf  $X$ , so dass alle Abbildungen  $f_i: X_i \rightarrow X$  stetig sind. Eine Subbasis ist

$$\mathcal{S} := \{O \subset X \text{ mit } f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

BEMERKUNG. Wir erinnern zunächst an den Begriff aus der Mengenlehre, der dual zum kartesischen Produkt von Mengen ist.

- Gegeben sei eine Familie von Mengen  $(X_j)_{j \in I}$ . Wir bilden die Familie von Mengen

$$X'_j := \{(x_j, j) \mid x_j \in X_j\} = X_j \times \{j\}.$$

Dann ist die *disjunkte Vereinigung der  $X_j$*  die Menge

$$\bigsqcup_{j \in I} X_j := \bigcup_{j \in I} X'_j.$$

- Sie kommt mit Injektionen

$$\begin{aligned} \iota_i: X_i &\rightarrow \bigsqcup_{j \in I} X_j \\ x_i &\mapsto (x_i, i) \in X'_i, \end{aligned}$$

für welche die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $Y$  eine beliebige Menge, so gibt es eine Bijektion zwischen den Abbildungen  $f: \bigsqcup_{j \in I} X_j \rightarrow Y$  und den Familien von Abbildungen  $(f_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{j \in I} X_j & \xrightarrow{f} & Y, \\ \uparrow \iota_i & \nearrow f_i & \\ X_i & & \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Abb}(\bigsqcup_{j \in I} X_j, T) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Abb}(X_j, T) \\ f &\mapsto (f \circ \iota_j)_{j \in I}. \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung schickt eine Familie  $(f_j)_{j \in I}$  auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \bigsqcup_{j \in I} X_j &\rightarrow Y, \\ (x_j, j) &\mapsto f_j(x_j) \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir hier die Menge  $\bigsqcup_{j \in I} X_j$  dadurch beschreiben, dass wir die Abbildungen aus  $\bigsqcup_{j \in I} X_j$  heraus in eine beliebige Menge  $Y$  hinein beschreiben.

**DEFINITION 8.3.** Gegeben seien topologische Räume  $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ . Die Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid O \cap X_j \in \mathcal{T}_j \text{ für alle } j \in I\}$$

heißt *Summentopologie* auf  $X$ .

Statt  $O \cap X_j$  sollten wir korrekter  $\iota_j^{-1}(O) \subset X_j$  schreiben. Wir identifizieren aber stillschweigend  $X_j$  mit  $\iota_j(X_j) \subset X$ .

**SATZ 8.4.**

*Die Summentopologie ist die Finaltopologie auf  $X = \bigsqcup_{j \in I} X_j$  bezüglich der Injektionen  $(\iota_i: X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ .*

**BEWEIS.**

- Die Injektionen  $\iota_i$  sind für alle  $i \in I$  stetig, denn für  $O \in \mathcal{T}$  ist nach Definition 8.3

$$\iota_i^{-1}(O) = O \cap X_i \in \mathcal{T}_i.$$

Sie sind sogar Einbettungen, vgl. Definition 5.3.

- Es sei  $g: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Ist  $g$  stetig, so ist  $g \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$  als Verkettung stetiger Abbildungen stetig.

- Es seien umgekehrt für eine Abbildung  $g: X \rightarrow Y$  alle Verkettungen  $g \circ \iota_j$  stetig. Für  $O' \subset Y$  offen ist dann

$$g^{-1}(O') = \bigcup_{j \in I} g^{-1}(O') \cap X'_j = \bigcup_{j \in I} \iota_j^{-1} \circ g^{-1}(O') = \bigcup_{j \in I} (g \circ \iota_j)^{-1}(O')$$

als Vereinigung offener Mengen offen, so dass  $g$  stetig ist. □

**SATZ 8.5.** *Ist  $(g_j: X_j \rightarrow Y)_{j \in I}$  eine Familie stetiger Abbildungen, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $g: X = \bigsqcup_{j \in I} X_j \rightarrow Y$  mit  $g_j = g \circ \iota_j$ .*

**BEWEIS.** Eine Abbildung  $g: \bigsqcup_{j \in I} X_j \rightarrow Y$  existiert als Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft der disjunkten Vereinigung in der Kategorie von Mengen. Die Abbildung  $g$  ist stetig wegen der universellen Eigenschaft der Finaltopologie. □

**BEMERKUNG.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum, der als Menge eine disjunkte Vereinigung von Untermengen ist,  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ , die alle offen in  $X$  sind. Da  $X_j = X \setminus \bigcup_{i \neq j} X_i$  gilt, ist dann auch jedes  $X_i$  abgeschlossen in  $X$ . Dann ist die Abbildung  $X \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ , die  $x_i \in X_i$  auf  $(x_i, i) \in \bigsqcup_{i \in I} X_i$  schickt, injektiv, surjektiv, stetig und offen. Also ist  $X$  als topologischer Raum homöomorph zur Summe  $X \cong \bigsqcup_{i \in I} X_i$ .

Der Raum  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  heißt Summe, weil er die kategoriellen Eigenschaften einer Summe hat.

## 9. Zusammenhang

**DEFINITION 9.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

**BEMERKUNGEN.**

- Wir können äquivalent einen zusammenhängenden Raum dadurch charakterisieren, dass er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener Teilmengen ist.
- Kann man also einen zusammenhängenden topologischen Raum  $X$  schreiben als  $X = K_1 \cup K_2$  mit  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  mit  $K_1$  und  $K_2$  beide offen (oder beide abgeschlossen), so gilt  $K_1 = \emptyset$  oder  $K_2 = \emptyset$ .
- Eine Menge  $X$  mit diskreter Topologie ist nicht zusammenhängend, falls sie mehr als ein Element hat.
- Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Ist  $A$  sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist  $X \cong A \sqcup (X \setminus A)$ .

**SATZ 9.2.** *Das Intervall  $[0, 1]$  mit der von der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie ist zusammenhängend.*

**BEWEIS.** Angenommen, wir finden eine Zerlegung  $[0, 1] = K_0 \sqcup K_1$ , mit  $K_0, K_1$  offen und nicht-leer. Wir können  $1 \in K_1$  annehmen. Weil  $K_1$  offen ist, liegt eine Umgebung von 1 in  $K_1$ , also ist  $s := \sup K_0 < 1$ .

Ist  $s \in K_0$  so finden wir eine Umgebung  $U \subset K_0$  von  $s$ , weil  $K_0$  offen ist. Dann ist aber  $s$  nicht das Supremum, weil in  $K_0$  Elemente liegen, die größer als  $s$  sind.

Ist dagegen  $s \in K_1$ , dann finden wir eine Umgebung  $U \subset K_1$  von  $s$ , weil  $K_1$  offen ist. Dann kann aber  $s$  nicht das Supremum von  $K_0$  sein, weil in der Umgebung  $U$  keine Elemente von  $K_0$  liegen können. □

Um Aussagen über den Zusammenhang topologischer Räume machen zu können, brauchen wir einige Kriterien.

**SATZ 9.3.** *Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion von  $X$  in einen beliebigen diskreten Raum konstant ist.*

**BEWEIS.** Ist  $X$  nicht zusammenhängend, so ist  $X = A \sqcup (X \setminus A)$  mit  $A$  und  $X \setminus A$  offen und abgeschlossen. Wir betrachten einen diskreten Raum  $D$  mit mindestens zwei verschiedenen Elementen  $p_1, p_2 \in D$ . Dann ist die Funktion  $f: X \rightarrow D$  mit  $f|_A = p_1$  und  $f|_{X \setminus A} = p_2$  nicht konstant auf  $X$  und stetig, weil die Urbilder offener Mengen offen sind.

Umgekehrt gebe es eine nicht-konstante stetige Funktion  $f: X \rightarrow D$  in einen diskreten Raum  $D$ , die verschiedene Werte  $p_1, p_2 \in D$  annimmt. Dann ist  $f^{-1}(p_1)$  und sein Komplement in  $X$  offen und nicht-leer.  $\square$

**SATZ 9.4 (Zwischenwertsatz).** *Ist  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum,  $Y$  ein topologischer Raum und  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist das Bild  $f(X) \subset Y$  zusammenhängend.*

**BEWEIS.** Angenommen, das Bild  $f(X)$  lässt sich schreiben als disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen in  $f(X)$ ,  $f(X) = O_1 \sqcup O_2$ . Dann gilt auch  $X = f^{-1}(O_1) \sqcup f^{-1}(O_2)$  mit nicht-leeren offenen Mengen, im Widerspruch zur Annahme, dass  $X$  zusammenhängend ist  $\square$

Insbesondere ist ein zu einem zusammenhängenden Raum homöomorpher Raum zusammenhängend. Da je zwei abgeschlossene Intervalle zueinander homöomorph sind, sind damit *alle* abgeschlossenen Intervalle zusammenhängend.

Wir erhalten nun als Folgerung von Satz 9.4 und Satz 9.2 den klassischen Zwischenwertsatz:

**BEISPIEL.** Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Für jedes  $\zeta$  mit  $f(a) < \zeta < f(b)$  oder  $f(b) < \zeta < f(a)$  gibt es wenigstens ein  $t \in [a, b]$  mit  $f(t) = \zeta$ .  
Andernfalls zerlegen wir das Bild

$$f([a, b]) = (f([a, b]) \cap (-\infty, \zeta)) \sqcup (f([a, b]) \cap (\zeta, \infty))$$

in disjunkte nicht-leere offene Teilmengen, im Widerspruch zu Satz 9.4.

**LEMMA 9.5.** *Ist ein topologischer Raum  $X$  von einer Familie  $(X_j)$  zusammenhängender Unterräume überdeckt und sind je zwei  $X_j$  nicht disjunkt, so ist auch  $X$  zusammenhängend.*

**BEWEIS.** Es sei  $D$  ein beliebiger diskreter Raum und  $f: X \rightarrow D$  eine beliebige stetige Funktion. Dann ist  $f|_{X_i}$  für alle  $i$  nach Satz 9.3 konstant, weil jedes  $X_i$  zusammenhängend ist. Da die  $X_i$  nicht disjunkt sind, muss  $f$  auf ganz  $X$  konstant sein. Nach Satz 9.3 ist daher  $X$  zusammenhängend.  $\square$

**BEISPIELE.**

- (a) Der topologische Raum  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend: Wir wählen als nicht-disjunkte Überdeckung  $(X_j = [-j, j])_{j \in \mathbb{N}}$ . Die abgeschlossenen Intervalle sind nach Satz 9.2 zusammenhängend.
- (b) Da jedes offene Intervall zu  $\mathbb{R}$  homöomorph ist, sind auch offene Intervalle zusammenhängend.
- (c) Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  als Unterraum der reellen Zahlen sind nicht zusammenhängend. Es sei  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann ist

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \zeta)) \sqcup (\mathbb{Q} \cap (\zeta, \infty)).$$

Die Dedekindschen Schnitte zerteilen also  $\mathbb{Q}$  in disjunkte offene Mengen.

- (d) Die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  ist als Bild der zusammenhängenden Menge  $\mathbb{R}$  unter der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

nach dem Zwischenwertsatz 9.4 zusammenhängend.

Auf der Menge der Elemente eines topologischen Raumes  $X$  führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein: Ein  $x \in X$  hängt mit  $y \in X$  zusammen,  $x \sim y$ , wenn es eine zusammenhängende Teilmenge  $C \subset X$  gibt, die  $x$  und  $y$  enthält,  $x, y \in C$ .

Die Relation ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv,  $x \sim x$ , mit  $C = \{x\}$ , zusammenhängend. Um zu sehen, dass sie transitiv ist, seien  $C_1, C_2$  zusammenhängende Mengen mit  $x, y \in C_1$  und  $y, z \in C_2$ . Dann ist  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , so dass aus Lemma 9.5 folgt, dass die Vereinigung  $C_1 \cup C_2$  zusammenhängend ist, und es sind  $x, z \in C_1 \cup C_2$ .

**DEFINITION 9.6.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Äquivalenzklasse  $Z(x)$  von  $x \in X$  unter der obigen Äquivalenzrelation heißt die *Zusammenhangskomponente* von  $x$ .

Es ist klar, dass ein topologischer Raum als Menge die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

SATZ 9.7. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum.*

- (a) *Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist zusammenhängend.*
- (b) *Gilt für Teilmengen  $A, B \subset X$  die Relation  $A \subset B \subset \overline{A}$  und ist  $A$  zusammenhängend, so ist  $B$  zusammenhängend. Insbesondere sind Abschlüsse zusammenhängender Teilmengen wieder zusammenhängend.*
- (c) *Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist abgeschlossen.*

BEWEIS.

- (a) Es sei  $Z(x)$  die Zusammenhangskomponente eines  $x \in X$ . Für jedes  $y \in Z(x)$  können wir eine zusammenhängende Menge  $Z_y \subset X$  finden, die  $y$  und  $x$  enthält. Die Mengen  $Z_y$  überdecken die Zusammenhangskomponente  $Z(x)$  und sind paarweise nicht disjunkt, weil sie alle  $x$  enthalten. Nach Lemma 9.5 ist  $Z(x)$  zusammenhängend.
- (b) Angenommen,  $B$  ist nicht zusammenhängend, also gibt es  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  mit

$$B = (B \cap O_1) \sqcup (B \cap O_2),$$

so dass  $B \cap O_1 \neq \emptyset$  und  $B \cap O_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt wegen  $A \subset B$  auch

$$A = (A \cap O_1) \sqcup (A \cap O_2).$$

Wir müssen zeigen, dass die beiden Mengen  $A \cap O_i$  nicht leer sind und wählen dazu  $b_i \in B \cap O_i$ . In jeder Umgebung von  $b_i$  liegen Punkte von  $A$ , weil  $b_i$  ein Berührungspunkt ist, insbesondere also auch in  $O_i$ . Daher ist  $O_i \cap A$  für  $i = 1, 2$  nicht leer, im Widerspruch zur Annahme, dass  $A$  zusammenhängend ist.

- (c) Wegen (a) ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend. Da  $Z(x) \subset \overline{Z(x)}$  folgt mit (b), dass  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend ist und daher gleich  $Z(x)$ .

□

Das folgende Beispiel zeigt einen Raum mit einer Zusammenhangskomponente, die nicht offen ist.

BEISPIEL. Wir betrachten

$$X := \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

mit der von  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie. Dann sind die einelementigen Teilmengen  $\{\frac{1}{n}\}$  offen und abgeschlossen in  $X$  und Zusammenhangskomponenten von  $X$ . Die Zusammenhangskomponente  $\{0\}$  ist nach Satz 9.7 (c) abgeschlossen, aber nicht offen. Denn jede Umgebung von 0 in der Unterraumtopologie enthält unendlich viele  $1/n$ , die aber jeweils in einer anderen Zusammenhangskomponente liegen.

Wir schließen nun genau die Situation aus, die im Beispiel oben bei 0 vorliegt:

DEFINITION 9.8. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal zusammenhängend*, falls für jeden Punkt  $x \in X$  jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  eine zusammenhängende Umgebung  $V \in \mathfrak{U}(x)$  enthält.

Bei einem lokal-zusammenhängenden Raum bilden also die zusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

BEISPIEL. Vorsicht: Ein zusammenhängender Raum  $X$  ist nicht unbedingt lokal zusammenhängend.

Als Beispiel betrachten wir den *konvergierenden Besen*: Es sei  $Q_n := (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $Q_0 := (0, 0)$  und  $P := (0, 1)$ . Wir bezeichnen mit  $\overline{Q_n P}$  die Verbindungsstrecke zwischen  $Q_n$  und  $P$  und setzen  $X := \bigcup_{n \geq 0} \overline{Q_n P}$ . Jede der Strecken  $\overline{Q_n P}$  ist als homöomorphes Bild eines Intervalls zusammenhängend. Da sich alle Intervalle  $\overline{Q_n P}$  in  $P$  schneiden, ist  $X$  nach Lemma 9.5 zusammenhängend. Dagegen liegen aber in jeder Umgebung des Punktes  $(0, \frac{1}{2})$  unendlich viele Intervalle und solche Umgebungen enthalten keine zusammenhängende Umgebung.

SATZ 9.9. *Ein topologischer Raum  $X$  sei lokal zusammenhängend. Dann ist jede Zusammenhangskomponente offen und abgeschlossen. Wählt man Repräsentanten  $(x_i)_{i \in I}$  für die Zusammenhangskomponenten, so ist als topologischer Raum*

$$X \cong \bigsqcup_{i \in I} Z(x_i).$$

BEWEIS. Nach Satz 9.7 sind die Zusammenhangskomponenten abgeschlossen. Es sei  $y \in Z(x)$  beliebig und  $V$  sei eine zusammenhängende Umgebung von  $y$ . Dann ist  $V \subset Z(x)$ . Damit enthält die Zusammenhangskomponente  $Z(x)$  eine Umgebung von  $y$  und ist somit offen.  $\square$

DEFINITION 9.10. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei  $x, y \in X$  einen stetigen Weg

$$w: [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ .

BEMERKUNGEN.

- (a) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  zusammenhängend: Wäre  $X$  nicht zusammenhängend, so ist  $X = X_1 \sqcup X_2$  mit nicht-leeren disjunkten offenen Teilmengen  $X_1$  und  $X_2$ . Wähle  $x_1 \in X_1$  und  $x_2 \in X_2$  und einen Weg  $w$ , der  $x_1$  und  $x_2$  verbindet. Dann wäre

$$w^{-1}(X_1) \sqcup w^{-1}(X_2)$$

eine disjunkte Zerlegung des nach Satz 9.2 zusammenhängenden Intervalls  $[0, 1]$  in nicht-leere offene Mengen.

- (b) Wegzusammenhang ist eine Äquivalenzrelation. Der konstante Weg zeigt  $x \approx x$ . Aus  $x \approx y$  mit einem Weg  $w$  folgt mit  $\tilde{w}(t) = w(1 - t)$ , dass auch  $y \approx x$ . Die Verkettung von Wegen zeigt die Transitivität der Relation.

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von  $x \in X$  mit  $W(x)$ . Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation  $\approx$  heißen *Wegekomponenten* von  $X$ .

SATZ 9.11. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt*

- (a) *Für  $x \in X$  ist  $W(x) \subset Z(x)$ .*  
 (b) *Jede Wegekomponente ist wegzusammenhängend.*

BEWEIS.

- (a) Für  $x, y$  in der gleichen Wegekomponente finden wir einen Weg  $w$ , der  $x$  und  $y$  verbindet. Dann ist  $w([0, 1])$  eine zusammenhängende Teilmenge, die  $x, y$  enthält, so dass diese Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.  
 (b) Folgt nach Definition der Äquivalenzrelation.  $\square$

BEISPIEL. Eine Wegekomponente  $W(x)$  eines topologischen Raumes ist im allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. Wir setzen dazu

$$X_1 := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \supset X_2 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

und  $X := X_1 \sqcup X_2 \subset \mathbb{R}^2$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten Topologie. Als homöomorphes Bild eines Intervalls in  $\mathbb{R}$  sind  $X_1$  und  $X_2$  wegzusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente  $X_1$  ist offen, aber nicht abgeschlossen, denn alle Punkte des Geradensegments  $X_2$  sind Berührungspunkte von  $X_1$ , aber nicht in  $X_1$  enthalten. Die Zusammenhangskomponente  $X_2$  ist abgeschlossen, aber nicht offen, weil jede Umgebung jedes Punktes von  $X_2$  einen Punkt der Zusammenhangskomponente  $X_1$  enthält.

DEFINITION 9.12. Ein topologischer Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jede Umgebung  $U$  von  $x \in X$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  enthält.

Bei einem lokal wegzusammenhängenden Raum bilden also die wegzusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

SATZ 9.13. *Es sei  $X$  ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt  $Z(x) = W(x)$  für alle  $x \in X$ . Die Wegekomponten sind also die Zusammenhangskomponenten. Sie sind offen und abgeschlossen, und es gilt mit einem Repräsentantensystem  $(x_i)_{i \in I}$  der Zusammenhangskomponenten als topologischer Raum*

$$X = \bigsqcup_{i \in I} W(x_i) = \bigsqcup_{i \in I} Z(x_i).$$

BEWEIS. Nach Satz 9.11 gilt immer  $W(x) \subset Z(x)$ . Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend, so ist  $X$  lokal zusammenhängend. Nach Satz 9.9 sind die Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen. Als Menge gilt

$$X = \bigsqcup_{i \in I} W(x_i).$$

Die Wegekomponten  $W(x)$  sind offen, weil jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  eine wegzusammenhängende Umgebung von  $x$  enthält. Nun gilt

$$W(x_i) = X \setminus \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} W(x_j),$$

so dass die Wegekomponten  $W(x_i)$  als Komplement offener Mengen auch abgeschlossen ist. Somit gilt auch als topologischer Raum

$$X = \bigsqcup_{i \in I} W(x_i).$$

Andererseits ist als topologischer Raum  $X = \bigsqcup_{i \in I} Z(x_i)$  mit  $W(x_i) \subset Z(x_i)$ . Angenommen, es wäre  $W(x) \subsetneq Z(x)$  für ein  $x \in X$ . Dann wäre  $Z(x) = (Z(x) \setminus W(x)) \sqcup W(x)$ , im Widerspruch dazu, dass  $Z(x)$  zusammenhängend ist.  $\square$

## 10. Quotientenräume

DEFINITION 10.1. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Es sei  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion auf die Menge der Äquivalenzklassen. Die Finaltopologie auf  $X/\sim$  bezüglich  $\pi$  heißt *Quotiententopologie*,  $\mathcal{T}_\sim$ , und  $X/\sim$  heißt *Quotientenraum* von  $X$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim$ .

Es ist also  $O \subset X/\sim$  nach Satz 8.2 genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}(O)$  offen in  $X$  ist und  $\mathcal{T}_\sim$  ist die feinste Topologie auf  $X/\sim$ , so dass die kanonische Projektion  $\pi$  stetig ist.

BEMERKUNG. Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und gilt für alle  $x, x' \in X: x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ , so gibt es als Abbildung von Mengen  $g: X/\sim \rightarrow Y$  mit  $g[x] = f(x)$  und die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie sagt, dass  $g$  stetig ist.

BEISPIEL. Wir betrachten auf  $X = \mathbb{R}$  die Äquivalenzrelation mit  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Wir werden später sehen, dass  $X/\sim \cong \mathbb{S}^1$  als topologische Räume, wobei  $X/\sim$  mit der Quotiententopologie und  $\mathbb{S}^1$  mit der Unterraumtopologie des  $\mathbb{R}^2$  versehen ist.

DEFINITION 10.2. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  nicht leer. Wir definieren die Äquivalenzrelation  $a \sim_A a'$ , falls  $a, a' \in A$ , und auf  $X \setminus A$  sei  $\sim_A$  trivial, d.h. es gibt nur die Relation  $(x \sim_A x)$ . Dann setzen wir

$$X/A := X/\sim_A.$$

Im Quotientenraum  $X/A$  werden alle Elemente der Teilmenge  $A \subset X$  zu einem Punkt identifiziert. Damit hat  $X/A$  immer einen ausgezeichneten Punkt. Wir setzen  $X/\emptyset = X \sqcup \{*\}$ .

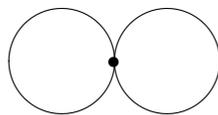
BEISPIELE.

- (a) Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  gewählt. Es sei  $A := \{x_0, y_0\} \subset X \sqcup Y$ . Dann heißt

$$X \vee Y := (X \sqcup Y)/A = (X \sqcup Y)/x_0 \sim y_0$$

das *Bouquet* oder die *verbundene Summe* von  $X$  und  $Y$ . Dies hängt im Allgemeinen von der Wahl der Punkte  $x_0, y_0$  ab.

Zum Beispiel ist  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  eine Figur von der Form zweier sich berührender Kreislinien.



- (b) Es seien  $X, Y$  mit  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$  wie in (a) gewählt. Die Abbildungen  $X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y_0)$  und  $Y \rightarrow X \times Y, y \mapsto (x_0, y)$  induzieren eine Abbildung  $X \sqcup Y \rightarrow X \times Y$ , die  $x_0$  und  $y_0$  auf den gleichen Punkt  $(x_0, y_0)$  schickt, sonst aber injektiv ist und daher eine Injektion ergibt

$$X \vee Y \hookrightarrow X \times Y.$$

Dann heißt der topologische Raum  $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$  das *Smashprodukt* von  $X$  und  $Y$ .

Wir überlegen uns als Beispiel  $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ . Das Produkt  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ist ein zweidimensionaler Torus, die Teilmenge  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  darin sind ein Meridian und eine Longitude, die sich in einem Punkt schneiden. Kontrahiert man diese auf einen Punkt, so erhält man einen Raum, der homöomorph zur Kugel  $\mathbb{S}^2$  ist. Allgemeiner gilt  $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}$ .

- (c) Wir betrachten die auf  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  von  $x \sim -x$  erzeugte Äquivalenzrelation. Der Raum  $\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$  heißt die *projektive Ebene*.

Analog definieren wir auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation  $x \approx y$ , falls es ein  $\lambda \neq 0$  gibt, so dass  $x = \lambda y$ . Ähnlich sei auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$  die Äquivalenzrelation  $x \sim -x$  für  $x \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$  definiert, bei der antipodale Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe identifiziert werden. Dann gilt

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \approx \cong \mathbb{D}^2 / \sim.$$

Es ist nützlich, verschiedene Darstellungen eines Raumes als Quotienten zu haben.

Wir untersuchen nun, was bei Quotienten mit den Trennungaxiomen passiert. Spoiler alert: Im Allgemeinen nichts Gutes.

BEISPIEL. Wir definieren auf  $X := \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  die Äquivalenzrelation  $(x, 1) \sim (x, -1)$  für  $x \neq 0$ . Der Quotientenraum ist eine *Gerade mit zwei Ursprüngen*. Man kann die beiden Punkte  $(0, -1)$  und  $(0, 1)$  nicht durch offene Umgebungen voneinander trennen. Obwohl  $X$  hausdorffsch war, ist der Quotient  $X / \sim$  es nicht.

SATZ 10.3.

- (a) *Es sei  $X$  regulär und  $A \subset X$  abgeschlossen. Dann ist  $X/A$  hausdorffsch.*  
 (b) *Es sei  $X$  normal und  $A \subset X$  abgeschlossen. Dann ist  $X/A$  normal.*

BEWEIS. Wir zeigen nur die erste Aussage. Es seien  $x \neq y \in X/A$ . Sind beide Elemente von  $[A]$  verschieden, so betrachten wir die eindeutigen Repräsentanten in  $X$  und disjunkte Umgebungen in  $X$ , die  $A$  nicht treffen. Solche Umgebungen existieren, weil  $X$  regulär ist. Die Bilder dieser Umgebungen unter  $\pi$  in  $X/A$  trennen  $x$  und  $y$ .

Ist einer der Punkte  $y = [A]$ , so benutzen wir die Regularität von  $X$ , um das Urbild von  $x$  und  $A$  in  $X$  durch offene Umgebungen zu trennen.  $\square$

Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum,  $Y$  eine Menge und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen, so induziert  $f$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ : Es ist  $x \sim_f x'$  für  $x, x' \in X$ , falls  $f(x) = f(x')$ . Gleichzeitig können wir auf  $Y$  die Finaltopologie bezüglich  $f$  betrachten. Wir klären im Folgenden, wie  $X / \sim_f$  und  $Y$  mit der Finaltopologie zusammenhängen.

DEFINITION 10.4. Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und wir versehen  $X / \sim_f$  mit der Quotiententopologie, so dass die kanonische Projektion  $X \xrightarrow{\pi} X / \sim_f$  stetig ist. Das Bild  $f(X) \xrightarrow{j} Y$  versehen wir mit der Unterraumtopologie, so dass  $j$  nach Satz 5.2 (a) stetig ist.

- (a) Ist  $\bar{f}: X / \sim_f \rightarrow f(X)$ ,  $\bar{f}[x] = f(x)$  ein Homöomorphismus, so heißt  $f$  *identifizierende Abbildung*.  
 (b) Ist  $f$  außerdem surjektiv, so heißt die Topologie auf  $Y$  die *Identifizierungstopologie bzgl.  $f$* .

Es ist klar, dass die Abbildung  $\bar{f}$  stetig ist: Da das Bild  $f(X)$  die Initialtopologie bezüglich  $f(X) \xrightarrow{j} Y$  trägt, folgt aus der Stetigkeit der Verkettung  $f = j \circ (\bar{f} \circ \pi)$ , dass  $\bar{f} \circ \pi$  stetig ist und da  $X / \sim_f$  die Finaltopologie bezüglich  $X \xrightarrow{\pi} X / \sim_f$  trägt, folgt aus der Stetigkeit der Verkettung  $\bar{f} \circ \pi$  die Stetigkeit von  $\bar{f}$ .

BEISPIELE.

(a) Es sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t \mapsto \exp(2\pi it)$$

Es gilt  $x \sim_f y$  genau dann, wenn  $x - y \in \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{S}^1$  trägt die Identifizierungstopologie:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = f(\mathbb{R}).$$

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1, \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|},$$

die jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor den zugehörigen Einheitsvektor zuordnet. Sie induziert auf  $\mathbb{R}^2$  die Äquivalenzrelation  $x \sim_f y$  genau dann, wenn es ein  $\lambda > 0$  gibt mit  $x = \lambda y$ . Die Identifizierungstopologie auf  $\mathbb{S}^1$  stimmt mit der Unterraumtopologie überein.

Ein Kriterium ist das Folgende:

**SATZ 10.5.** *Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig, surjektiv und offen (oder abgeschlossen), so trägt  $Y$  die Identifizierungstopologie bezüglich  $f$ .*

**BEWEIS.** Wir zeigen die Behauptung für  $f$  offen. Ist  $B \subset Y$ , so dass  $f^{-1}(B)$  offen ist, so ist  $B$  offen, weil wegen der Surjektivität von  $f$  gilt, dass  $f(f^{-1}(B)) = B$ , und weil  $f$  nach Annahme offen ist. Damit ist die Topologie auf  $Y$  feiner als die Identifizierungstopologie und somit sind beide Topologien gleich.  $\square$

**DEFINITION 10.6.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  mit kanonischer Projektion  $X \xrightarrow{\pi} X/\sim$ .

(a) Die *Saturierung* einer Teilmenge  $A \subset X$  bezüglich der Relation  $\sim$  ist die Teilmenge

$$\text{Sat}^X(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) \subset X.$$

Es gilt immer  $A \subset \text{Sat}^X(A)$ .

(b) Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *saturiert*, wenn  $A = \text{Sat}^X(A)$  gilt.

Eine Saturierung fügt also alle Elemente in  $X$  zu  $A$  hinzu, die äquivalent sind zu Elementen aus  $A$ .

Das folgende Resultat erlaubt es uns, Quotienten zu bestimmen, indem wir die Äquivalenzrelation auf einem geeigneten Unterraum betrachten.

**SATZ 10.7.** *Es sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation  $\sim_X$ . Es sei  $Y \subset X$  gegeben mit den folgenden Eigenschaften:*

(a)  *$Y$  schneidet jede Äquivalenzklasse von  $\sim_X$  in wenigstens einem Punkt.*

(b) *Ist  $B \subset Y$  offen und saturiert in  $Y$ , so ist  $\text{Sat}^X(B)$  offen in  $X$ .*

*Wir bezeichnen die auf  $Y$  durch Einschränkung erhaltene Äquivalenzrelation mit  $\sim_Y$ . Dann ist*

$$h: Y/\sim_Y \rightarrow X/\sim_X, \\ [y]_Y \mapsto [y]_X$$

*ein Homöomorphismus.*

**BEWEIS.** Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\iota} & X \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y/\sim_Y & \xrightarrow{h} & X/\sim_X \end{array}$$

Nach Definition der Äquivalenzrelation  $\sim_Y$  ist  $h$  injektiv; wegen Bedingung (a) ist  $h$  surjektiv.

Die Verkettung  $\pi_X \circ \iota = h \circ \pi_Y$  ist stetig. Damit ist wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch die Abbildung  $h$  stetig.

Es bleibt zu zeigen, dass  $h$  offen ist. Dazu sei  $V \subset Y/\sim_Y$  offen. Dann ist  $B := \pi_Y^{-1}(V)$  nach Definition der Quotientenraumtopologie offen in  $Y$ . Außerdem gilt

$$\pi_Y^{-1} \circ \pi_Y(B) = \pi_Y^{-1} \circ (\pi_Y \circ \pi_Y^{-1})(V) = \pi_Y^{-1}(V) = B,$$

weil  $\pi_Y \circ \pi_Y^{-1}(E) = E$  für alle  $E \subset Y/\sim_Y$  wegen der Surjektivität von  $\pi_Y$ . Also ist  $B$  saturiert in  $Y$ . Wegen der zweiten Annahme ist dann

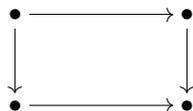
$$\pi_X^{-1} \circ \pi_X(B) = \text{Sat}^X(B)$$

offen in  $X$ . Wir rechnen nach, dass

$$h(V) = h\pi_Y(B) = \pi_X(\iota(B)) = \pi_X\pi_X^{-1}\pi_X(B) = \pi_X(\text{Sat}^X(B)).$$

Dies ist offen in  $X/\sim_X$ , weil  $\pi_X^{-1}\pi_X(\text{Sat}^X(B)) = \text{Sat}^X(B)$  offen in  $X$  ist. Also ist die Abbildung  $h$  offen.  $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir den Torus  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  auch durch Identifizierung der gegenüberliegenden Kanten eines Rechteckes beschreiben:



Weitere wichtige Beispiele für Quotientenräume sind:

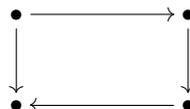
- Das Möbiusband:



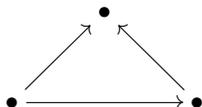
- Der Zylinder:



- Die Kleinsche Flasche:



- Die Narrenkappe:



Wir wollen nun noch entlang von Abbildungen verkleben:

DEFINITION 10.8. Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume,  $A \subset X$  sei abgeschlossen und  $f: A \rightarrow Y$  sei eine stetige Abbildung. Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf  $X \sqcup Y$ :

$$z_1 \sim_f z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2, & \text{für beliebige } z_1, z_2 \in X \text{ oder } Y, \\ z_1, z_2 \in A & \text{und } f(z_1) = f(z_2), \\ z_1 \in A, z_2 \in f(A) & \text{und } f(z_1) = z_2, \\ z_2 \in A, z_1 \in f(A) & \text{und } f(z_2) = z_1. \end{cases}$$

Der Quotientenraum  $X \sqcup Y / \sim_f$  wird mit  $X \cup_f Y$  bezeichnet und heißt der durch *Zusammenkleben von  $X$  und  $Y$  mittels  $f$  entstandene Raum*.

Es werden also die Elemente in  $A$  mit ihren Bildern unter  $f$  identifiziert.

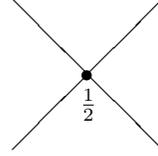
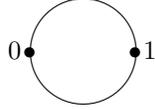
BEISPIELE.

- (a) Es seien  $X = Y = \mathbb{D}^2$  abgeschlossene Kreisscheiben,  $\mathbb{S}^1 = A \subset X$  der Rand von  $X$  und  $f$  sei die Einbettung  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{D}^2$ . Dann ist

$$\mathbb{D}^2 \cup_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2 \cong \mathbb{S}^2.$$

Hierbei notieren wir die Teilmenge  $A = \mathbb{S}^1$ , aber nicht die Abbildung.

- (b) Es seien  $X = Y = [0, 1]$ . Dann erhalten wir für  $A_1 = \{0, 1\}$  und  $f_1: A_1 \hookrightarrow Y$  durch Zusammenkleben einen Raum, der homöomorph zu  $\mathbb{S}^1$  ist, und für  $A_2 = \{\frac{1}{2}\}$  und  $f_2: A_2 \hookrightarrow Y$  durch Zusammenkleben zwei sich in einem Punkt berührende Intervalle. Die Abbildung  $f$  ist also wesentlich, auch wenn sie manchmal in der Notation unterdrückt wird.



#### DEFINITION 10.9.

Es sei  $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$  die abgeschlossene Einheitskugel und  $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{D}^n \setminus \mathring{\mathbb{D}}^n$ , jeweils versehen mit der Unterraumtopologie des  $\mathbb{R}^n$ .

Es sei  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum. Man sagt,  $X \cup_f \mathbb{D}^n$  sei durch *Ankleben* einer  $n$ -Zelle mittels  $f$  entstanden.

#### BEISPIELE.

- (a) Die  $n$ -Sphäre erhält man durch Ankleben einer  $n$ -Zelle an die Kreisscheibe  $\mathbb{D}^n$  entlang des Randes.  
 (b) Klebt man an den Rand eines Möbiusbands eine 2-Zelle, so erhält man die reelle projektive Ebene.

### 11. Filter

Wir formalisieren die Eigenschaften des Umgebungssystems  $\mathfrak{U}(x)$  eines  $x \in X$  in einem topologischen Raum  $X$ .

DEFINITION 11.1. Ein *Filter*  $F$  auf einer Menge  $X$  ist ein System von Teilmengen von  $X$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $X \in F$ , aber  $\emptyset \notin F$ .  
 (b) Abgeschlossenheit unter endlichen Schnitten: Aus  $A, B \in F$  folgt  $A \cap B \in F$ .  
 (c) Abgeschlossenheit unter Obermengen: Aus  $B \in F$  und  $B \subset C$  folgt  $C \in F$ .

DEFINITION 11.2. Ein nicht-leeres System  $\mathcal{B}$  von Teilmengen von  $X$  heißt *Filterbasis* auf  $X$ , falls gilt:

- (a) Der Durchschnitt zweier Mengen aus  $\mathcal{B}$  enthält eine Menge aus  $\mathcal{B}$ .  
 (b)  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ .

BEMERKUNG. Jede Filterbasis  $\mathcal{B}$  erzeugt einen Filter  $\langle \mathcal{B} \rangle = F_{\mathcal{B}} = \{Y \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset Y\}$ .

BEISPIEL. Ist  $A \subset X$  und  $A \neq \emptyset$ , so ist  $\mathcal{B} = \{A\}$  eine Filterbasis und  $F_{\mathcal{B}} = \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$ .

DEFINITION 11.3. Ist  $F$  ein Filter und ist  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis, so heißt  $\mathcal{B}$  eine *Filterbasis für*  $F$ , falls gilt:

$$\forall Y \in F \exists B \in \mathcal{B} : B \subset Y.$$

#### BEISPIELE.

- (a) Für jede Menge  $X$  ist  $F = \{X\}$  ein Filter.  
 (b) Für jedes  $x \in X$  bildet  $F_x := \{A \subset X \mid x \in A\}$  einen Filter.  
 (c) Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Menge der Umgebungen  $\mathfrak{U}(x)$  eines Punktes  $x \in X$  bildet einen Filter, den *Umgebungsfilter* von  $x$ . Es gilt:  $F_{\mathfrak{U}(x)} \subset F_x$ .

DEFINITION 11.4. Es seien  $F_1$  und  $F_2$  Filter auf einer Menge.  $F_1$  heißt *feiner* als  $F_2$  und  $F_2$  heißt *größer* als  $F_1$ , falls  $F_2 \subset F_1$  gilt.

BEISPIEL. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Der Umgebungsfilter  $\mathfrak{U}(x)$  von  $x$  ist größer als der Filter  $F_x$ . Der Filter  $F = \{X\}$  auf einer Menge  $X$  ist der größte Filter auf  $X$ .

DEFINITION 11.5. Ein Filter  $F$  auf einer Menge  $X$  heißt *Ultrafilter*, wenn es keinen echt feineren Filter auf  $X$  gibt.

BEISPIEL. Der Filter  $F_x$  ist für jedes  $x \in X$  ein Ultrafilter: Angenommen,  $F$  ist ein Filter, der echt feiner ist als  $F_x$ . Dann existiert ein  $Y \in F \setminus F_x$ . Das heißt aber nach der Definition von  $F_x$ , dass  $x \notin Y$ . Andererseits ist  $\{x\} \in F_x \subset F$ . Damit muss der Schnitt  $\{x\} \cap Y$  im Filter  $F$  liegen, aber der Schnitt ist leer. Ein Filter darf aber nicht die leere Menge enthalten.

BEISPIELE.

- (a) Es sei  $(x_n)$  eine Folge mit Werten in einer Menge  $X$ . Dann ist das System der Mengen  $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , also der Endsegmente der Folge, eine Filterbasis auf  $X$ .
- (b) Die Teilmengen

$$\mathcal{B} := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

bilden die Basis eines Filters auf  $\mathbb{R}$ .

- (c) Ist  $F$  ein Filter auf einer Menge  $X$  und ist  $f: X \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung, so ist

$$\mathcal{B}_f := \{f(A) \mid A \in F\}$$

eine Filterbasis für den *Bildfilter*,  $f(F)$ , des Filters  $F$  unter der Abbildung  $f$ .

SATZ 11.6.

- (a) Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.
- (b) Ein Filter  $F$  auf einer Menge  $X$  ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge  $A \subset X$  entweder  $A \in F$  oder  $X \setminus A \in F$  gilt.

BEWEIS.

(b) Da  $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ , kann es im Filter  $F$  nicht zwei Mengen  $Y_1, Y_2$  geben mit  $Y_1 \subset A$  und  $Y_2 \subset X \setminus A$ . Also treffen alle  $Y \in F$  entweder  $A$ , also  $A \cap Y \neq \emptyset$ , oder alle treffen  $X \setminus A$  nicht-trivial. Wir nehmen an, dass für alle  $Y \in F$  gilt  $Y \cap A \neq \emptyset$ . Dann ist

$$\mathcal{B} := \{Y \cap A \mid Y \in F\}$$

eine Filterbasis und der von  $\mathcal{B}$  erzeugte Filter  $\langle \mathcal{B} \rangle$  wäre feiner als  $F$ . Da aber  $F$  ein Ultrafilter ist, gilt  $\langle \mathcal{B} \rangle = F$ . Dann ist aber  $A \in F$ .

Es sei nun der Filter  $G$  echt feiner als  $F$ . Dann gibt es ein  $Y \in G$  mit  $Y \notin F$ . Wegen der Annahme ist  $X \setminus Y \in F$ . Da  $G$  echt feiner ist, ist auch  $X \setminus Y \in G$ . Die disjunkten Mengen  $Y$  und  $X \setminus Y$  können aber nicht gleichzeitig Elemente eines Filters sein.

(a) Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Filter auf  $X$ , die feiner sind als ein gegebener Filter  $F$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  wird durch Inklusion partiell geordnet. Ist  $\overline{\mathcal{F}}$  eine nicht-leere total geordnete Teilmenge von  $\mathcal{F}$ , so ist  $\bigcup_{G \in \overline{\mathcal{F}}} G$  ein Filter und eine obere Schranke von  $\overline{\mathcal{F}}$ . Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element  $U_{\overline{\mathcal{F}}}$ , das nach Definition dann ein Ultrafilter ist, der  $F$  enthält. □

Wir wissen, dass für  $\emptyset \neq A \subset X$  das System von Teilmengen  $F_A = \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$  ein Filter ist. Ist  $a \in A$  ein beliebiges Element, so ist der Filter  $F_a = \{Z \subset X \mid a \in Z\}$  ein Ultrafilter, der den Filter  $F_A$  enthält. Damit sind Ultrafilter also im Allgemeinen nicht eindeutig durch den Filter bestimmt ist.

Manchmal kann es schwierig sein, für einen gegebenen Filter  $F$  einen expliziten Ultrafilter anzugeben, der  $F$  verfeinert.

Sie wissen, dass Konvergenz von Folgen ein problematischer Begriff für allgemeine topologische Räume ist. Filter verschaffen da Abhilfe.

DEFINITION 11.7.

- (a) Ein Filter  $F$  auf einem topologischen Raum  $X$  *konvergiert gegen*  $x \in X$ ,  $F \rightarrow x$ , falls der Filter  $F$  feiner als der Umgebungsfiler  $\mathfrak{U}(x)$  von  $x$  ist, also falls gilt  $\mathfrak{U}(x) \subset F$ .
- (b) Ein  $x \in X$  heißt *Berührungspunkt* eines Filters  $F$ , falls für alle  $Y \in F$  und alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gilt  $Y \cap U \neq \emptyset$ .

BEMERKUNG. Die Menge aller Berührungspunkte eines Filters  $F$  ist  $\bigcap_{Y \in F} \overline{Y}$ .

BEISPIEL. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem topologischen Raum  $X$  und  $F$  der von  $(x_n)$  erzeugte Filter mit der Basis bestehend aus den Endsegmenten der Folge:  $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$ . Dann ist  $x \in X$  genau dann ein Häufungspunkt der Folge, wenn  $x$  Berührungspunkt des Filters ist: Ein  $x \in X$  ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  unendlich viele Glieder der Folge enthält. Genau dann ist aber  $B_n \cap U \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

SATZ 11.8.

- (a) *Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist der Abschluss  $\bar{A}$  die Menge der Berührungspunkte des Filters  $F_A := \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$ , also gilt*

$$\bar{A} = \bigcap_{Y \in F_A} \bar{Y} = \bigcap_{A \subset Y} \bar{Y}.$$

- (b) *Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist  $x$  genau dann ein Element von  $\bar{A}$ , wenn es einen Filter  $F$  auf  $X$  gibt mit  $A \in F$  und  $F \rightarrow x$ .*  
(c) *Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn das Bild jeden Filters  $F$  auf  $X$ , der gegen  $x$  konvergiert, gegen  $f(x)$  konvergiert.*

BEWEIS.

- (a) Ein  $x \in X$  ist genau dann ein Berührungspunkt des Filters  $F_A$ , wenn für jedes  $Y \in F_A$ , also für jedes  $Y \supset A$ , und jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gilt  $U \cap Y \neq \emptyset$ . Das ist aber genau dann der Fall, wenn für jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gilt  $U \cap A \neq \emptyset$ . Genau dann ist aber  $x \in \bar{A}$ .  
(b) Es sei zunächst  $x \in \bar{A}$ . Dann ist  $\mathcal{B} := \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{U}(x)\}$  die Basis eines Filters  $F$ , weil  $A \cap U$  für jede Umgebung  $U$  von  $x$  nicht leer ist. Dies gilt, weil  $x$  ein Berührungspunkt von  $A$  ist, und  $\mathcal{B}$  abgeschlossen ist unter Durchschnitten wegen

$$(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{B}.$$

Mit  $U = X$  sieht man, dass  $A \cap X = A \in \mathcal{B}$ , also  $A \in F$  gilt. Ferner gilt  $F \rightarrow x$ , denn  $\mathfrak{U}(x) \subset F$ , weil  $U \supset A \cap U$  und somit  $U \in F$  für alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$ .

Gilt umgekehrt  $F \rightarrow x$ , also  $\mathfrak{U}(x) \subset F$ , und ist  $A \in F$ , dann ist für alle Umgebungen  $U \in \mathfrak{U}(x)$  die Menge  $A \cap U$  in  $F$  nicht leer. Also ist  $x \in \bar{A}$ .

- (c) Das Bild jedes Filters  $F$  auf  $X$ , der gegen  $x$  konvergiert, konvergiere gegen  $f(x)$ . Wir wählen als Filter den Umgebungsfilter selbst,  $F = \mathfrak{U}(x)$ . Dann konvergiert  $f(\mathfrak{U}(x)) \rightarrow f(x)$ , also gilt  $\mathfrak{U}(f(x)) \subset f(\mathfrak{U}(x))$ . Für jede Umgebung  $V \in \mathfrak{U}(f(x))$  können wir also ein  $U \in \mathfrak{U}(x)$  finden mit  $f(U) \subset V$ . Das heißt aber nach Definition 2.4 (a), dass die Abbildung  $f$  in  $x \in X$  stetig ist.

Ist umgekehrt  $f$  stetig und für einen Filter gelte, dass  $F \rightarrow x$ . Für jede Umgebung  $V \in \mathfrak{U}(f(x))$  gibt es wegen der Stetigkeit von  $f$  eine Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  mit  $f(U) \subset V$ . Wegen  $F \rightarrow x$  gilt  $U \in \mathfrak{U}(x) \subset F$  und somit  $f(U) \subset \mathcal{B}_{f(F)}$ . Da  $f(U) \subset V$  gilt, folgt, dass auch  $V$  im Bildfilter  $f(F)$  ist. Da  $V$  beliebig war, folgt  $\mathfrak{U}(f(x)) \subset f(F)$  und somit  $F(f) \rightarrow f(x)$ . □

SATZ 11.9. *Ein  $x \in X$  eines topologischen Raums ist genau dann Berührungspunkt eines Filters  $F$  auf  $X$ , wenn es einen Filter  $G$  mit  $F \subset G$  gibt, der gegen  $x$  konvergiert.*

BEWEIS. Hat der Filter  $F$  den Berührungspunkt  $x \in X$ , so ist

$$\mathcal{B} := \{U \cap Y \text{ mit } U \in \mathfrak{U}(x) \text{ und } Y \in F\}$$

eine Filterbasis für einen Filter  $G$ , der feiner ist als  $F$  und  $\mathfrak{U}(x)$  und der somit gegen  $x$  konvergiert.

Gilt umgekehrt  $F \subset G$  und  $G \rightarrow x$ , so liegt jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  und jedes  $Y \in F$  im Filter  $G$ , also ist  $Y \cap U \neq \emptyset$  und  $x$  ist Berührungspunkt des Filters  $F$ . □

SATZ 11.10. *Es seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume und  $(f: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  Abbildungen. Wir versehen die Menge  $X$  mit der Initialtopologie. Dann konvergiert ein Filter  $F$  auf  $X$  genau dann gegen  $x \in X$ , wenn  $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$  für alle  $i \in I$  gilt.*

BEWEIS. Es konvergiere  $F \rightarrow x$ . Da die Abbildungen  $f_i$  bezüglich der Initialtopologie stetig sind, folgt mit Satz 11.8 (c), dass  $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$  für alle  $i \in I$  gilt.

Umgekehrt hat  $x \in X$  in der Initialtopologie nach Satz 7.2 die Umgebungsbasis aus Mengen

$$\bigcap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e) \text{ mit } E \subset I \text{ endlich und } V_e \in \mathfrak{U}(f_e(x)).$$

Nach Annahme gibt es für jedes  $V_e$  mit  $e \in E$  ein  $U_e \in F$  mit  $f_e(U_e) \subset V_e$ . Es ist der endliche Schnitt  $U := \bigcap_{e \in E} U_e \in F$ . Aus  $f_e(U_e) \subset V_e$  folgt

$$f_e^{-1}(V_e) \supset f_e^{-1}f_e(U_e) \supset U_e$$

und somit  $U \subset \bigcap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e)$ . Damit ist jedes Element der Umgebungsbasis im Filter  $F$  enthalten, also  $F \rightarrow x$ .  $\square$

Als Spezialfall erhalten wir:

KOROLLAR 11.11. *Es seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume und  $X := \prod_{i \in I} X_i$  ihr Produkt mit Projektionen  $\pi_i: X \rightarrow X_i$ . Ein Filter  $F$  auf  $X$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn alle Bildfilter  $\pi_i(F) \rightarrow \pi_i(x)$  konvergieren.*

## 12. Kompaktheit

DEFINITION 12.1.

- (a) Eine Familie  $\mathfrak{U}$  von Teilmengen einer Menge  $X$  heißt *Überdeckung* von  $X$ , wenn  $X = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$  gilt.
- (b) Eine Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  heißt *offen*, wenn jedes  $U \in \mathfrak{U}$  offen in  $X$  ist.
- (c) Eine *Teilüberdeckung* einer Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $X$  ist eine Teilfamilie  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ , die ebenfalls eine Überdeckung ist.

LEMMA 12.2.

Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) Jede offene Überdeckung von  $X$  hat eine endliche Teilüberdeckung.
- (b) Sind  $A_i$ ,  $i \in I$ , abgeschlossene Teilmengen mit  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ , so gibt es endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset.$$

- (c) Jeder Filter auf  $X$  hat einen Berührungspunkt.
- (d) Jeder Ultrafilter konvergiert.

BEWEIS.

- (a)  $\Rightarrow$  (b) Die Mengen  $U_i := X \setminus A_i$  bilden eine offene Überdeckung von  $X$  und wir finden nach Annahme eine endliche Teilüberdeckung,  $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ . Dann ist  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset$ .
- (b)  $\Rightarrow$  (c) Es sei  $F := \{Y_i\}_{i \in I}$  ein beliebiger Filter auf  $X$ . Wir betrachten die abgeschlossenen Mengen  $A_i := \overline{Y_i}$ . Dann sind alle endlichen Schnitte nicht-leer,

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_n,$$

weil  $F$  ein Filter ist. Wegen (b) ist dann  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ . Jeder Punkt  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  ist dann ein Berührungspunkt von  $F$  nach Satz 11 (d).

- (c)  $\Rightarrow$  (d) Jeder Ultrafilter  $F$  hat nach (c) insbesondere einen Berührungspunkt  $x$ . Nach Satz 11.9 gibt es dann einen feineren Filter  $G \supset F$ , der gegen  $x$  konvergiert. Weil  $F$  Ultrafilter ist, ist  $F$  schon maximal und es gilt  $F = G$ .
- (d)  $\Rightarrow$  (a) Es sei  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Für jede endliche Teilmenge  $E \subset I$  setzen wir

$$A_E := X \setminus \left( \bigcup_{e \in E} U_e \right) \neq \emptyset.$$

Der Schnitt zweier Mengen  $A_E$  und  $A_{E'}$  ist

$$A_E \cap A_{E'} = X \setminus \left( \bigcup_{e \in E \cup E'} U_e \right) = A_{E \cup E'}.$$

Diese Mengen bilden daher die Basis eines Filters, der in einem Ultrafilter  $F$  enthalten ist.

Nach Annahme gilt dann  $F \rightarrow x$  für ein  $x \in X$ , was heißt, dass  $F$  feiner ist als der Umgebungsfilter von  $x$ . Da eine Überdeckung vorliegt, gibt es ein  $i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Es muss wegen  $F \rightarrow x$  die Umgebung  $U_i$  von  $x$  in  $F$  liegen, also  $U_i \in F$  gelten. Aber nach Konstruktion von  $F$  muss auch  $X \setminus U_i \in F$  gelten. Damit wäre die leere Menge in  $F$ .

□

DEFINITION 12.3. Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn er die Bedingungen des Lemmas 12.2 erfüllt.

Manchmal, gerade im französischsprachigen Raum, heißen solche Räume auch nur *quasikompakt* und man fordert zusätzlich hausdorffsch für Kompaktheit.

SATZ 12.4. *Es sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum. Dann gilt:*

- (a) *Jeder abgeschlossene Teilraum von  $X$  ist kompakt.*
- (b) *Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv, so ist  $Y$  kompakt.*

BEWEIS.

- (a) Es sei  $A \subset X$  abgeschlossen. Zu einer offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$  finden wir in  $X$  offene Mengen  $V_i \subset X$  mit  $U_i = V_i \cap A$ . Dann ist  $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$  eine offene Überdeckung von  $X$ , in der wir eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{i \in E} V_i \cup (X \setminus A)$  von  $X$  finden können. Somit ist  $\bigcup_{i \in E} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ .
- (b) Ist  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , so ist  $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$  wegen der Stetigkeit von  $f$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $(f^{-1}(U_i))_{i \in E}$  mit  $E \subset I$  endlich. Da  $f$  surjektiv ist, ist  $(U_i)_{i \in E}$  eine endliche Überdeckung von  $Y$ .

□

KOROLLAR 12.5.

- (a) *Ist  $X$  kompakt und  $f: X \rightarrow Y$  stetig, so ist  $f(X)$  kompakt.*
- (b) *Ist  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $X$  kompakt, so nimmt  $f$  sein Maximum und Minimum an, denn  $f(X) \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.*

Vorsicht: Ist  $K \subset Y$  kompakt, so ist das Urbild  $f^{-1}(K)$  nicht unbedingt kompakt. Als Gegenbeispiel taugt eine konstante Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

BEISPIEL. Das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  ist kompakt:

Ist  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ , so sei  $\mathcal{E}$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $I$ . Wir setzen

$$T := \{t \in [0, 1] \mid \text{es gibt } E \in \mathcal{E}, \text{ so dass } [0, t] \subset \bigcup_{e \in E} U_e\}.$$

- $T \neq \emptyset$ , denn  $0 \in T$ , weil  $0 \in U_i$  für ein  $i \in I$ .
- $T$  ist nach oben beschränkt als Teilmenge von  $[0, 1]$ . Es sei  $s := \sup T$ .
- Ist  $t_2 \in T$  und  $0 \leq t_1 < t_2$ , so gilt  $[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \bigcup_{i \in E} U_i$  und somit  $t_1 \in T$ .
- $T$  ist kein halboffenes Intervall, also von der Form  $[0, s)$  mit  $0 < s < 1$ : Es gibt einen Index  $i_0$  mit  $s \in U_{i_0}$ . Da  $U_{i_0}$  offen ist, gibt es  $t < s$  mit  $[t, s] \subset U_{i_0}$ . Weil  $s = \sup T$ , ist  $t \in T$ . Damit hat aber  $[0, s] = [0, t] \cup [t, s]$  eine endliche offene Überdeckung bestehend aus  $U_{i_0}$  und einer endlichen offenen Überdeckung von  $[0, t]$ .
- Also ist  $T = [0, s]$ . Angenommen, es wäre  $s < 1$ . Dann ist  $s \in U_{i_1}$  für einen Index  $i_1$  und es existiert  $t > s$  mit  $[s, t] \subset U_{i_1}$ . Damit ist aber auch  $[0, t] \subset T$ , im Widerspruch dazu, dass  $s$  das Supremum von  $T$  ist.

BEISPIELE.

- (a) Ein endlicher topologischer Raum  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ist kompakt.
- (b) Der  $\mathbb{R}^n$  ist nicht kompakt, weil die offene Überdeckung  $(B_1(x))_{x \in \mathbb{R}^n}$  durch Einheitskugeln keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (c) Die Menge  $X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  ist nicht kompakt: Zum Beispiel hat die Überdeckung  $B_{\frac{1}{2n(n+1)}}(\frac{1}{n})$  keine endliche Teilüberdeckung. Aber die Menge  $X' := X \cup \{0\}$  ist kompakt: In jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele der Punkte  $\frac{1}{n}$ , d.h. wir brauchen für eine Überdeckung nur noch endlich viele andere offene Mengen.

LEMMA 12.6. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $L \subset X$  und  $K \subset X$  kompakt und  $L \cap K = \emptyset$ . Kann man jeden Punkt von  $K$  und die ganze Menge  $L$  durch offene Umgebungen trennen, dann kann man auch ganz  $K$  und ganz  $L$  durch offene Umgebungen trennen.*

BEWEIS. Für jeden Punkt  $x \in K$  wählen wir eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und eine offene Umgebung  $V_x$  von  $L$ , die disjunkt sind:  $K_x \cap L_x = \emptyset$ . In der Überdeckung  $(U_x)_{x \in K}$  des kompakten Raums  $K$  wählen wir eine endliche Teilüberdeckung,

$$K \subset U := U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Dann ist der endliche Durchschnitt  $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$  eine offene Umgebung von  $L$ , die zu  $U$  disjunkt ist.  $\square$

SATZ 12.7. *Es sei  $K \subset X$  und  $X$  hausdorffsch. Ist  $K$  kompakt, so ist  $K$  in  $X$  abgeschlossen.*

BEWEIS. Es sei  $y \in X \setminus K$ . Wir setzen  $L = \{y\}$  und da  $X$  hausdorffsch ist, finden wir für jeden Punkt  $x \in K$  offene Umgebungen, die  $x$  und  $y$  trennen. Nach Lemma 12.6 gibt es dann eine offene Umgebung von  $y$ , die die ganze Menge  $K$  nicht trifft. Also ist  $X \setminus K$  offen und  $K$  abgeschlossen.  $\square$

KOROLLAR 12.8.

- (a) *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv. Ist  $X$  kompakt und ist  $Y$  hausdorffsch, so ist  $f$  ein Homöomorphismus.*
- (b) *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig und injektiv. Ist  $X$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch, so ist  $f$  eine Einbettung.*

BEWEIS. Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  abgeschlossen ist. Ist  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist  $A$  nach Satz 12.4 (a) kompakt. Nach Satz 12.4 (b) ist  $f(A) \subset Y$  kompakt. Nach Satz 12.7 folgt aus der Tatsache, dass  $Y$  hausdorffsch ist, dass  $f(A)$  abgeschlossen ist. Die Abbildung  $f$  ist also abgeschlossen.  $\square$

SATZ 12.9. *Jeder kompakte Hausdorffraum  $X$  ist normal.*

BEWEIS. Es seien  $A, B$  abgeschlossene disjunkte Teilmengen von  $X$ ; sie sind nach Satz 12.4 (a) kompakt. Da  $X$  hausdorffsch ist, finden wir für jedes Paar  $a \in A$  und  $b \in B$  disjunkte offene Umgebungen  $U_{ab}$  von  $a$  und  $V_{ab}$  von  $b$ . Dann hat für festes  $a \in A$  die offene Überdeckung  $\bigcup_{b \in B} V_{a,b}$  der kompakten Menge  $B$  eine endliche offene Teilüberdeckung  $\bigcup_{i=1}^n V_{a,b_i}$ . Dann ist der endliche Durchschnitt  $\bigcap_{i=1}^n U_{a,b_i}$  eine offene Umgebung von  $a$ , die disjunkt zur offenen Menge  $\bigcup_{i=1}^n V_{a,b_i}$  ist und die  $B$  enthält. Man kann also  $B$  und jeden Punkt  $a \in A$  durch offene Umgebungen trennen. Nach Lemma 12.6 kann man dann auch  $A$  und  $B$  durch offene Mengen trennen, also ist  $X$  normal.  $\square$

SATZ 12.10 (Tychonoff). *Ein nichtleerer Produktraum  $X := \prod_{i \in I} X_i$  ist genau dann kompakt, wenn jedes  $X_i$  kompakt ist.*

Man beachte, dass hier keine Endlichkeitsannahme an die Indexmenge  $I$  gemacht wird.

BEWEIS. Die Projektionen  $\pi_j: X \rightarrow X_j$  sind nach Satz 7.4 stetig und surjektiv. Daher sind nach Satz 12.4 (b) die Bilder  $X_j$  kompakt, wenn  $X$  kompakt ist.

Es seien umgekehrt alle  $X_j$  kompakt und es sei  $F$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Dann ist für jedes  $j \in I$  der Bildfilter  $\pi_j(F)$  ein Ultrafilter und konvergiert nach Lemma 12.2 gegen ein  $x_j \in X_j$ , weil  $X_j$  kompakt ist. Nach Satz 11.10 konvergiert dann  $F \rightarrow (x_i)_{i \in I}$ . Also ist das Produkt kompakt.  $\square$

BEISPIEL. Wir erhalten sofort, dass  $\prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$  kompakt ist.

Wir erhalten hieraus leicht die bekannte Beschreibung kompakter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ :

**KOROLLAR 12.11 (Heine-Borel).** *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

**BEWEIS.** Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so ist  $K$  nach Satz 12.7 abgeschlossen, weil  $\mathbb{R}^n$  als metrischer Raum hausdorffsch ist. Die offene Überdeckung  $(B_1(x))_{x \in K}$  hat eine endliche Teilüberdeckung, weshalb  $K$  auch beschränkt ist.

Es sei umgekehrt  $K$  abgeschlossen und beschränkt. Da  $K$  beschränkt ist, existiert  $a \in \mathbb{R}$  mit  $K \subset [-a, a]^n$ . Der Würfel  $[-a, a]^n$  ist wegen des Satzes von Tychonoff 12.10 kompakt, weil das Intervall  $[-a, a]$  kompakt ist. Wegen Satz 12.4 ist  $K$  als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Würfels  $[-a, a]^n$  kompakt.  $\square$

### 13. Kompaktifizierungen

Die 2-dimensionale Einheitssphäre kann man über die stereographische Projektion  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^2$  als Ein-Punkt-Kompaktifizierung  $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  der reellen Ebene auffassen. Dieses Phänomen möchten wir allgemeiner verstehen.

**DEFINITION 13.1.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung in  $X$  besitzt.

**BEMERKUNGEN.**

- (a) Lokal-kompakt heißt nicht unbedingt, dass die kompakten Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.
- (b) Der  $\mathbb{R}^n$  ist lokal kompakt:  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  ist für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Umgebung von  $x$ .

**SATZ 13.2.** *Ist  $X$  ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so ist  $X$  regulär.*

Der Vergleich mit Satz 12.9 gilt also, dass kompakt und  $T_2$  normal impliziert während lokal kompakt und  $T_2$  regulär impliziert.

**BEWEIS.** Es sei  $x \in X$  und  $K$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Dann ist nach Satz 12.7  $K$  abgeschlossen und als kompakter Hausdorffraum nach Satz 12.9 normal. Für jede Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  in  $X$  ist  $U \cap K$  eine Umgebung von  $x$  in  $K$ . Nun ist  $K$  insbesondere regulär. Wir finden also eine Umgebung  $V \in \mathfrak{U}^K(x)$  mit  $V \subset \overline{V} \subset U \cap K$ . Aber  $V$  ist auch eine Umgebung von  $x$  in  $X$ , weil  $K$  auch Umgebung von  $x$  ist. Der Abschluss  $\overline{V}$  von  $V$  in  $K$  ist auch abgeschlossen in  $X$ , da  $K$  abgeschlossen ist.

Die abgeschlossenen Umgebungen bilden also eine Umgebungsbasis von  $x$ . Nach Satz 6.5 ist  $X$  regulär.  $\square$

Der Beweis zeigt, dass in der obigen Situation auch die kompakten Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden, weil  $\overline{V}$  kompakt ist.

**SATZ 13.3.** *Es sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum. Dann gibt es einen bis auf Homöomorphie eindeutigen kompakten Hausdorffraum  $X^+$  mit  $X \subset X^+$ , so dass das Komplement  $X^+ \setminus X$  aus einem Element besteht.*

**BEMERKUNGEN.**

- (a) Wir bezeichnen dann  $X^+ \setminus X = \{\infty\}$  und nennen  $\infty$  den *unendlich fernen Punkt*.
- (b)  $X^+$  heißt die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* oder auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* von  $X$ .

**BEWEIS.** Auf der Menge  $X^+ := X \sqcup \{\infty\}$  mit  $\infty \notin X$  definieren wir das folgende System offener Mengen:

- Alle offenen Mengen in  $X$ .
- Alle Mengen der Form  $X^+ \setminus K$  mit  $K$  kompakt in  $X$ .

Wir rechnen nach, dass dies wirklich eine Topologie auf der Menge  $X^+$  definiert:

(a) Es sei  $(K_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie kompakter Teilmengen in  $X$ . Dann ist

$$\bigcup_{i \in I} (X^+ \setminus K_i) = X^+ \setminus \bigcap_{i \in I} K_i.$$

Da  $X$  hausdorffsch ist, ist nach Satz 12.7 jedes  $K_i$  abgeschlossen; somit ist auch der Schnitt  $\bigcap_{i \in I} K_i$  abgeschlossen. Wegen Satz 12.4 (a) ist der Schnitt als abgeschlossene Teilmenge einer der kompakten Mengen  $K_i$  kompakt.

(b) Es sei  $(K_i)_{i \in I_1}$  eine beliebige Familie kompakter Teilmengen von  $X$  und  $(O_i)_{i \in I_2}$  eine beliebige Familie offener Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $A_i := X \setminus O_i$  abgeschlossen und es gilt

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i \in I_1} (X^+ \setminus K_i) \cup \bigcup_{j \in I_2} O_j \\ &= \bigcup_{i \in I_1} (X^+ \setminus K_i) \cup \bigcup_{j \in I_2} (X^+ \setminus A_j) \\ &= \bigcup_{I_1 \cup I_2} X^+ \setminus (K_i \cap A_j) \\ &= X^+ \setminus \bigcap_{I_1 \cup I_2} (K_i \cap A_j) \end{aligned}$$

Die Menge  $K_i \cap A_j$  ist als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums  $K_i$  nach Satz 12.4 (a) kompakt. Der Schnitt ist ebenfalls kompakt.

(c) Es sei  $O \subset X$  offen und  $K \subset X$  kompakt. Wir betrachten  $(X^+ \setminus K) \cap O$ . Da  $K$  abgeschlossen in  $X$  ist, ist  $(X^+ \setminus K) \cap X$  offen in  $X$  und somit der Schnitt  $(X^+ \setminus K) \cap X \cap O = (X^+ \setminus K) \cap O$  offen in  $X$ .

(d) Sind  $K_1, K_2$  kompakt in  $X$ , so ist auch  $K_1 \cup K_2$  kompakt. Daher ist

$$(X^+ \setminus K_1) \cap (X^+ \setminus K_2) = X^+ \setminus (K_1 \cup K_2)$$

offen in  $X^+$ .

Wegen (a) und (b) ist die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen offen. Wegen (c) und (d) sind endliche Schnitte offener Mengen offen. Also liegt eine Topologie vor. Die offensichtliche Abbildung  $X \rightarrow X^+$  ist eine Einbettung.

Wir untersuchen Eigenschaften dieser Topologie:

- $X^+$  ist hausdorffsch. Zwei verschiedene Punkte  $x, y \in X$  können durch offene Umgebungen getrennt werden, weil  $X$  als hausdorffsch vorausgesetzt wurde. Es sei also  $x = \infty$  und  $y \in X$ . Da  $X$  lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung  $K$  von  $y$ . Dann ist  $X^+ \setminus K$  eine offene Umgebung von  $\infty$ . Die Umgebungen sind disjunkt,  $K \cap (X^+ \setminus K) = \emptyset$ .
- $X^+$  ist kompakt. Jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X^+$  enthält eine Menge der Form  $U_{i_0} = X^+ \setminus K$  mit  $K$  kompakt. Wir überdecken dann  $K$  mit endlich vielen der Mengen  $U_i$  und  $X^+$  durch diese Mengen und  $U_{i_0}$ .

Es sei nun  $Y$  ein topologischer Raum mit den gleichen Eigenschaften wie  $X^+$ : d.h. es gibt ein Komplement  $\tilde{Y}$  einer einelementigen Menge  $\{\tilde{\infty}\} \subset Y$  und einen Homöomorphismus  $f: \tilde{Y} \cong X$ . Dann ist die Abbildung

$$\bar{f}: Y \rightarrow X^+$$

mit

$$\bar{f}|_{\tilde{Y}} := f \text{ und } \bar{f}(\tilde{\infty}) := \infty$$

bijektiv und in allen Punkten des Unterraums  $\tilde{Y}$  stetig. Es ist noch die Stetigkeit in  $\tilde{\infty}$  zu zeigen. Da  $f^{-1}$  nach Voraussetzung stetig auf  $X$  ist, sind die Urbilder  $f^{-1}(K)$  kompakter Mengen in  $X$  nach Satz 12.4 (b) kompakt. Eine offene Umgebung  $U \in \mathcal{U}(\infty)$  ist von der Form  $U = X^+ \setminus K$ , daher ist

$$f^{-1}(U) = Y \setminus f^{-1}(K).$$

Nun ist  $f^{-1}(K)$  kompakt, daher  $f^{-1}(U)$  offen und  $\tilde{\infty} \in f^{-1}(U)$ . Also ist  $\bar{f}$  stetig; nach Korollar 12.8 (a) ist  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus.  $\square$

BEMERKUNGEN.

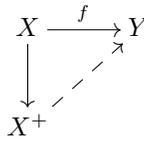
- (a) Für  $X = \mathbb{R}^n$  ist  $X^+ \cong \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ : Nach Heine-Borel ist  $\mathbb{S}^n$  kompakt. Es sei  $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$  der Nordpol und es sei  $s$  die Abbildung

$$s: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

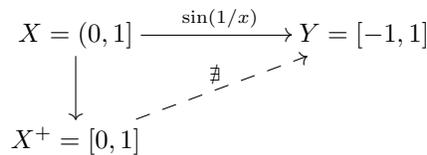
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Dies ist ein Homöomorphismus zwischen  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  und  $\mathbb{R}^n$ . Also ist  $\mathbb{S}^n$  die Alexandroff-Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$ .

- (b) Ist  $X$  lokal-kompakt und hausdorffsch und ist  $X$  nicht schon selbst kompakt, so ist  $X$  dicht in  $X^+$  (Übung).  
 (c) Ein Problem der Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist, dass stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  in einen kompakten Raum nicht unbedingt stetig fortgesetzt werden können:



Ein mögliches Gegenbeispiel ist



Es gibt auch allgemeinere Kompaktifizierungen.

DEFINITION 13.4. Es sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Ein Paar  $(e, Y)$ , bestehend aus einem kompakten topologischen Raum  $Y$  und einer Einbettung  $e: X \rightarrow Z \subset Y$ , deren Bild  $Z$  dicht in  $Y$  ist, heißt eine *Kompaktifizierung* von  $X$ .

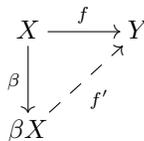
Eine wichtige Klasse von Kompaktifizierungen gibt es für vollständig reguläre Räume:

DEFINITION 13.5. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *vollständig regulär*, falls für  $X$  das Trennungsaxiom  $T_1$  gilt und es für jede abgeschlossene Menge  $A \subset X$  und jedes  $x \notin A$  eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow [0, 1]$  gibt mit  $f(x) = 0$  und  $f|_A = 1$ .

Die Existenz einer solchen Funktion impliziert das Trennungsaxiom  $T_3$ ; daher wird vollständig regulär auch mit  $T_{3a}$  bezeichnet.

Es gilt dann:

THEOREM 13.6. Zu jedem vollständig regulären Raum  $X$  existiert eine Kompaktifizierung  $(\beta, \beta X)$  mit der Eigenschaft, dass es für jeden kompakten Hausdorff-Raum  $Y$  und jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung  $f': \beta X \rightarrow Y$  gibt, so dass  $f' \circ \beta = f$



*gilt. Diese Kompaktifizierung heißt Stone-Čech-Kompaktifizierung.*

Für einen Beweis verweisen wir auf [Q, Satz 12.18].

## 14. Direkte und inverse Limites topologischer Räume

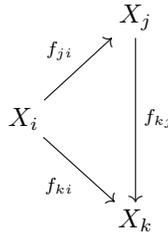
DEFINITION 14.1. Es sei  $\Omega$  eine partiell geordnete Menge, also eine Menge mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation.

- (a) Ein *direktes System* topologischer Räume  $\mathcal{X}$  besteht
- aus einem topologischen Raum  $X_i$  für jedes  $i \in \Omega$ ,
  - einer stetigen Abbildung

$$f_{ji}: X_i \rightarrow X_j \quad \text{für alle } i \leq j,$$

so dass

- $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  für alle  $i \in \Omega$  und
- $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$  für alle  $i \leq j \leq k$  gilt.

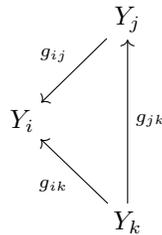


- (b) Ein *inverses System* topologischer Räume  $\mathcal{Y}$  besteht
- aus einem topologischen Raum  $Y_i$  für jedes  $i \in \Omega$ ,
  - einer stetigen Abbildung

$$g_{ij}: Y_j \rightarrow Y_i \quad \text{für alle } i \leq j,$$

so dass

- $g_{ii} = \text{id}_{Y_i}$  für alle  $i \in \Omega$  und
- $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$  für alle  $i \leq j \leq k$  gilt.



BEISPIELE.

- (a) Ist  $\Omega = (\mathbb{N}, \leq)$  die gewöhnliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen, ist  $X_i$  ein Unterraum von  $X_{i+1}$  für jedes natürliche  $i$  und ist  $f_{i+1,i}: X_i \rightarrow X_{i+1}$  die Inklusion, so definieren wir  $f_{ji} := f_{j,j-1} \circ \dots \circ f_{i+1,i}$  und erhalten ein direktes System.
- (b) Ist  $\Omega = \mathbb{N}$  dagegen mit der trivialen Ordnung versehen, d.h. es gilt nur  $x \leq x$ , dann ist  $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  sowohl direktes als auch inverses System.
- (c) Es sei  $I$  eine beliebige Menge,  $\Omega$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $I$ , partiell geordnet durch Inklusion. Es sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine durch  $I$  indizierte Familie topologischer Räume.
- Dann ist

$$(14.1) \quad X_S := \bigsqcup_{s \in S} X_s$$

mit der für  $S \subset T$  offensichtlichen Inklusion  $X_S \rightarrow X_T$  der Summen ein direktes System.

- Es ist

$$(14.2) \quad Y_T := \prod_{t \in T} X_t$$

mit der für  $S \subset T$  offensichtlichen Projektion  $Y_T \rightarrow Y_S$  der Produkte ein inverses System.

- (d) Es sei wieder  $\Omega = (\mathbb{N}, \leq)$  und  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist für  $x \in X$  durch  $X_n := B_{1/n}(x)$  mit der für  $n \leq m$  gegebenen Inklusion  $B_{1/m}(x) \subset B_{1/n}(x)$  ein inverses System.

DEFINITION 14.2. Es sei  $\mathcal{X}$  ein direktes System topologischer Räume. Wir betrachten auf der Summe  $\bigsqcup_{i \in \Omega} X_i$  die Äquivalenzrelation, die von  $(x_i, i) \sim (f_{ji}(x_i), j)$  für  $i \leq j$  erzeugt wird. Der *direkte Limes* ist der topologische Raum

$$\varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} = \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i / \sim$$

mit der Quotiententopologie aus Definition 10.1.

Man beachte, dass sowohl die topologische Summe nach Definition 8.3 als auch der Quotientenraum nach Definition 10.1 mit der Finaltopologie versehen sind.

BEISPIELE.

- (a) Für  $\Omega = \mathbb{N}$  mit der gewöhnlichen Ordnung und eine aufsteigende Kette  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  ist der direkte Limes die Vereinigung:

$$\varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} = \prod_{i \in \Omega} X_i / \sim \cong \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i.$$

- (b) Für  $\Omega = \mathbb{N}$  mit der trivialen Ordnung ist der direkte Limes die disjunkte Vereinigung:

$$\varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} = \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i.$$

- (c) Auch das Beispiel (14.1) ergibt die disjunkte Vereinigung.  
 (d) Wir betrachten die partiell geordnete Menge  $\Omega = \{0, 1, 2\}$  mit  $0 < 1, 0 < 2$ , aber nicht  $1 < 2$ . Ein zugehöriges gerichtetes System ist damit von der Form

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\iota_{10}} & X_1 \\ \downarrow \iota_{20} & & \\ & & X_2. \end{array}$$

Der *Pushout* ist der direkte Limes dieses gerichteten Systems. Nehmen wir an, dass  $X_0$  ein Unterraum von  $X_1$  und  $X_2$  ist, dann ist der Pushout die Vereinigung:

$$\varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 / (x_0, 0) \sim (\iota_{10}(x_0), 1) \sim (\iota_{20}(x_0), 2) = X_1 \cup_{X_0} X_2.$$

Es werden also  $X_1$  und  $X_2$  entlang von  $X_0$  aneinander geklebt.

- (e) Es sei  $X_n = \mathbb{R}^n$  mit den Einbettungen

$$\begin{aligned} X_n &\rightarrow X_{n+1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0). \end{aligned}$$

Dann ist der direkte Limes der Raum der reellen Folgen, für die fast alle Folgenglieder trivial sind.

- (f) Wir setzen  $X_n := \mathbb{S}^n$  und betrachten die Einbettung, die  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  als Äquator von  $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  auffasst,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit  $\mathbb{S}^\infty$  den direkten Limes dieses Systems.

DEFINITION 14.3. Es sei  $\mathcal{Y}$  ein inverses System topologischer Räume. Der *inverse Limes* ist der topologische Raum

$$\varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} = \{(y_i)_{i \in \Omega} \text{ mit } y_i = g_{ij}(y_j) \text{ für alle } i \leq j \text{ in } \Omega\}$$

mit der Unterraumtopologie, also der Unterraum der *kohärenten Folgen* im Produkt  $\prod_{i \in \Omega} Y_i$ .

Man beachte, dass sowohl das Produkt nach Definition 7.3 als auch der Unterraum mit der Initialtopologie versehen sind.

BEISPIELE.

- (a) Für das inverse System, bei dem  $\Omega = \mathbb{N}$  mit der trivialen Ordnung versehen ist und  $\mathcal{Y} = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $f_{ii} = \text{id}_{Y_i}$  erhalten wir  $\varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} = \prod Y_i$ . Wir erhalten das Produkt auch im Beispiel (14.2).
- (b) Wir betrachten wieder  $\Omega = \{0, 1, 2\}$  mit  $0 < 1, 0 < 2$ , aber nicht  $1 < 2$  und ein zugehöriges inverses System

$$\begin{array}{ccc} & & Y_2 \\ & & \downarrow g_{02} \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0 \end{array}$$

Dann ist

$$\varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} = \{(y_0, y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = y_0 = g_{01}(y_1)\} \cong \{(y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = g_{01}(y_1)\}$$

das *Faserprodukt*  $Y_1 \times_{Y_0} Y_2$  oder der *Pullback* von  $Y_1$  und  $Y_2$  über  $Y_0$ .

Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung,  $y \in Y$  und  $i: \{y\} \rightarrow Y$  die Inklusionsabbildung, so ist der Pullback von

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

gerade die Faser  $f^{-1}(y) \subset X$ .

- (c) Ist  $Y_n = B_{1/n}(x)$ , so ist

$$\varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} \cong \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n}(x) = \{x\}.$$

Allgemeiner gilt für eine fallende Kette  $\mathcal{Y} = (Y_1 \supset Y_2 \supset \dots)$

$$\varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} \cong \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n.$$

BEMERKUNG. Es sei  $\Omega$  eine partiell geordnete Menge und  $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in \Omega}$  ein direktes System. Hat  $\Omega$  ein größtes Element  $i_0$ , d.h.  $i \leq i_0$  für alle  $i \in \Omega$ , so ist

$$\varinjlim \mathcal{X} = X_{i_0},$$

weil in  $\bigsqcup_{i \in \Omega} X_i / \sim$  gilt:  $(x, i) \sim (f_{i_0, i}(x_i), i_0)$ .

Was gilt dual für inverse Limites und kleinste Elemente?

- (a) Die Abbildung

$$\tilde{\iota}_j: X_j \xrightarrow{\iota_j} \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i \xrightarrow{\pi} \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i / \sim = \varinjlim_{\Omega} \mathcal{X}$$

ist stetig, weil  $\iota_j$  stetig ist wegen der universellen Eigenschaft der Summe und weil  $\pi$  stetig ist wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie. Die Abbildung  $\tilde{\iota}_j := \pi \circ \iota_j$  heißt oft die *kanonische Injektion*, auch wenn sie nicht unbedingt injektiv ist.

Zum Beispiel haben wir im Falle von Pushouts das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\iota_{10}} & X_1 \\ \iota_{20} \downarrow & & \downarrow \tilde{\iota}_1 \\ X_2 & \xrightarrow{\tilde{\iota}_2} & X_1 \cup_{X_0} X_2. \end{array}$$

Was ist  $\tilde{\iota}_0$ ?

- (b) Dual dazu erhalten wir durch Einschränkung der kanonischen Projektion des Produkts stetige Abbildungen

$$\tilde{\pi}_j : \varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} \subset \prod_{i \in \Omega} Y_i \xrightarrow{\pi_j} Y_j,$$

die oft auch *kanonische Projektionen* genannt werden, obwohl sie nicht unbedingt surjektiv sind. Zum Beispiel haben wir bei Pullbacks

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \times_{Y_0} Y_2 & \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} & Y_2 \\ \tilde{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow g_{02} \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0. \end{array}$$

Die Abbildung  $\tilde{\pi}_0$  ergibt sich. (Warum?)

Weitere berühmte Beispiele für inverse Limites sind die folgenden:

BEISPIELE.

- (a) Ist  $p \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte Primzahl, so betrachten wir das inverse System

$$\mathcal{Y} = \left( \mathbb{Z}/p \xleftarrow{q^2} \mathbb{Z}/p^2 \xleftarrow{q^2} \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots \right)$$

mit der kanonischen Projektion

$$\varrho_{n+1} : \mathbb{Z}/p^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n.$$

Dann ist

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y} = \{(x_1, x_2, \dots) \text{ mit } x_n \in \mathbb{Z}/p^n, \varrho_n(x_n) = x_{n-1} \text{ für alle } n \geq 2\} \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n.$$

Dies ist der Ring der *p-adischen ganzen Zahlen*.

- (b) Wir betrachten das Bouquet

$$X_n := \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$$

mit einem gemeinsamen Grundpunkt. Die Projektionen

$$X_{n+1} = \bigvee_{i=1}^{n+1} \mathbb{S}^1 = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \rightarrow X_n = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1,$$

welche die letzte Schlaufe auf den gemeinsamen Grundpunkt abbilden, ergeben ein inverses System  $\mathcal{X}$ . Der topologische Raum  $\varprojlim_{\Omega} \mathcal{X}$  heißt der *Hawaiische Ohrring*.

Wir können nun die universellen Eigenschaften direkter und inverser Limites formulieren.

SATZ 14.4 (Universelle Eigenschaft des direkten Limes). *Es sei  $\mathcal{X}$  ein direktes System topologischer Räume und  $Y$  ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie  $(X_i \xrightarrow{\varphi_i} Y)_{i \in \Omega}$  stetiger Abbildungen mit  $\varphi_j \circ f_{ji} = \varphi_i$  für alle  $i \leq j$  in  $\Omega$  genau eine stetige Abbildung*

$$\phi : \varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} \rightarrow Y$$

mit  $\phi \circ \tilde{v}_j = \varphi_j$  für alle  $j \in \Omega$ .

Als Diagramm, mit  $i \leq j$ ,

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ f_{ji} \swarrow & \downarrow \tilde{v}_i & \searrow \varphi_i \\ X_j & \xrightarrow{\tilde{v}_j} \varinjlim_{\Omega} \mathcal{X} & \\ \varphi_j \searrow & \downarrow \phi & \swarrow \varphi_j \\ & Y & \end{array}$$

Vorsicht, hier ist die Terminologie verwirrend: ein direkter Limes in diesem Sinn wird in der Kategorientheorie ein Kolimes genannt.

BEWEIS. In der Definition

$$\tilde{t}_j: X_j \xrightarrow{t_j} \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i \xrightarrow{\pi_j} \bigsqcup_{i \in \Omega} X_i / \sim = \varinjlim_{\Omega} X$$

treten zweimal Finaltopologien auf, so dass die universellen Eigenschaften der Summe aus Satz 8.5 und des Quotienten eine eindeutige stetige Abbildung  $\phi$  liefern.  $\square$

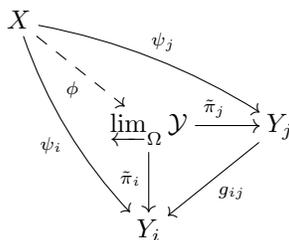
Ganz analog beweist man die duale Aussage:

SATZ 14.5 (Universelle Eigenschaft des inversen Limes). *Es sei  $\mathcal{Y}$  ein inverses System topologischer Räume und  $X$  ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie  $(X \xrightarrow{\psi_i} Y_i)_{i \in \Omega}$  stetiger Abbildungen mit  $g_{ij} \circ \psi_j = \psi_i$  für alle  $i \leq j$  in  $\Omega$  genau eine stetige Abbildung*

$$\psi: X \rightarrow \varprojlim_{\Omega} \mathcal{Y}$$

mit  $\psi_j = \tilde{\pi}_j \circ \psi$  für alle  $j$  in  $\Omega$ .

Als Diagramm:



Vorsicht, auch hier ist die Terminologie verwirrend: ein inverser Limes in diesem Sinn wird in der Kategorientheorie ein Limes genannt.

BEMERKUNG. Erfüllt ein topologischer Raum  $Z$  mit gegebenen stetigen Abbildungen  $f_j: X_j \rightarrow Z$  die universelle Eigenschaft des direkten Limes  $\varinjlim_{\Omega} X_j$  aus Satz 14.4, so ist  $Z$  homöomorph zu  $\varinjlim_{\Omega} X_j$  mit eindeutiger Homöomorphie. Gleiches gilt für den inversen Limes.

# Elementare Homotopietheorie

## 1. Homotopien

Im folgenden seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Abbildungen  $f, g, H, \dots$  seien stetig, wenn nichts anderes vorausgesetzt wurde.

DEFINITION 1.1.

- (a) Eine *Homotopie* ist eine stetige Abbildung

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y.$$

- (b) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *homotop* zu einer Abbildung  $g: X \rightarrow Y$ , wenn es eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt mit  $f(x) = H(x, 0)$  und  $g(x) = H(x, 1)$  für alle  $x \in X$ . Wir schreiben dann  $f \simeq g$  und betrachten die durch das Intervall  $[0, 1]$  parametrisierte Familie von Abbildungen  $H_t: X \rightarrow Y$  mit  $H_t(x) = H(x, t)$ .

LEMMA 1.2.

- (a)  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation.  
 (b) Es seien  $f, g: X \rightarrow Y$  Abbildungen und  $f \simeq g$ . Es seien ferner Abbildungen  $k: Y \rightarrow Z$  und  $h: W \rightarrow X$  gegeben. Dann gilt

$$k \circ f \simeq k \circ g \quad \text{und} \quad f \circ h \simeq g \circ h.$$

BEWEIS.

- (a) Es gilt  $f \simeq f$  wegen der konstanten Homotopie  $H(x, t) = f(x)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Gilt  $f \simeq g$  mit Homotopie  $H(x, t)$ , so ist  $\overline{H}(x, t) := H(x, 1 - t)$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ .

Ist  $H$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  und  $H'$  eine Homotopie von  $g$  nach  $h$ , dann ist

$$H''(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H'(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $h$ .

- (b) Ist  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ , so ist

$$X \times [0, 1] \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{k} Z$$

eine Homotopie von  $k \circ f$  nach  $k \circ g$ . Ebenso ist

$$W \times [0, 1] \xrightarrow{h \times \text{id}} X \times [0, 1] \xrightarrow{H} Y$$

eine Homotopie von  $f \circ h$  nach  $g \circ h$ .

□

DEFINITION 1.3.

- (a) Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die Äquivalenzklasse

$$[f] := \{g: X \rightarrow Y \mid g \simeq f\}$$

heißt die *Homotopieklasse* von  $f$ .

- (b) Die *Homotopiemenge* zweier topologischen Räume  $X, Y$  ist die Menge von Homotopieklassen von Abbildungen

$$[X, Y] := \{[f] \mid f: X \rightarrow Y\}.$$

- (c) Ist

$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} Z,$$

so definieren wir

$$\begin{aligned} k_*: [X, Y] &\rightarrow [X, Z], \\ [f] &\mapsto [k \circ f] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h^*: [X, Y] &\rightarrow [W, Y], \\ [f] &\mapsto [f \circ h]. \end{aligned}$$

Aus Lemma 1.2 (b) ergibt sich sofort:

LEMMA 1.4. *Diese Abbildungen haben die folgenden Eigenschaften:*

- Sind  $k_1, k_2: Y \rightarrow Z$  homotop, so gilt  $(k_1)_* = (k_2)_*$ .
- Sind  $h_1, h_2: W \rightarrow X$  homotop, so gilt  $(h_1)^* = (h_2)^*$ .
- Ist  $Y \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{k'} Z'$ , so gilt  $(k' \circ k)_* = k'_* \circ k_*$ .
- Dagegen gilt für  $W' \xrightarrow{h'} W \xrightarrow{h} X$   $(h \circ h')^* = (h')^* \circ h^*$ .

DEFINITION 1.5.

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *Homotopieaquivalenz*, falls es eine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ .
- (b) Gibt es solche Abbildungen, so heißen die topologischen Räume  $X, Y$  *homotopieäquivalent* und wir benutzen die Notation  $X \simeq Y$ .
- (c) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *nullhomotop*, falls  $f$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Wir schreiben dann  $f \simeq *$ .
- (d) Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenziehbar*, wenn  $\text{id}_X$  nullhomotop ist. Dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in X$  und eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(x, 0) = x$  und  $H(x, 1) = x_0$  für alle  $x \in X$ . Wir schreiben dann  $X \simeq *$ .
- (e) Kann die Homotopie  $H$  in (d) sogar so gewählt werden, dass  $H(x_0, t) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so heißt der topologische Raum mit Grundpunkt  $(X, x_0)$  *zusammenziehbar*.

BEISPIELE.

- (a) Jeder Homöomorphismus ist auch eine Homotopieaquivalenz.
- (b) Der  $\mathbb{R}^n$  ist in Bezug auf jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  zusammenziehbar mit

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0.$$

- (c) Ein zusammenziehbarer Raum ist homotopieäquivalent zu einem Einpunktraum. Wir betrachten dazu die eindeutige Abbildung  $f: X \rightarrow *$  und die Abbildung  $g: * \rightarrow X$  mit  $g(*) = x_0$ . Dann ist  $f \circ g = \text{id}_*$  und  $g \circ f: X \rightarrow X$  ist die konstante Abbildung mit Wert  $x_0$ . Weil  $X$  zusammenziehbar ist, gibt es eine Homotopie  $H$  von  $\text{id}_X$  zu  $g \circ f$ . Dies rechtfertigt die Notation  $X \simeq *$  für einen zusammenziehbaren Raum.

DEFINITION 1.6.

- (a) Eine Teilmenge  $Y \subset X$  mit Einbettung  $\iota: Y \rightarrow X$  heißt *Deformationsretrakt*, falls es eine Abbildung  $r: X \times [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $r(x, 0) = x$  und  $r(x, 1) \in Y$  für alle  $x \in X$  und  $r(y, 1) = y$  für alle  $y \in Y$ , d.h.  $r_1 \circ \iota = \text{id}_Y$  und  $r_0 = \text{id}_X$  und  $r_1(X) \subset Y$ .
- (b) Gilt zusätzlich  $r(y, t) = y$  für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $y \in Y$ , so heißt  $Y \subset X$  *starker Deformationsretrakt*.

BEISPIELE.

- (a) Der Unterraum  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist ein Deformationsretrakt, wie die Abbildung

$$r_t(x) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

zeigt. Es liegt sogar ein starker Deformationsretrakt vor.

- (b) Indem man ein Möbiusband auf seine Mittellinie zusammenzieht, sieht man, dass es homotopieäquivalent zu  $\mathbb{S}^1$  ist.

SATZ 1.7. Gilt  $X \simeq X'$ , so haben wir für jeden topologischen Raum  $Y, Z$  Bijektionen

$$[X, Y] \cong [X', Y] \quad \text{und} \quad [Z, X] \cong [Z, X'].$$

KOROLLAR 1.8. Ist  $X \simeq *$ , so gilt für beliebiges  $W$ , dass  $[[W, X]] = 1$  und für ein wegzusammenhängendes  $Y$ , dass  $[[X, Y]] = 1$ .

DEFINITION 1.9.

- (a) Es sei  $A \subset X$  und seien  $f, g: X \rightarrow Y$  gegeben mit  $f|_A = g|_A$ .

Dann heißt  $f$  homotop zu  $g$  relativ zu  $A$ , falls es eine Homotopie  $H$  gibt mit

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

und

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } t \in I.$$

- (b) Für  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  setzen wir

$$[X, A; Y, B] := \{[f] \mid f(A) \subset B\},$$

wobei  $[f]$  die Homotopieklasse relativ zu  $A$  bezeichnet.

## 2. Die Fundamentalgruppe

Wir benutzen nun das Konzept der Homotopien, um wegzusammenhängenden topologischen Räumen eine algebraische Invariante zuzuordnen.

DEFINITION 2.1. Es sei  $X$  wegzusammenhängend und  $x_0 \in X$  sei gewählt, der sogenannte *Grundpunkt*. Dann heißt

$$\pi_1(X, x_0) := [[0, 1], \{0, 1\}; X, x_0]$$

die *Fundamentalgruppe* von  $X$  bezüglich  $x_0$ .

BEMERKUNGEN.

- (a) Ein Element  $[w] \in \pi_1(X, x_0)$  wird repräsentiert durch einen geschlossenen Weg  $w: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $w(0) = w(1) = x_0$ . Wir identifizieren Wege, für die es eine Homotopie gibt, die den Grundpunkt festlässt, also mit  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ .
- (b) Es gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong [\mathbb{S}^1, 1; X, x_0],$$

wobei wir  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  auffassen und als Grundpunkt  $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  wählen.

SATZ 2.2. Die Menge  $\pi_1(X, x_0)$  trägt die natürliche Struktur einer Gruppe.

BEWEIS.

- Wir wählen Repräsentanten  $w', w''$  von  $[w'], [w''] \in \pi_1(X, x_0)$  und definieren den Weg

$$w' * w''(t) := \begin{cases} w'(2t), & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w''(2t-1), & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

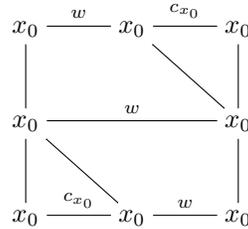
und setze  $[w'] * [w''] := [w' * w'']$ . Man hängt also Wege aneinander.

Dies ist wohldefiniert, denn aus  $w'_0 \simeq w'_1$  folgt  $[w'_0 * w''] = [w'_1 * w'']$  und aus  $w''_0 \simeq w''_1$  folgt  $[w' * w''_0] = [w' * w''_1]$ .

- Ein neutrales Element ist gegeben durch den konstanten Weg in  $x_0$ , also  $c_{x_0}(t) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Es ist

$$w * c_{x_0} \simeq w \simeq c_{x_0} * w.$$

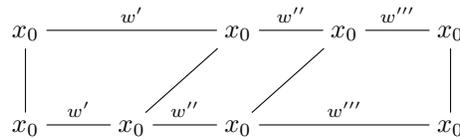
Explizite Homotopien sind im folgenden Bild skizziert:



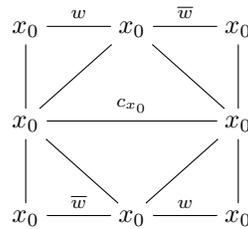
- Die Verknüpfung ist assoziativ auf Homotopieklassen; es gilt

$$w' * (w'' * w''') \simeq (w' * w'') * w''.$$

Eine explizite Homotopie ist im folgenden Bild skizziert:



- Für einen Weg  $w$  ist  $\bar{w}(t) := w(1 - t)$  ein Repräsentant des Inversen,  $[w]^{-1} = [\bar{w}]$ . Eine explizite Homotopie ist im folgenden Bild skizziert:



□

Man kann natürlich auch Wege hintereinanderschalten, die nicht geschlossen sind, sobald der Endpunkt des ersten Wegs der Anfangspunkt des zweiten Wegs ist. Auch hierfür werden wir die Notation  $*$  verwenden.

**BEMERKUNG.** Wir haben die Homotopien jeweils skizziert. Alternativ kann man Reparametrisierungen benutzen: Ist  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig und  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$ , dann gilt für jeden Weg  $f: [0, 1] \rightarrow X$ , dass  $f \circ \varphi \simeq f$ , denn es gibt die Homotopie

$$H(s, t) := f((1 - t)\varphi(s) + ts),$$

für die  $H(s, 0) = f(\varphi(s))$  und  $H(s, 1) = f(s)$  gilt. Der Ausdruck ist wohldefiniert, denn  $(1 - t)\varphi(s) + ts$  liegt zwischen  $\varphi(s)$  und  $s$ , also in  $[0, 1]$ . Reparametrisierungen ändern also die Homotopieklasse nicht.

Die Homotopie  $w * c_{x_0} \simeq w$  aus dem Beweis von Satz 2.2 folgt nun zum Beispiel aus der Reparametrisierung

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s, & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{für } s \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

denn  $w \circ \varphi(s) = w * c_{x_0}$ .

**BEMERKUNG.** Die Fundamentalgruppe ist im Allgemeinen nicht abelsch. Wir werden später zum Beispiel sehen, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, 1)$  nicht abelsch ist.

SATZ 2.3. Es sei  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  stetig, d.h.  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig mit  $f(x_0) = y_0$  für gewählte Grundpunkte  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\pi_1(f) &:= f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]\end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Sind  $f$  und  $g$  homotop, so ist  $f_* = g_*$ .

BEWEIS.

- Die Abbildung ist wohldefiniert wegen Lemma 1.2 (b)
- Es gilt  $f_*[c_{x_0}] = [f \circ c_{x_0}] = [c_{y_0}]$ .
- Man sieht direkt

$$f_*[w * w'] = [f \circ (w * w')] = [(f \circ w) * (f \circ w')].$$

- Ist  $f \simeq g$ , so folgt mit Lemma 1.2, dass  $f \circ w \simeq g \circ w$  und damit  $f_* = g_*$ .

□

KOROLLAR 2.4. Sind die Räume homotopieäquivalent,  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ , so sind die Fundamentalgruppen isomorph,  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ . Ist insbesondere  $(X, x_0)$  zusammenziehbar,  $X \simeq *$ , so ist die Fundamentalgruppe trivial,  $\pi_1(X, x_0) = 1$ .

BEMERKUNGEN.

- Die Umkehrung gilt aber nicht: wir werden später sehen, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = 1$  gilt, aber  $\mathbb{S}^2$  ist nicht zusammenziehbar.
- Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig bezüglich  $x_0 \in X$ , d.h. für jeden Punkt  $p \in X$  ist die Verbindungsstrecke  $\overline{px_0} = \{(1-t)p + tx_0 \mid 0 \leq t \leq 1\}$  in  $X$  enthalten, so ist die Fundamentalgruppe trivial,  $\pi_1(X, x_0) = 1$ . Dazu sei die Homotopie

$$H(p, t) = (1-t)p + tx_0$$

von  $H_0 = \text{id}$  auf die konstante Abbildung, deren Bild in  $X$  liegt. Ein sternförmiger Raum ist also zusammenziehbar.

- Für einen Deformationsretrakt (vgl. Definition 1.6)  $\iota: A \rightarrow X$  induziert  $\iota$  für jeden Punkt  $x_0 \in A$  einen Isomorphismus  $\iota_*: \pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$ .

DEFINITION 2.5. Ein Raum heißt *einfach zusammenhängend*, falls er wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg nullhomotop ist.

Ein wegzusammenhängender Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Sternförmige Räume sind einfach zusammenhängend.

SATZ 2.6 (Fundamentalgruppe von Produkten). Es gilt

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

BEWEIS. Ein Weg  $w: [0, 1] \rightarrow X \times Y$  wird beschrieben durch  $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ . Nun ist  $w \simeq w'$  genau dann, wenn  $w'_1 \simeq w_1$  und  $w'_2 \simeq w_2$  gilt. Daher ist

$$\begin{aligned}\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto ([w_1], [w_2])\end{aligned}$$

eine Bijektion. Da die Projektionen  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  stetig sind, ist  $((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*)$  ein Gruppenhomomorphismus. □

BEISPIEL. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  gilt. Daher gilt für Tori

$$\pi_1(T^n, (1, \dots, 1)) \cong \pi_1(\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n, (1, \dots, 1)) \cong \mathbb{Z}^n.$$

BEMERKUNG. Wir diskutieren noch die Abhängigkeit der Fundamentalgruppe von der Wahl des Grundpunkts. Es sei  $X$  wegzusammenhängend,  $x_1, x_2 \in X$ . Wir wählen einen Weg  $\alpha$  von  $x_1$  nach  $x_2$  und setzen

$$\begin{aligned}\alpha^\# : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_2), \\ [w] &\mapsto [\bar{\alpha} * w * \alpha]\end{aligned}$$

- Sind zwei Wege  $\alpha_1, \alpha_2$  homotop relativ zu  $(x_1, x_2)$ , so induzieren sie die gleichen Abbildungen,  $\alpha_1^\# = \alpha_2^\#$ .
- Ist  $\alpha$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_2$  und  $\beta$  ein Weg von  $x_2$  nach  $x_3$ , so gilt

$$\beta^\# \circ \alpha^\# = (\alpha * \beta)^\#.$$

Insbesondere ist  $\alpha^\#$  ein Isomorphismus mit Inversem  $\bar{\alpha}^\#$ .

- Im Spezialfall  $x_1 = x_2$  ist  $\alpha$  ein geschlossener Weg, der aber nicht unbedingt nullhomotop ist. Dann folgt

$$\alpha^\#([w]) = [\alpha]^{-1} * [w] * [\alpha].$$

Die Konjugation mit der Klasse von  $\alpha$  ist ein innerer Automorphismus der Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$ .

### 3. Die Fundamentalgruppe der Kreislinie

Wir untersuchen die Fundamentalgruppe der Kreislinie  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  mit Hilfe der komplexen Exponentialabbildung:

$$\begin{aligned}E : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ x &\mapsto \exp(2\pi i x),\end{aligned}$$

wobei wir  $1 \in \mathbb{C}$  wieder als Grundpunkt für  $\mathbb{S}^1$  wählen.

- Auf den offenen Mengen

$$U^+ := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \quad \text{und} \quad U^- := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$$

gibt es lokale Inverse

$$h_n^+ : U^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h_n^- : U^- \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$E(h_n^\pm(z)) = z, \quad h_n^+(1) = n \quad \text{sowie} \quad h_n^-(-1) = n + \frac{1}{2}.$$

Der Bildbereich von  $h_n^+$  ist also das offene Intervall  $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ , der Bildbereich von  $h_n^-$  ist  $(n, n + 1)$ .

Wir setzen  $h_n^{\pm 1}(U^{\pm 1}) =: \tilde{U}_n^{\pm 1}$ .

- Unser Ziel ist es, zu einem gegebenem geschlossenen stetigen Weg

$$w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

mit  $w(0) = w(1) = 1$  eine stetige Hochhebung

$$\tilde{w} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

zu finden, d.h. eine stetige Funktion  $\tilde{w}$  mit

$$E \circ \tilde{w} = w \quad \text{und} \quad \tilde{w}(0) = 0.$$

Dann ist wegen  $E(\tilde{w}(1)) = w(1) = 1$  für jede Hochhebung  $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$  und wir erhalten eine Abbildung

$$d : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

- Wir erinnern uns an das Lebesgue-Lemma: Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $(U_j)_{j \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , die Lebesgue-Zahl der Überdeckung, so dass jede Teilmenge  $A \subset K$ , die einen Durchmesser  $\leq \lambda$  hat, ganz in *einer* der offenen Teilmengen  $U_j$  enthalten ist.

- Es sei  $w$  ein geschlossener Weg. Dann ist  $w^{-1}(U^\pm) =: V^\pm$  eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[0, 1]$ , wobei die Mengen  $V^\pm$  im Allgemeinen nicht zusammenhängend sind. Man kann eine Lebesgue-Zahl  $\frac{1}{N}$  wählen, so dass jedes der Intervalle  $T_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$  entweder ganz in  $V^+$  oder in  $V^-$  enthalten ist und  $w_k := w|_{T_k}$  ein Weg in  $U^+$  oder  $U^-$  ist.

Wir heben nun  $w$  induktiv hoch: Da  $w(0) = 1$  gilt, ist  $w(T_1) \subset U^+$ . Wir setzen  $\tilde{w}(s) = h_0^+(w(s))$  für alle  $s \in T_1$ . Angenommen, wir haben eine Hochhebung  $\tilde{w}: [0, \frac{k}{N}] \rightarrow \mathbb{R}$  gefunden. Es liege  $w(T_{k+1}) \subset U^\varepsilon$ . Dann liegt der Punkt  $\tilde{w}(\frac{k}{N})$  im Bildbereich genau einer Funktion  $h_n^\varepsilon$  und wir benutzen dieses  $h_n^\varepsilon$  zur Hochhebung.

- Die so konstruierte Hochhebung ist eindeutig mit  $\tilde{w}(0) = 0$ : Die Differenz  $\tilde{w} - \tilde{w}'$  zweier Hochhebungen ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an, muss also konstant sein. Aus der Anfangsbedingung  $\tilde{w}(0) = 1 = \tilde{w}'(0)$  folgt die Gleichheit  $\tilde{w} = \tilde{w}'$ .

DEFINITION 3.1. Für einen geschlossenen Weg  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  heißt die ganze Zahl  $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$  der *Grad* von  $w$ .

SATZ 3.2. Der Grad eines geschlossenen Wegs hängt nur von seiner Homotopieklasse ab und er induziert einen Isomorphismus

$$\text{grad}: \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

BEWEIS.

- Der Grad ist ein Homomorphismus: Sind  $w', w'': [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  geschlossene Wege mit Hochhebungen  $\tilde{w}', \tilde{w}'': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\tilde{w}' * (\tilde{w}'' + \tilde{w}'(1))$$

eine Hochhebung des Weges  $w' * w''$ . Somit ist  $\text{grad}(w' * w'') = \text{grad}(w') + \text{grad}(w'')$ .

- Die Gradabbildung ist surjektiv: Der Weg  $w_n(s) = \exp(2\pi i ns)$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  hat die Hochhebung  $\tilde{w}_n(s) = ns$  und daher  $\text{grad}(w_n) = \tilde{w}_n(1) = n$ .
- Die Abbildung  $\text{grad}$  ist wohldefiniert auf Homotopieklassen, d.h. homotope Wege  $w_0, w_1$  haben den gleichen Grad.

Es sei dazu  $w: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine Homotopie von  $w_0$  nach  $w_1$ . Wieder wählen wir eine Lebesgue-Zahl  $\frac{1}{N}$  für die Überdeckung  $w^{-1}(U^\pm) = W^\pm \subset [0, 1]^2$  und zerlegen  $[0, 1]^2$  in Quadrate  $T_{p,q} := [\frac{p-1}{N}, \frac{p}{N}] \times [\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}]$ .

Auf  $T_{1,1}$  setzen wir wegen  $w(0, 0) = 1$

$$\tilde{w}|_{T_{1,1}} := h_0^+ \circ w|_{T_{1,1}}.$$

Auf  $T_{2,1} = [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}] \times [0, \frac{1}{N}]$  setzen wir die Hochhebung fort mit  $\tilde{w}|_{T_{2,1}} = h_n^\varepsilon \circ w|_{T_{2,1}}$ , wobei  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  ist, wenn  $\{\frac{1}{N}\} \times [0, \frac{1}{N}]$  nach  $U^\varepsilon$  abgebildet wird. Auf  $T_{1,2} = [0, \frac{1}{N}] \times [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$  konstruieren wir die Hochhebung analog.

Wir können nun auf  $T_{2,2}$  entweder vom Quadrat  $T_{1,2}$  oder von  $T_{2,1}$  aus fortsetzen und erhalten zwei Hochhebungen. Diese stimmen aber im Eckpunkt  $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$  überein und müssen daher kohärent sein. Diese Prozedur setzt man nun iterativ fort und erhält  $\tilde{w}$  mit  $w(0, 0) = 0$ .

Diese Hochhebung ist wiederum eindeutig. Da  $\tilde{w}(0, t)$  stetig ist und weil  $1 = w(0, t) = E(\tilde{w}(0, t))$  gilt, muss  $\tilde{w}(0, t)$  Werte in  $\mathbb{Z}$  annehmen. Da es stetig ist, gilt daher  $\tilde{w}(0, t) = 0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Ebenso ist die Funktion  $\tilde{w}(1, t)$  stetig und muss Werte in  $\mathbb{Z}$  annehmen. Beide Funktionen sind also konstant und somit ist

$$\text{grad}(w_0) = \tilde{w}_0(1) = \tilde{w}(1, 0) = \tilde{w}(1, 1) = \tilde{w}_1(1) = \text{grad}(w_1).$$

- Die Gradabbildung ist injektiv: Ist  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  ein Weg mit  $\text{grad}(w) = 0$ , so hat  $w$  also eine Hochhebung  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{w}(1) = 0$ . Dann ist

$$H(s, t) := (1 - t)\tilde{w}(s) + t\tilde{w}(1)$$

eine Homotopie von  $\tilde{w}$  zum konstanten Weg  $c_{\tilde{w}(1)} = c_0$  und  $H(0, t) = 0 = H(1, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann ist aber  $E \circ H$  eine Homotopie von  $w$  zum konstanten Weg  $c_1$ .

□

Wir betrachten nun Anwendungen der Isomorphie  $\text{grad}: \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

Wir erhalten sofort, dass  $\mathbb{S}^1$  nicht zusammenziehbar ist, weil für einen zusammenziehbaren Raum  $\pi_1(X, x) \cong 1$  gilt.

**SATZ 3.3** (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  hat mindestens einen Fixpunkt.*

**BEWEIS.** Angenommen, es gilt  $f(z) \neq z$  für alle  $z \in \mathbb{D}^2$ . Dann definieren wir eine Abbildung

$$r: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

indem  $r(z)$  der Schnittpunkt der Halbgeraden von  $f(z)$  nach  $z$  mit  $\mathbb{S}^1$  zugeordnet wird. Die Abbildung ist stetig und es gilt  $r(z) = z$  für  $z \in \mathbb{S}^1$ ; insbesondere  $r(1) = 1$ .

Damit wäre die Verkettung  $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{i} \mathbb{D}^2 \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1$  die Identität und auch  $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)}$ . Aber diese Abbildung faktorisiert über  $\pi_1(\mathbb{D}^2, 1) = 1$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)} & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z} \\ & \searrow i_* & \nearrow r_* \\ & \pi_1(\mathbb{D}^2, 1) = 1 & \end{array}$$

und dies gibt einen Widerspruch. □

Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt übrigens für Kreisscheiben  $\mathbb{D}^n$  beliebiger Dimension  $n$ .

Wir erweitern den Gradbegriff auf Abbildungen  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , die nicht unbedingt  $f(1) = 1$  erfüllen:

**DEFINITION 3.4.** Es sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine beliebige stetige Abbildung. Wir betrachten

$$\begin{aligned} w: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ t &\mapsto f(\exp(2\pi it)). \end{aligned}$$

Es sei  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $w$ , d.h.  $E \circ \tilde{w} = w$ :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{w} & \downarrow E \\ [0, 1] & \xrightarrow{w} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Dann ist der Grad von  $f$  definiert als

$$\text{grad}(f) := \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0).$$

**BEMERKUNGEN.**

- (a) Der Grad ist wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der Wahl der Hochhebung  $\tilde{w}$  ab, denn wie im Beweis von Satz 3.1 legt die Wahl des Anfangspunkts  $\tilde{w}(0)$  die Hochhebung eindeutig fest.
- (b) Es ist  $w(0) = f(1)$  und  $w(1) = f(e^{2\pi i}) = f(1)$ . Daher ist  $\text{grad}(f) \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Homotope Abbildungen  $f, g$  haben den gleichen Grad.

Eine Abbildung  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  heißt antipodisch, wenn  $f(-z) = -f(z)$  gilt.

**SATZ 3.5.** *Eine antipodische Abbildung hat ungeraden Grad.*

**BEWEIS.** Es sei  $w(t) := f(\exp(2\pi it))$  und  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Hochhebung von  $w$ . Dann gilt für  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E \circ \tilde{w}\left(t + \frac{1}{2}\right) &= w\left(t + \frac{1}{2}\right) = f(\exp(2\pi i(t + \frac{1}{2}))) = f(-\exp(2\pi it)) \\ &= -f(\exp(2\pi it)) = -E \circ \tilde{w}(t) \end{aligned}$$

und damit ist

$$N(t) := \tilde{w}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \tilde{w}(t) - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Diese Funktion ist stetig, also konstant,  $N(t) = N$  für alle  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Damit folgt

$$\text{grad}(f) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{w}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{w}(0) = \frac{1}{2} + N + \frac{1}{2} + N = 2N + 1.$$

□

Wir machen eine Bemerkung zum Zusammenhang zwischen Homotopiemengen und Fundamentalgruppen. Wir erinnern daran, dass die Elemente von  $\pi_1(X, x_0)$  Klassen von Wegen mit Grundpunkt  $x_0$  sind, modulo Homotopien, die den Grundpunkt festlassen,  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ . In der Homotopiemenge  $[\mathbb{S}^1, X]$  dagegen wird kein Grundpunkt festgelegt. Es werden beliebige geschlossene Wege betrachtet, und die Homotopien müssen die Endpunkte nicht festlassen. Gerade hatten wir den Fall  $X = \mathbb{S}^1$  behandelt.

SATZ 3.6. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0 \in X$  und*

$$V: \pi_1(X, x_0) \rightarrow [\mathbb{S}^1, X]$$

*sei die Abbildung, die den Grundpunkt vergisst. Dann gilt:*

- (a) *Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $V$  surjektiv.*
- (b) *Es gilt  $V[f] = V[g]$  genau dann, wenn  $[f]$  und  $[g]$  konjugiert in  $\pi_1(X, x_0)$  sind, es also ein  $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$  gibt mit  $\gamma[g]\gamma^{-1} = [f]$ .*

KOROLLAR 3.7.

- (a) *Ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  abelsch und  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $V$  ein Isomorphismus.*
- (b) *Es ist  $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ .  
Denn für  $X = \mathbb{S}^1$  ist nach Satz 3.2 die Fundamentalgruppe abelsch, also  $V$  nach der ersten Aussage ein Isomorphismus.*
- (c) *Für  $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  gilt  $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$  genau dann, wenn  $[f] = [g]$  gilt.  
Nach Satz 3.2 haben wir die Isomorphismen  $\text{grad}: \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  und nach (b) den Isomorphismus  $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ .*

BEWEIS DES SATZES.

- Zur Surjektivität: Es sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  gegeben. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, können wir einen Weg  $w$  in  $X$  mit  $w(0) = f(1)$  und  $w(1) = x_0$  finden. Auf dem Bouquet

$$\mathbb{S}^1 \vee [0, 1] = (\mathbb{S}^1 \sqcup [0, 1]) / 1 \sim 0$$

erhalten wir damit eine Abbildung

$$\bar{H}: \mathbb{S}^1 \vee [0, 1] \rightarrow X$$

mit

$$\bar{H}(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{S}^1 \quad \text{und} \quad \bar{H}(t) = w(t) \text{ für } t \in [0, 1],$$

die wegen  $f(1) = w(0)$  wohldefiniert ist. Man kann sie zu einer Abbildung auf dem Zylinder

$$\tilde{H}: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$$

fortsetzen, wobei  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  und  $[0, 1] \cong \{1\} \times [0, 1] \subset \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . Damit ist  $f = \tilde{H}_0$  homotop zu  $\tilde{H}_1$ . Da  $\tilde{H}(1, 1) = x_0$  gilt, definiert  $\tilde{H}_1$  ein Element in  $\pi_1(X, x_0)$  mit  $V(\tilde{H}_1) = [f]$ .

- Es seien  $[f], [g]$  konjugiert in  $\pi_1(X, x_0)$ , d.h.  $\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  sei ein geschlossener Weg mit Grundpunkt  $x_0$ , so dass  $\alpha * g * \bar{\alpha}$  homotop zu  $f$  ist. Wir betrachten nun für  $s \in [0, 1]$  den Weg

$$\alpha_s(t) := \alpha((1-s)t + s).$$

Es ist  $\alpha_0 = \alpha$  und  $\alpha_1 = c_{x_0}$  konstant. Wir betrachten

$$H_s := \alpha_s * g * \bar{\alpha}_s.$$

Dann ist  $H$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Also gilt  $V[f] = V[g]$ .

- Es seien umgekehrt geschlossene Wege  $f, g: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $V[f] = V[g]$  gegeben. Es gibt dann eine Homotopie

$$H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$ , die aber nicht punktiert ist. Wir setzen  $\alpha(t) := H(1, t)$ ; dies ist wegen  $H(1, 1) = g(1) = x_0$  und  $H(1, 0) = f(1) = x_0$  ein geschlossener Weg in  $X$  und definiert somit eine Klasse  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ . Dann ist  $g$  homotop zu  $\bar{\alpha} * f * \alpha$  und somit sind  $f$  und  $g$  in  $\pi_1(X, x_0)$  zueinander konjugiert. □

Wir diskutieren nun weitere Anwendungen des Abbildungsgrades:

SATZ 3.8 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom*

$$f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$$

mit Grad  $n > 0$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

BEWEIS. Wir setzen

$$s := |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + 1 \geq 1.$$

Wir schätzen für  $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  ab:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &= |a_0 + a_1sz + \dots + a_{n-1}s^{n-1}z^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1|s + \dots + |a_{n-1}|s^{n-1} \quad \text{Dreiecksungleichung} \\ &\leq s^{n-1}(|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|) \quad (\text{weil } |s| \geq 1) \\ &< s^n = |s^n z^n|, \end{aligned}$$

weil der Ausdruck in der letzten Klammer gleich  $s - 1$  ist. Damit liegt  $f(sz)$  im Innern eines Kreises vom Radius  $|s^n z^n|$  um  $s^n z^n$ .

Die Strecke von  $f(sz)$  nach  $s^n z^n$  trifft daher den Nullpunkt nicht. Damit ist

$$\begin{aligned} H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (z, t) &\mapsto (1-t)f(sz) + t(s^n z^n) \end{aligned}$$

eine Homotopie von  $z \mapsto f(sz)$  nach  $z \mapsto s^n z^n$ .

Wir nehmen nun an, dass  $f$  keine Nullstellen hat. Dann ist  $z \mapsto f(sz)$  innerhalb von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mittels

$$H'(z, t) = f((1-t)sz)$$

nullhomotop und daher muss  $z \mapsto s^n z^n$  ebenfalls nullhomotop sein. Da  $s^n z^n \neq 0$  auf  $\mathbb{S}^1$ , ist auch

$$\begin{aligned} g: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \frac{s^n z^n}{|s^n z^n|} \end{aligned}$$

nullhomotop, aber  $\text{grad}(g) = n \geq 1$ , so dass wir einen Widerspruch erhalten. □

SATZ 3.9 (Satz von Borsuk-Ulam oder Satz vom Wetter). *Es sei  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Abbildung. Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ .*

Insbesondere kann man  $\mathbb{S}^2$  nicht stetig in den  $\mathbb{R}^2$  einbetten. Nimmt man an, dass Luftdruck und Temperatur stetige Funktionen auf der Erdoberfläche sind, so gibt es also zwei antipodale Punkte auf der Erde, die gleichen Luftdruck und gleiche Temperatur haben.

BEWEIS. Angenommen,  $f(x) \neq f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^2$ . Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

wohldefiniert. Ihre Einschränkung auf  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$  ist antipodisch und hat nach Satz 3.5 ungeraden Grad.

Andererseits sei  $\tilde{g}$  auf  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{S}^2$  definiert als

$$\begin{aligned} \tilde{g}: \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \tilde{f}(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}). \end{aligned}$$

Die Funktion stimmt auf dem Rand von  $\mathbb{D}^2$  mit der Einschränkung von  $\tilde{f}$  überein. Aber diese Funktion ist nullhomotop, wie die Homotopie

$$\begin{aligned} H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) &\mapsto \tilde{g}(tz) \end{aligned}$$

zeigt, für die  $H_0$  konstant ist und  $H_1 = \tilde{g}|_{\mathbb{S}^1}$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Für  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  und  $d \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Ebene und die beiden Halbräume:

$$\begin{aligned} E(a, d) &:= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, y \rangle = d\} \\ E^+(a, d) &:= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, y \rangle \geq d\} \\ E^-(a, d) &:= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, y \rangle \leq d\}. \end{aligned}$$

Es seien nun drei Teilmengen  $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^3$  gewählt, so dass gilt:

- Für  $j = 1, 2, 3$  sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f_j^\pm: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, d) &\mapsto \text{vol}(A_j \cap E^\pm(x, d)), \end{aligned}$$

stetig, wobei  $\text{vol}$  das orientierte Volumen bezeichnet.

- Für  $j = 1$  gilt: Für jedes  $x \in \mathbb{S}^2$  gibt es genau ein  $d = d(x) \in \mathbb{R}$  mit  $f_1^+(x, d(x)) = f_1^-(x, d(x))$  und die Funktion  $x \mapsto d(x)$  ist stetig. D.h. in jeder Schar paralleler Ebenen gibt es genau eine, die  $A_1$  in gleiche Teile teilt.

Man beachte, dass stets gilt

$$(3.1) \quad d(-x) = -d(x),$$

weil für die Ebenen  $E(x, d) = E(-x, -d)$  ist.

**SATZ 3.10 (Satz vom Schinkenbrötchen).** *Unter den obigen Voraussetzungen gibt es eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , die jede der drei Mengen  $A_1, A_2$  und  $A_3$  gleichzeitig in je zwei Teilmengen gleichen Volumens zerlegt.*

Ist  $A_1$  das Volumen eines Brötchens,  $A_2$  das Volumen der Butter auf dem Brötchen und  $A_3$  das Volumen des Schinkens, so kann man mit einem geraden Messerschnitt Brötchen, Butter und Schinken in je zwei gleiche Teile zerschneiden.

**BEWEIS.** Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (f_2^+(x, d(x)), f_3^+(x, d(x))) \end{aligned}$$

ist stetig. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam 3.9 gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^2$  mit  $f(-x) = f(x)$ . Für dieses  $x$  und  $d = d(x)$  ist

$$\begin{aligned} f_2^+(x, d(x)) &= f_2^+(-x, d(-x)) \stackrel{(3.1)}{=} f_2^+(-x, -d(x)) = f_2^-(x, d(x)) \\ f_3^+(x, d(x)) &= f_3^+(-x, d(-x)) \stackrel{(3.1)}{=} f_3^+(-x, -d(x)) = f_3^-(x, d(x)), \end{aligned}$$

Da nach Definition der Funktion  $d(x)$  die Gleichung  $f_1^+(x, d(x)) = f_1^-(x, d(x))$  gilt, haben wir alles gezeigt.  $\square$

DEFINITION 3.11. Es sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ . Der Grad der Abbildung

$$f_z: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}$$

heißt die *Umlaufzahl* des geschlossenen Wegs  $f$  bezüglich des Punktes  $z$  und wird mit  $U(f, z) \in \mathbb{Z}$  bezeichnet.

SATZ 3.12. *Liegen  $z'$  und  $z''$  in der gleichen Wegekomponeute von  $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ , so gilt  $U(f, z) = U(f, z')$ .*

BEWEIS. Ist  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Weg von  $z'$  nach  $z''$ , der das Bild  $f(\mathbb{S}^1)$  nicht trifft. Dann ist

$$H(x, t) = \frac{f(x) - w(t)}{\|f(x) - w(t)\|}$$

eine Homotopie von  $f_{z'}$  nach  $f_{z''}$ . Die Aussage folgt nun, weil homotope Abbildungen  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  den gleichen Grad haben.  $\square$

SATZ 3.13. *Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  enthält das Komplement  $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$  genau eine unbeschränkte Komponente  $W$ . Ist  $z \in W$ , so ist die Umlaufzahl  $U(f, z)$  trivial.*

BEWEIS. Da die Teilmenge  $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}^2$  kompakt ist, ist sie abgeschlossen und beschränkt. Es gibt also eine abgeschlossene Scheibe, in der sie enthalten ist, und somit gibt es in  $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$  mindestens eine unbeschränkte Wegekomponeute  $W$ . Es sei also  $D > 0$  so gewählt, dass  $f(\mathbb{S}^1) \subset \overline{B_D(0)}$ . Dann trifft  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$  die Wegekomponeute  $W$ . Da  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$  wegzusammenhängend ist, gilt  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)} \subset W$ . Jede andere unbeschränkte Wegekomponeute enthält auch  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$ , muss daher gleich  $W$  sein. Für  $z' \in W$  und  $z'' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_D(0)}$  sind nach Satz 3.12 die Umlaufzahlen gleich,  $U(f, z') = U(f, z'')$ . Nun ist

$$(x, t) \mapsto \frac{tf(x) - z''}{\|tf(x) - z''\|}$$

eine Homotopie zwischen einer konstanten Abbildung und  $f_{z''}$ , also folgt die Behauptung.  $\square$

Die nächste Anwendung kommt aus dem Gebiet der Differentialtopologie. Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit, so ist das Tangentialbündel von  $M$

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Konkret ist für  $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  und  $x \in \mathbb{S}^2$

$$T_x \mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Das Tangentialbündel kommt mit einer natürlichen Projektion  $\pi: TM \rightarrow M$  mit  $\pi(x, v) = x$ .

DEFINITION 3.14. Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist ein *tangentiales Vektorfeld* auf  $M$  eine Abbildung  $V: M \rightarrow TM$ , so dass  $\pi \circ V = \text{id}_M$  gilt.

SATZ 3.15 (Der Satz vom Igel). *Jedes tangentiale Vektorfeld auf  $\mathbb{S}^2$  hat mindestens eine Nullstelle.*

BEMERKUNGEN.

- (a) Der Satz wird oft in der Aussage zusammengefasst, dass man einen Igel nicht glatt kämmen kann.
- (b) Der Satz gilt für alle Sphären  $\mathbb{S}^{2n}$  gerader Dimension mit  $n > 0$ .
- (c) Der Satz ist falsch für Sphären ungerader Dimension. Für  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$  mit  $n \geq 0$  ist zum Beispiel das Vektorfeld

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1}),$$

tangential und verschwindet nirgends. Schreiben Sie die Vektoren im Tangentialraum als komplexe Vektoren, so entsteht das Vektorfeld durch die Multiplikation mit  $i$ .

BEWEIS.

- Wir parametrisieren die obere Hemisphäre  $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{S}^2$  durch eine Kreisscheibe

$$q^+ : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$z := (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) =: y$$

Es sei  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  und  $y := q^+(z) \in \mathbb{S}_+^2$ . Wir bezeichnen mit  $R_y^+$  die Rotation um die Achse  $iz$ , die  $y = q^+(z)$  in den Nordpol  $N = (0, 0, 1)$  dreht. Ist  $z = 0$ , so ist  $y = q^+(0) = N$ , und wir setzen  $R_y = \text{id}$ . Um das Tangentialbündel auf der oberen Hemisphäre zu beschreiben, betrachten wir für  $y \in \mathbb{S}_+^2$  die Abbildung

$$\varphi_y^+ : T_y \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{R_y^+} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2$$

mit  $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  und setzen für ein Vektorfeld  $V$  auf  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$W^+ : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \mapsto \varphi_y^+(V(q^+(z))).$$

Ist  $V$  ein tangentiales Vektorfeld auf  $\mathbb{S}_+^2$ , das nirgends verschwindet, so ist  $W^+(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{D}^2$ .

- Analog definieren wir  $q^-, \varphi^-$  und  $W^-$  für ein Vektorfeld auf der unteren Halbebene. Für  $z \in \mathbb{S}^1$  ist  $q^+(z) = q^-(z) = (z, 0) =: y$ , und  $R_y^-$  dreht um die gleiche Achse wie  $R_y^+$ , aber dreht den Äquatorpunkt  $y$  in den Südpol  $(0, 0, 1)$ .
- Wir wählen nun für den Tangentialraum  $T_z \subset \mathbb{R}^3$  mit  $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$  im Äquator die Basis  $(b_1 = e_3, b_2 = iz)$  und berechnen

$$\varphi_{q^+(z)}^+(b_1) = -z \text{ und } \varphi_{q^+(z)}^+(b_2) = iz$$

und analog

$$\varphi_{q^-(z)}^-(b_1) = z \text{ und } \varphi_{q^-(z)}^-(b_2) = iz.$$

- Wir definieren die beiden Funktionen

$$\tilde{W}^\pm : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$z \mapsto \frac{W^\pm(z)}{\|W^\pm(z)\|}$$

Wir haben schon im Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam 3.9 gesehen, dass Abbildungen von  $\mathbb{S}^1$ , die auf die gesamte Kreisscheibe  $\mathbb{D}^2$  fortsetzbar sind, nullhomotop sind. Daher sind beide Abbildungen  $\tilde{W}^\pm|_{\mathbb{S}^1}$  nullhomotop.

- Andererseits bekommen wir für  $z \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_+^2 \cap \mathbb{S}_-^2$  die Abbildung:

$$A_z := \varphi_{q^-(z)}^- \circ \left( \varphi_{q^+(z)}^+ \right)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Wir bestimmen diese lineare Abbildung durch ihre Werte auf der Basis  $(z, iz)$ :

$$z \mapsto -z = -z^2(\bar{z})$$

$$iz \mapsto iz = -z^2(\bar{iz}).$$

Daher ist  $A_z(\xi) = -z^2\bar{\xi}$  und

$$W^-(z) = -z^2\overline{W^+(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}^1.$$

Mit Hilfe des Produkts in  $\mathbb{S}^1$  finden wir

$$\text{grad} \left( \tilde{W}^+|_{\mathbb{S}^1} \cdot \tilde{W}^-|_{\mathbb{S}^1} \right) = \text{grad}(-z^2) = 2.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage im vorangehenden Punkt, dass  $\tilde{W}^\pm$  beide trivialen Grad haben. □

#### 4. Satz von Seifert-van Kampen

Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $X = X_1 \cup X_2$  mit  $X_1$  und  $X_2$  offen in  $X$ , wobei  $X_1, X_2$  und  $X_0 := X_1 \cap X_2$  wegzusammenhängend sind. Wir wählen einen Grundpunkt  $x_0 \in X_0$ . Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  mit Hilfe der Fundamentalgruppen  $\pi_1(X_1, x_0)$ ,  $\pi_1(X_2, x_0)$  und  $\pi_1(X_0, x_0)$  zu beschreiben. Nach Satz 2.3 bekommen wir aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{u_1} & X_1 \\ u_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X_1 \cup X_2 = X \end{array}$$

topologischer Räume ein Diagramm von Fundamentalgruppen

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, x_0) & \xrightarrow{(u_1)_*} & \pi_1(X_1, x_0) \\ (u_2)_* \downarrow & & \downarrow (j_1)_* \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{(j_2)_*} & \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) = \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Um dieses Diagramm weiter zu verstehen, brauchen wir etwas Gruppentheorie.

DEFINITION 4.1. Es seien  $G, G_0, G_1$  und  $G_2$  Gruppen. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array}$$

mit Gruppenhomomorphismen  $i_1, i_2, j_1, j_2$  heißt *Pushout-Diagramm*, wenn es die folgende universelle Eigenschaft hat: Zu jedem Paar von Homomorphismen

$$h_1: G_1 \rightarrow H \quad \text{und} \quad h_2: G_2 \rightarrow H$$

mit  $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$  gibt es genau einen Homomorphismus  $h: G \rightarrow H$  mit  $h \circ j_1 = h_1$  und  $h \circ j_2 = h_2$ :

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright h_1 \\ \exists! h \\ \curvearrowleft h_2 \end{array}$$

Die Gruppe  $G$  mit den Morphismen  $j_1, j_2$  heißt auch der Pushout des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \\ & & G_2 \end{array}$$

Sie wird mit  $G_1 *_G G_2$  bezeichnet, wobei wir die Morphismen  $i_1$  und  $i_2$  in der Notation unterdrücken.

BEMERKUNGEN.

- (a) Der Pushout ist also der direkte Limes im Sinne von Satz 14.4, also in kategorieller Sprache ein Kolimes des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \\ & & G_2 \end{array}$$

in der Kategorie der Gruppen.

- (b) Der Pushout ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.  
(c) Ist  $G_0 = \{1\}$  die triviale Gruppe mit  $i_1(1) = 1_{G_1}$  und  $i_2(1) = 1_{G_2}$ , so heißt  $G$  das *freie Produkt* von  $G_1$  und  $G_2$ . Wir schreiben  $G = G_1 * G_2$ .

Um die Existenz von Pushouts von Gruppen zu zeigen, brauchen wir zunächst das freie Produkt von Gruppen.

Es seien  $G_1, G_2$  Gruppen. Dann hat das *freie Produkt*  $G_1 * G_2$  als Elemente endliche Wörter in Elementen aus  $G_1 \sqcup G_2$ ; die einzigen Relationen sind gegeben durch Relationen in  $G_1$ , angewandt auf Elemente in  $G_1$  und Relationen in  $G_2$ , angewandt auf Elemente in  $G_2$ . Zwischen  $G_1$  und  $G_2$  gilt nur die Relation  $1_{G_1} = 1_{G_2}$ . Die Gruppenverknüpfung ist das Hintereinanderschalten von Wörtern. Das neutrale Element  $1_{G_1 * G_2}$  kann mit dem leeren Wort identifiziert werden. Jedes Element von  $G_1 * G_2$  hat also eine reduzierte Darstellung der Form  $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$ , wobei die Gruppenelemente abwechselnd in  $G_1 \setminus \{1_{G_1}\}$  und  $G_2 \setminus \{1_{G_2}\}$  liegen.

Zum Beispiel ist  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  nicht abelsch: Ist  $\mathbb{Z}$  erzeugt von  $a$ , also  $\mathbb{Z} = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$  und die zweite Kopie von  $\mathbb{Z}$  ist  $\{b^n, n \in \mathbb{Z}\}$ , dann ist in  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  das Wort  $ab$  nicht identisch mit dem Wort  $ba$ .

Es gilt  $G * \{1\} \cong G \cong \{1\} * G$ . Zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  sind jeweils in  $G_1 * G_2$  eingebettet, indem wir ein  $g_1 \in G_1$  schicken auf  $j_1(g_1) = g_1$ , wobei dies das Wort ist, welches nur aus  $g_1$  besteht. Ebenso gibt es die Einbettung  $j_2: G_2 \rightarrow G_1 * G_2$ .

SATZ 4.2. Das freie Produkt  $G_1 * G_2$  ist der Pushout des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & G_1 \\ \downarrow & & \\ & & G_2 \end{array}$$

BEWEIS. Für Homomorphismen  $h_1: G_1 \rightarrow H$  und  $h_2: G_2 \rightarrow H$  müssen wir einen eindeutigen Homomorphismus  $h: G_1 * G_2 \rightarrow H$  angeben mit  $h \circ j_1 = h_1$  und  $h \circ j_2 = h_2$ :

$$\begin{array}{ccccc} \{1\} & \longrightarrow & G_1 & & \\ \downarrow & & \downarrow j_1 & \searrow h_1 & \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G_1 * G_2 & \xrightarrow{h} & H \\ & \searrow h_2 & & \nearrow & \end{array}$$

Wir haben keine Wahl und müssen  $h$  auf einem Wort  $(g_{k_1}, \dots, g_{k_n})$  definieren als

$$h(g_{k_1}, \dots, g_{k_n}) := h_{\varepsilon_1}(g_{k_1}) \cdot \dots \cdot h_{\varepsilon_n}(g_{k_n}),$$

wobei gilt

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } g_{k_j} \in G_1, \\ 2, & \text{falls } g_{k_j} \in G_2. \end{cases}$$

□

SATZ 4.3. *Es sei  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $X_1, X_2$  offen in  $X$  und wegzusammenhängend. Weiterhin sei  $X_1 \cap X_2 =: X_0$  ebenfalls wegzusammenhängend und  $x_0 \in X_0$ . Dann induzieren die Inklusionen  $u_1: X_1 \rightarrow X$  und  $u_2: X_2 \rightarrow X$  einen Epimorphismus*

$$\Phi: \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

BEWEIS. Es sei  $w: [0, 1] \rightarrow X$  ein geschlossener Weg in  $X$  mit  $w(0) = w(1) = x_0$ . Zur offenen Überdeckung  $\{X_1, X_2\}$  von  $X$  sei  $1/N$  eine Lebesgue-Zahl, so dass das Bild von  $w_k := w|_{[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]}$  in  $X_1$  oder  $X_2$  liegt. Wegen des Wegzusammenhangs können wir Wege  $\alpha_k$  von  $x_0$  zu  $w(\frac{k}{N})$  wählen, so dass  $\alpha_k$  in  $X_0$  liegt, falls  $w(\frac{k}{N}) \in X_0$ ; ansonsten wählen wir  $\alpha_k$  in  $X_i$ , für  $w(\frac{k}{N}) \in X_i$  für  $i = 1, 2$ . Ist  $w(\frac{k}{N}) = x_0$ , so setzen wir  $\alpha_k = c_{x_0}$ . Dann gilt

$$w \simeq \alpha_0 * w_1 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_1 * \dots * \alpha_{N-1} * w_N * \alpha_N$$

und die Wege  $\alpha_{k-1} * w_k * \bar{\alpha}_k$  sind jeweils geschlossen und liegen in einem der  $X_i$ . Somit ist

$$\Phi([\alpha_0 * w_1 \bar{\alpha}_1] * \dots * [\alpha_{N-1} * w_N * \alpha_N]) = [w].$$

□

Damit erhalten wir sofort die Fundamentalgruppen der höherdimensionalen Sphären:

SATZ 4.4. *Für alle  $n \geq 2$  gilt:*

$$\pi_1(\mathbb{S}^n, 1) \cong 1.$$

BEWEIS. Wir schreiben  $\mathbb{S}^n$  als die Zusammenklebung der oberen und unteren Hemisphäre  $H_1, H_2$  entlang des Äquators. Die Hemisphären lassen wir mit einem  $\varepsilon$ -Kragen etwas überlappen, damit wir offene Teilmengen  $H_1^\varepsilon, H_2^\varepsilon$  in  $\mathbb{S}^n$  erhalten. Der Schnitt ist homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Mit Satz 4.3 erhalten wir, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^n, 1)$  epimorphes Bild von  $\pi_1(H_1^\varepsilon, 1) * \pi_1(H_2^\varepsilon)$  ist. Die Hemisphären sind aber jeweils zusammenziehbar. □

Der obige Beweis ist in einer leicht allgemeineren Situation anwendbar:

SATZ 4.5. *Ist  $X = X_1 \cup X_2$  und  $X_0 = X_1 \cap X_2$ , so dass alle  $X_i$  offen und wegzusammenhängend sind. Sind dann  $X_1, X_2$  einfach zusammenhängend, so ist  $\pi_1(X, x_0) = 1$  für alle  $x_0 \in X_0$ .*

Wir konstruieren nun den Pushout eines allgemeinen Diagramms von Gruppen

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \\ & & G_2 \end{array}$$

Wir brauchen dazu die folgende Konstruktion aus der Gruppentheorie: Es sei  $G$  eine Gruppe und  $S \subset G$  eine Teilmenge. Der Durchschnitt aller Normalteiler von  $G$ , welche die Teilmenge  $S$  enthalten, heißt der von  $S$  erzeugte Normalteiler  $\mathcal{N}(S)$ .

Im obigen Diagramm betrachten wir die Menge

$$S := \{(i_1(g_0), i_2(g_0)^{-1}) \mid g_0 \in G_0\} \subset G_1 * G_2.$$

SATZ 4.6. *Die Gruppe  $(G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S)$  zusammen mit den Abbildungen  $j_k: G_k \hookrightarrow (G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S)$  für  $k = 1, 2$  ist der Pushout des Diagramms (4.2)*

BEWEIS. In einem Diagramm von Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & (G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow h_1 \\ \downarrow \\ \searrow h_2 \\ H \end{array}$$

mit  $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$  müssen wir einen eindeutigen Homomorphismus  $h: (G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S) \rightarrow H$  angeben mit  $h \circ j_1 = h_1$  und  $h \circ j_2 = h_2$ .

Auf der Äquivalenzklasse  $[(g_{k_1}, \dots, g_{k_n})]$  eines Wortes  $(g_{k_1}, \dots, g_{k_n})$  in  $(G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S)$  setzen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 4.2

$$h[(g_{k_1}, \dots, g_{k_n})] := h_{\varepsilon_1}(g_{k_1}) \cdot \dots \cdot h_{\varepsilon_n}(g_{k_n}),$$

wobei gilt

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } g_{k_j} \in G_1, \\ 2, & \text{falls } g_{k_j} \in G_2. \end{cases}$$

Eine andere Wahl haben wir nicht, wenn wir wollen, dass (4.2) kommutiert und somit ist  $h$  eindeutig. Außerdem ist  $h$  wohldefiniert:

Ist  $g_0 \in G_0$ , so ist

$$h(i_1(g_0)) = h_1(i_1(g_0)) = h_2(i_2(g_0)) = h(i_2(g_0))$$

und somit ist  $h$  auf Äquivalenzklassen konstant. □

Damit ist die Notation  $G_1 *_{G_0} G_2 = (G_1 * G_2)/\mathcal{N}(S)$  gerechtfertigt.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts:

**THEOREM 4.7** (Satz von Seifert-van Kampen). *Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $X = X_1 \cup X_2$  mit  $X_1$  und  $X_2$  offen in  $X$  und  $x_0 \in X_0 := X_1 \cap X_2$ , wobei  $X_1, X_2$  und  $X_0$  wegzusammenhängend sind. Dann induziert die Abbildung  $\Phi: \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  einen Isomorphismus*

$$\bar{\Phi}: \pi_1(X_1, x_0) *_{\pi_1(X_0, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, x_0) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(X_1, x_0) \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

ist ein Pushout-Diagramm. Hierbei sind  $i_1, i_2, j_1$  und  $j_2$  von den jeweiligen Inklusionen induziert.

**BEWEIS.**

(a) Wegen Satz 4.3 haben wir einen Epimorphismus

$$\Phi: \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$$

und wir müssen den Kern bestimmen.

(b) Es sei  $\alpha \in \pi_1(X_0, x_0)$ . Dann bildet  $\Phi$  das Element  $(i_1(\alpha), i_2(\alpha)^{-1}) \in \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  auf die Klasse eines nullhomotopen geschlossenen Weges ab. Damit liegt ein solches Element im Kern und auch der von solchen Elementen erzeugte Normalteiler  $\mathcal{N}$  von  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  liegt im Kern von  $\Phi$ .

(c) Es ist zu zeigen, dass der Normalteiler  $\mathcal{N}$  schon der gesamte Kern von  $\Phi$  ist. Es sei also  $\beta = \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \in \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  mit  $\alpha_i \in \pi_1(X_1, x_0)$  oder  $\alpha_i \in \pi_1(X_2, x_0)$  und  $\Phi(\beta) = 1$ . Wir finden Repräsentanten  $\alpha_i = [w_i]$ , für die dann gilt:

$$1 = [w_1] * \dots * [w_k] \in \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0).$$

Wir teilen das Intervall  $[0, 1]$  in Teilintervalle der Länge  $\frac{1}{N}$  für geeignetes  $N$  und finden einen geschlossenen Weg  $w$ , der auf dem  $i$ -ten Teilintervall mit dem umparametrisierten Weg  $w_i$  übereinstimmt. Dann ist der Weg  $w$  nach Voraussetzung in  $X_1 \cup X_2 = X$  nullhomotop. Es sei  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  eine entsprechende Homotopie von  $w$  in  $X_1 \cup X_2$  auf den konstanten Weg  $c_{x_0}$ . Die Homotopie lässt Anfangs- und Endpunkt fest,  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

(d) Wir führen nun folgende Konstruktion für diese Homotopie aus:

- Wegen des Lebesgue-Lemmas können wir das Quadrat  $[0, 1]^2$  so in feine Teilquadrate unterteilen, dass für die Bilder jedes Teilquadrats  $Q$  gilt  $H(Q) \subset X_1$  oder  $H(Q) \subset X_2$ . Ohne Einschränkung ist die Lebesgue-Zahl von der Form  $\frac{1}{Nm}$ .
- Für jede Ecke  $e$  des Quadratgitters finden wir einen Hilfsweg  $v(e)$  vom Grundpunkt  $x_0 \in X$  nach  $H(e) \in X$ . Liegt  $H(e)$  in  $X_1 \cap X_2$ ,  $X_1$  oder  $X_2$ , so soll auch der Hilfsweg  $v(e)$  dort liegen. Ist  $H(e) = x_0$ , so wählen wir den konstanten Weg. Diese Konstruktion ist möglich, weil  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_1 \cap X_2$  wegzusammenhängend sind.
- Jede Kante  $K: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  des Quadratgitters ist ein Weg, dessen Bild  $H \circ K: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $H(K(0))$  nach  $H(K(1))$  ist, der ganz in  $X_1$  oder ganz in  $X_2$  liegt. Dann ist

$$\tilde{K} := v(K(0)) * (H \circ K) * \overline{v(K(1))}$$

ein geschlossener Weg mit Grundpunkt  $x_0$ , der ganz in  $X_1$  oder in  $X_2$  liegt.

- (e) Wir brauchen nun für solche geschlossenen Wege Bezeichnungen: Ist  $w: [0, 1] \rightarrow X$  ein geschlossener Weg, der ganz in  $X_0 = X_1 \cap X_2$ ,  $X_1$  oder  $X_2$  liegt, so bezeichnen wir die entsprechenden Homotopieklassen

$$[w]_0 \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0), [w]_1 \in \pi_1(X_1, x_0) \text{ oder } [w]_2 \in \pi_1(X_2, x_0).$$

Ist  $w$  ein Weg in  $X_1 \cap X_2$ , so können wir jedes der Elemente  $[w]_1$  und  $[w]_2$  als Gruppenelement im freien Produkt  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  auffassen. Für einen Weg  $w$  in  $X_1 \cap X_2$  sind beide Elemente  $[w]_1, [w]_2 \in G$  definiert, aber verschiedene Elemente von  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$ . Allerdings unterscheiden sie sich nur um ein Element im Normalteiler  $\mathcal{N}$ ,

$$[w]_1 \mathcal{N} = [w]_2 \mathcal{N} \in \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \mathcal{N}.$$

- (f) Es sei  $Q$  ein Teilquadrat mit Kanten  $u, r, \ell, o$  (für unten, rechts, links und oben). Dann sind die beiden Wege  $u * r \simeq \ell * o$  homotop mit Homotopien, die den Anfangs- und den Endpunkt festlassen, weil das Teilquadrat  $Q$  einfach zusammenhängend ist.

Wendet man  $H$  an und fügt wie in (d) Hilfswege ein, so erhält man  $\tilde{u} * \tilde{r} \simeq \tilde{\ell} * \tilde{o}$ , und zwar in  $X_1$  oder  $X_2$ , je nach dem, wo das Quadrat  $Q$  unter  $H$  hin abgebildet wird. In jedem Fall erhalten wir in  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \mathcal{N}$  die Gleichung  $[\tilde{u}][\tilde{r}] \mathcal{N} = [\tilde{\ell}][\tilde{o}] \mathcal{N}$ .

Jetzt multiplizieren wir alle diese Gleichungen zusammen. Die Homotopie  $H$  ist am linken und rechten Rand des großen Quadrats konstant, und am oberen Rand ist der konstante Weg. Also ergeben alle diese Wege das neutrale Element in  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \mathcal{N}$ .

- (g) Wenden wir dies auf den in (c) konstruierten Weg  $w$  und die zugehörige Homotopie an, so ist  $[w] \mathcal{N} = 1 \in \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \mathcal{N}$ , also  $w \in \mathcal{N}$ . Damit ist der Satz gezeigt. □

Wir kommen nun zu Anwendungen des Satzes von Seifert-van-Kampen:

- (a) Es sei  $X := \mathbb{S}_{(1)}^1 \vee \mathbb{S}_{(2)}^1$  das Bouquet zweier Kreislinien. Wir überdecken es so mit zwei offenen Mengen  $X_1, X_2$ , dass  $\mathbb{S}_{(k)}^1 \subset X_k$  für  $k = 1, 2$  und so dass der Grundpunkt  $x_0$  mit vier kleinen Segmenten im Schnitt  $X_1 \cap X_2$  liegt. Dann ist  $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$  und  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \{1\}$ . Daher ist

$$\pi_1(\mathbb{S}_{(1)}^1 \vee \mathbb{S}_{(2)}^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

- (b) Induktiv finden wir

$$(4.3) \quad \pi_1(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1, 1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_n =: \mathcal{F}_n.$$

- (c) Es sei  $T$  der zweidimensionalen Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  und  $X = T^2 \setminus \{p_0\}$ . Der Raum ist ein Deformationsretrakt des Bouquets,  $T^0 \setminus \{p_0\} \simeq \mathbb{S}_{(1)}^1 \vee \mathbb{S}_{(2)}^1$  und daher ist

$$\pi_1(T^2 \setminus \{p_0\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

- (d) Da für die Kleinsche Flasche  $K$  ebenfalls gilt, dass  $K \setminus \{p_0\} \simeq \mathbb{S}_{(1)}^1 \vee \mathbb{S}_{(2)}^1$ , ist

$$\pi_1(K \setminus \{p_0\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Wir untersuchen nun, wie sich die Fundamentalgruppe durch Ankleben von Zellen wie in Definition 10.8 verändert.

SATZ 4.8. *Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum und  $x_0 \in X$ . Ist  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  stetig mit  $f(1) = x_0$ , so sei  $i: X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n$  die Inklusion von  $X$ . Dann ist für  $n \geq 3$  der induzierte Gruppenhomomorphismus*

$$i_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0).$$

*ein Isomorphismus. Das Ankleben von Zellen  $e^n$  mit  $n \geq 3$  verändert also die Fundamentalgruppe nicht.*

BEWEIS. Wir betrachten die Abbildung

$$F: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (X \cup_f \mathbb{D}^n, X)$$

mit  $F|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f$  und setzen  $X_1 := X \cup_f (\mathbb{D}^n \setminus F(0))$  und  $X_2 := \mathring{\mathbb{D}} \subset X \cup_f \mathbb{D}^n$ . Wir wählen ein  $y_0$  in  $X_1 \cap X_2$  beliebig und einen Weg  $w$  von  $y_0$  nach  $x_0$ . Es liegt die Situation des Satzes 4.7 von Seifert-van Kampen vor.

- Es ist  $\pi_1(X_2, y_0) = \{1\}$ , weil die Kreisscheibe zusammenziehbar ist.
- Ferner hat der Durchschnitt

$$X_1 \cap X_2 = \mathring{\mathbb{D}}^n \setminus \{F(0)\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

nach Satz 4.4 für  $n \geq 3$  triviale Fundamentalgruppe, also ist  $\pi_1(X_1 \cap X_2, y_0) = \{1\}$ .

Nach dem Satz von Seifert-van Kampen 4.7 ist

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_0) \cong \pi_1(X_1, y_0).$$

Ferner haben wir die Isomorphie

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(X_1, y_0),$$

wobei die letzte Isomorphie durch den Weg  $w$  vermittelt wird, und die erste folgt, weil  $X$  ein Deformationsretrakt von  $X_1$  ist.

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \{1\} = \pi_1(X_1 \cap X_2, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X_2, y_0) = \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_1, y_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_0) \\ w_* \downarrow \cong & & \cong \downarrow w_* \\ \pi_1(X_1, x_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0) \\ \downarrow \cong & & \\ \pi_1(X, x_0) & & \end{array}$$

□

Die Situation ist anders beim Ankleben von 2-Zellen:

SATZ 4.9. *Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum mit  $x_0 \in X$  und  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ . Wir definieren*

$$\begin{aligned} w_f: [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto f(\exp(2\pi it)) \end{aligned}$$

*Es sei  $v: [0, 1] \rightarrow X$  ein beliebiger Weg von  $x_0$  nach  $f(1) = w_f(0) = w_f(1)$ . Dann induziert die Inklusion  $i: X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^2$  einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$$i_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0),$$

*dessen Kern der von*

$$\alpha_f := [v * w_f * \bar{v}] \in \pi_1(X, x_0)$$

*erzeugte Normalteiler  $\mathcal{N}(\alpha_f)$  ist.*

BEWEIS. Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 4.8 ist nun der entscheidende Unterschied, dass der Durchschnitt  $X_1 \cap X_2 \simeq \mathbb{S}^1$  keine triviale Fundamentalgruppe hat, sondern von der Klasse von  $v * w_f * \bar{v}$  erzeugt wird. Daher ist nach dem Satz von Seifert-van Kampen 4.7

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) *_{\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)} \pi_1(\mathbb{D}^2) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\alpha_f).$$

□

BEMERKUNGEN.

(a) Also ist

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\alpha_f).$$

(b) Der Normalteiler  $\mathcal{N}(\alpha_f)$  ist von der Wahl des Hilfswegs  $v$  unabhängig. Wir haben es also im Wesentlichen mit der Homotopieklasse des Weges  $w_f$  zu tun, der um den Rand der Zelle läuft. Durch das Ankleben der 2-Zelle haben wir das Element  $\alpha_f \in \pi_1(X; x_0)$  eliminiert.

BEISPIELE.

(a) Für  $k \geq 1$  sei  $f_k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definiert als  $f_k(z) = z^k$  und

$$X_{(k)} := \mathbb{S}^1 \cup_{f_k} \mathbb{D}^2.$$

Der Basispunkt sei  $x_0 = 1 \in \mathbb{S}^1$ . Ist  $w(t) = \exp(2\pi it)$  der Standarderzeuger von  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ , so ist  $w_f(t) = \exp(2\pi ikt)$  und  $\alpha_f = [w_f] = [w]^k = \alpha^k$ . Damit ist  $\pi_1(X_k, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) / \mathcal{N}(\alpha^k) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ .

Man hat eine Kreisscheibe, deren Rand in  $k$  Segmente unterteilt wird. Diese werden gleichsinnig identifiziert. Durchläuft man also das Segment  $k$ -mal, so erhält man als Weg den Rand der Kreisscheibe  $\mathbb{D}^2$ , der in der Kreisscheibe  $\mathbb{D}^2$  zusammenziehbar ist.

(b) Für  $k = 2$  erhalten wir die projektive Ebene  $\mathbb{R}P = X_2$ , deren Fundamentalgruppe zyklisch der Ordnung 2 ist.

DEFINITION 4.10. Ist  $G$  eine Gruppe, so nennen wir eine Teilmenge  $S \subset G$  ein *Erzeugendensystem* von  $G$ , falls jedes  $1 \neq g \in G$  eine Darstellung der Form

$$g = s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n}, \quad s_j \in S, i_j \in \mathbb{Z}$$

hat.

BEMERKUNG. Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig. Zum Beispiel ist  $S = G$  immer ein Erzeugendensystem. Ebenso ist die Darstellung  $g = s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n}$  nicht eindeutig. Sie können immer Nachbarn  $s_j^{i_j} \cdot s_j^{-i_j}$  kürzen. Ist  $G$  zum Beispiel abelsch, so gilt immer  $1 = aba^{-1}b^{-1}$  für alle  $a, b \in G$ ; insbesondere für Erzeuger.

DEFINITION 4.11.

- (a) Es sei  $G$  eine Gruppe. Ein *Erzeugendensystem*  $S \subset G$  heißt *frei*, falls aus  $s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n} = 1$  mit  $s_i \in S$  und  $i_k \in \mathbb{Z}$  folgt, dass es ein  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  gibt mit  $s_j = s_{j+1}$  und  $i_j = -i_{j+1}$ . Es gelten keine weiteren Relationen als  $s_j s_j^{-1} = s_j^{-1} s_j = 1$ .
- (b) Eine Gruppe  $G$  heißt *frei*, falls sie ein freies Erzeugendensystem  $S$  besitzt. Das Erzeugendensystem  $S$  legt die Gruppe fest; wir schreiben dann  $G = \mathcal{F}(S)$ .

BEISPIELE.

- Die leere Menge erzeugt die triviale Gruppe und die freie Gruppe auf einem Erzeuger ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .
- Die freie Gruppe auf zwei Erzeugern ist isomorph zu  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, 1)$ .

BEMERKUNGEN.

- (a) Ist  $|S| \geq 2$ , so ist  $\mathcal{F}(S)$  nicht abelsch.
- (b) Haben wir  $S, T$  mit  $|S| = |T|$ , so ist  $\mathcal{F}(S) \cong \mathcal{F}(T)$ .

- (c) Allgemeiner gilt, dass Gruppenhomomorphismen  $\text{Hom}(\mathcal{F}(S), G)$  in Bijektion stehen mit Abbildungen von Mengen  $S \rightarrow G$ . Klar ist, dass jeder solche Homomorphismus eine Abbildung von Mengen  $S \rightarrow G$  gibt. Umgekehrt sei  $f: S \rightarrow G$  eine Abbildung von Mengen. Wir setzen dann  $\varphi: \mathcal{F}(S) \rightarrow G$  an als

$$\varphi(s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n}) := f(s_1)^{i_1} \cdot \dots \cdot f(s_n)^{i_n}.$$

Dies ist ein Homomorphismus und eindeutig durch  $f$  auf den Erzeugern festgelegt.

Ist  $|S| = n < \infty$ , so schreibt man oft  $\mathcal{F}_n$  für  $\mathcal{F}(S)$ .

BEISPIEL. Ein topologisches Modell für  $\mathcal{F}_n$  ist  $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ , weil wir in (4.3) gesehen hatten, dass gilt

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1, 1\right) \cong \mathcal{F}_n.$$

Schreiben wir  $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1$  als direkten Limes

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1 = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$$

so ist das Bild jeder Abbildung  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  kompakt und daher in einem  $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  enthalten. Wir erhalten damit

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1, 1\right) \cong \pi_1\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1, 1\right).$$

DEFINITION 4.12. Es sei  $S \neq \emptyset$  eine Menge und  $R \subset \mathcal{F}(S)$  eine Teilmenge der frei erzeugten Gruppe. Wir bezeichnen mit  $\langle S, R \rangle = \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(R)$  die Faktorgruppe. Gilt für eine Gruppe  $G \cong \langle E, R \rangle$ , so heißt  $\langle S, R \rangle$  eine *Präsentierung* der Gruppe. Kann man für eine Gruppe  $G$  eine Präsentierung mit endlichen Mengen  $S, R$  finden, so heißt  $G$  *endlich präsentierbar*.

BEISPIELE.

- Die zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  hat die Präsentierung  $\langle t \mid t^n \rangle$ .
- Die Gruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  hat die Präsentierung  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .
- Die Gruppe  $\mathbb{Z} = \mathcal{F}_1$  ist präsentiert durch  $\langle s \mid \emptyset \rangle$  und allgemeiner ist  $\mathcal{F}_n$  präsentiert durch  $\langle s_1, \dots, s_n \mid \emptyset \rangle$ .

BEMERKUNG. Jede Gruppe besitzt eine Präsentierung: Wir nehmen  $S := G$  und betrachten den Epimorphismus  $p: \mathcal{F}(G) \rightarrow G$ , der festgelegt ist durch die Abbildung von Mengen  $\text{id}_G: G \rightarrow G$ , d.h.  $p$  schickt den Erzeuger  $g \in \mathcal{F}(G)$  auf das Element  $g \in G$ . Wir setzen  $R := \ker p$ . Dies gibt immer eine Präsentierung. Nützliche Präsentierungen zu finden, kann dagegen schwierig sein.

SATZ 4.13. *Es sei  $G$  eine endlich präsentierte Gruppe,  $G = \langle S, R \rangle$ . Dann gibt es einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  mit  $x_0 \in X$ , so dass  $\pi_1(X, x_0) \cong G$  gilt.*

BEWEIS. Es sei  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  die endliche Menge der Erzeugenden. Wir setzen  $X_1 := \bigvee_{i=1}^m \mathbb{S}^1$  mit Grundpunkt  $x_0 = [1]$ . Wir wissen, dass  $\pi_1(X_1, x_0) \cong \mathcal{F}(S)$ . Für  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subset \mathcal{F}(S)$  ist jede Relation  $r_i$  ein Wort in den Erzeugern  $s_1, \dots, s_m$  oder ihren Inversen. Wir finden nun geschlossene Wege

$$f_i: \mathbb{S}^1 \rightarrow X_1 = \bigvee_{i \in S} \mathbb{S}^1$$

mit  $f_i([\alpha]) = r_i$ , wobei  $[\alpha]$  ein Erzeuger von  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  ist. Wir konstruieren dann induktiv

$$\begin{aligned} X_2 &:= X_1 \cup_{f_1} \mathbb{D}^2 & \text{mit} & \quad \pi_1(X_2, x_0) \cong \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(r_1) \\ & \vdots \\ X_{n+1} &:= X_n \cup_{f_n} \mathbb{D}^2 & \text{mit} & \quad \pi_1(X_{n+1}, x_0) \cong \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(R) = \langle S, R \rangle = G. \end{aligned}$$

□

BEISPIEL. Wir untersuchen eine Fläche  $F_2$  vom Geschlecht 2, indem wir sie überdecken durch  $X_1, X_2$  mit der Gestalt von Tori, aus denen jeweils eine offene Kreisscheibe  $\mathring{\mathbb{D}}_\varepsilon^2$  herausgeschnitten ist und die sich in einem offenen Zylinder  $X_0$  überlappen, der homotopieäquivalent zu  $\mathbb{S}^1$  ist. Wir erhalten somit

$$\pi_1(F_2, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) *_{\pi_1(X_0, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}).$$

Wir benennen die Erzeuger  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . Die Relation ist dann  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ .

Für die Fundamentalgruppe einer Fläche  $F_g$  vom Geschlecht  $g$  erhalten wir induktiv (Übung)

$$\pi_1(F_g, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle.$$

## 5. Transformationsgruppen

DEFINITION 5.1. Eine Menge  $G$  mit der Struktur einer Gruppe und eines topologischen Raums heißt *topologische Gruppe*, falls die Multiplikation

$$\mu: G \times G \rightarrow G$$

und die Inversenabbildung

$$(-)^{-1}: G \rightarrow G$$

beide stetig sind. Hierbei ist  $G \times G$  mit der Produkttopologie versehen.

Jede Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe.

BEISPIELE.

- Die additiven Gruppen der Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , versehen mit der euklidischen Topologie, sind topologische Gruppen. Ebenso sind  $\mathbb{K}^\times = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  topologische Gruppen. Versieht man einen endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  mit der diskreten Topologie, dann gilt dies ebenso.
- Ebenso ist der  $\mathbb{K}^n$  mit der Addition eine topologische Gruppe.
- Ist  $G$  topologische Gruppe, dann ist jede Untergruppe  $H \leq G$  mit der Unterraumtopologie eine topologische Gruppe. Zum Beispiel ist  $\mathbb{S}^1 = \text{SO}(2) < \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine topologische Gruppe.
- Ein Produkt  $G = \prod_{i \in I} G_i$  ist genau dann eine topologische Gruppe, wenn alle  $G_i$  topologische Gruppen sind. Zum Beispiel ist der  $n$ -dimensionale Torus  $T^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  eine topologische Gruppe.
- Viele „klassische“ Gruppen sind topologische Gruppen. Zum Beispiel trägt  $GL_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n^2}$  als topologischer Raum die Unterraumtopologie. Die Stetigkeit von Multiplikation und Inversenabbildung folgt dabei aus den konkreten Formeln für Matrizen. In dieser Gruppe können Untergruppen  $G \leq GL_n(\mathbb{K})$  durch Gleichungen charakterisiert werden, so zum Beispiel

$$\begin{array}{ccc} \text{O}(n) & \subset & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ \text{SO}(n) & \subset & \text{SL}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Man beachte, dass die Gruppen  $\text{O}(n)$  und  $\text{SO}(n)$  kompakt sind. Die Gruppe  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , aber nicht kompakt.

- Lie-Gruppen* sind topologische Gruppen, bei denen der topologische Raum  $G$  überdies die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat und bei denen Multiplikation und Inversenabbildung differenzierbar sind.

BEMERKUNGEN.

- Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $g \in G$ . Dann sind die Links- und Rechtstranslationen

$$\begin{array}{l} L_g: G \rightarrow G, \\ g' \mapsto gg' \\ \\ R_g: G \rightarrow G, \\ g' \mapsto g'g \end{array}$$

Homöomorphismen mit Umkehrabbildungen  $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$  bzw.  $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$ .

(b) Für jedes  $g \in G$  betrachten wir die Konjugation  $c_g := L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g: G \rightarrow G$ , also

$$c_g(g') := gg'g^{-1}.$$

(c) Es seien  $G_1, G_2$  topologische Gruppen und  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist  $\varphi$  genau dann stetig, wenn  $\varphi$  stetig im neutralen Element  $1 \in G_1$  ist (Übung).

DEFINITION 5.2. Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum. Wir sagen,  $G$  operiert auf  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung

$$\rho: G \times X \rightarrow X$$

gibt mit

- (a)  $\rho(1, x) = x$  für alle  $x \in X$ , und
- (b)  $\rho(g_2, \rho(g_1, x)) = \rho(g_2 \cdot g_1, x)$  für alle  $g_1, g_2 \in G$ .

Dann heißt  $G$  Transformationsgruppe von  $X$ , und  $X$  heißt  $G$ -Raum.

Wir schreiben auch  $\rho(g, x) = g.x = gx$ . Wir haben einen Homomorphismus  $G \rightarrow \text{Homöo}(X)$  von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $X$ . Zum Beispiel operiert jede Gruppe auf sich selbst durch Linkstranslationen und durch Konjugation. Die Gruppe  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R}^n$  durch Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

DEFINITION 5.3. Es sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Operation einer topologischen Gruppe  $G$ .

- (a) Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *invariant* oder *stabil* unter  $G$ , falls  $g.a \in A$  für alle  $g \in G$  und alle  $a \in A$  gilt.
- (b) Es sei  $x_0 \in X$ . Dann heißt

$$Gx_0 := \{g.x_0 \mid g \in G\}$$

die *Bahn* von  $x_0$ . Die Bahn  $Gx_0$  ist invariant unter  $G$ .

(c) Die Gruppe

$$G_{x_0} := \text{Stab}_G(x_0) := \{g \in G \mid gx_0 = x_0\} < G$$

heißt *Stabilisatoruntergruppe* oder *Isotropiegruppe* von  $x_0$ . Es gilt  $\text{Stab}_G(gx_0) = g\text{Stab}_G(x_0)g^{-1}$ .

- (d) Ein  $x_0 \in X$  heißt *Fixpunkt* der Gruppenwirkung, wenn  $\text{Stab}_G(x_0) = G$  gilt.
- (e) Eine Gruppenwirkung heißt *frei*, falls  $gx \neq x$  für alle  $g \in G$  mit  $g \neq 1$  und alle  $x \in X$  gilt, also wenn alle Stabilisatoren trivial sind.
- (f) Eine Gruppenwirkung heißt *effektiv*, falls  $\rho(g, -) \neq \text{id}_X$  für alle  $g \neq 1$  gilt. Freie Wirkungen sind insbesondere effektiv.
- (g) Eine Gruppenwirkung heißt *transitiv*, falls  $Gx_0 = X$  alle  $x_0 \in X$  gilt, also wenn es nur eine Bahn gibt.

DEFINITION 5.4.

Es seien  $X$  und  $Y$   $G$ -Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt  $G$ -äquivariant, falls  $f(gx) = gf(x)$  für alle  $g \in G$  und alle  $x \in X$  gilt.

BEMERKUNG.

- Eine Gruppenwirkung  $\rho: G \times X \rightarrow X$  induziert eine Äquivalenzrelation auf  $X$ : Es ist  $x \sim_G y$  genau dann, wenn es ein  $g \in G$  gibt mit  $gx = y$ , also genau dann, wenn  $y \in Gx$  gilt. Die Äquivalenzklasse von  $x_0 \in X$  ist dann die Bahn von  $x_0$ , also  $[x_0] = Gx_0$ . Die Menge der Äquivalenzklassen, den sogenannten *Bahnenraum*, bezeichnen wir mit  $X/G := X/\sim_G$ .

Wie üblich versehen wir den Bahnenraum mit der Quotienttopologie, so dass  $\pi: X \rightarrow X/G$  stetig ist.

- Eine  $G$ -äquivariante stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{f}: X/G &\rightarrow Y/G, \\ [x] &\mapsto [f(x)]. \end{aligned}$$

Wir haben nämlich eine eindeutige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi^X \downarrow & & \downarrow \pi^Y \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G \end{array}$$

die stetig ist, weil  $\pi^X \circ \bar{f} = f \circ \pi^Y$  stetig ist. Ist  $f$  ein Homöomorphismus, so ist auch  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus.

DEFINITION 5.5. Es sei  $X$  ein  $G$ -Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge  $F \subset X$  heißt *Fundamentaltbereich* für die  $G$ -Wirkung, falls jede Bahn  $F$  mindestens einmal schneidet.

Typischerweise wird der Fundamentaltbereich  $F$  so gewählt, dass jede Bahn das Innere  $\overset{\circ}{F}$  nur einmal schneidet, aber den Rand  $\partial F$  eventuell mehrfach.

BEISPIELE.

(a) Es seien  $w_1, w_2$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^2$ . Das *Gitter*

$$\Gamma := \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \lambda_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist eine additive Gruppe, die auf  $\mathbb{R}^2$  durch Addition operiert:

$$\rho(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, x) := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + x.$$

Ein Fundamentaltbereich ist die Gitterwabe

$$F := \{\alpha w_1 + \beta w_2 \mid 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

Es ist  $\mathbb{R}^2/\Gamma \cong T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  und  $F/\Gamma \cong T$ .

(b) Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf der komplexen oberen Halbebene  $\mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(z) > 0\}$  durch

$$z \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d},$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$  gilt. Die Untergruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert durch Einschränkung ebenfalls auf  $\mathbb{H}$ .

Der folgende Satz zeigt, dass Gruppenwirkungen sehr besondere Identifizierungen ergeben.

SATZ 5.6.

Es sei  $X$  ein  $G$ -Raum. Die Projektion  $\pi: X \rightarrow X/G$  ist stets offen.

BEWEIS. Es sei  $B \subset X$  offen. Es ist  $\pi(B)$  genau dann offen in der Quotiententopologie auf  $X/G$ , wenn  $\mathrm{Sat}(B) = \pi^{-1}\pi(B) \subset X$  offen in  $X$  ist. Aber

$$\mathrm{Sat}(B) = \cup_{g \in G} gB$$

und mit  $B$  ist auch  $gB$  für alle  $g \in G$  offen, weil  $L_g$  ein Homöomorphismus ist. □

SATZ 5.7.

Es sei  $X$  ein  $G$ -Raum und  $Y \subset X$  invariant. Dann induziert die Einbettung  $i: Y \rightarrow X$  einen Homöomorphismus

$$\bar{i}: Y/G \rightarrow \pi^X(Y) \subset X/G.$$

BEWEIS. Es ist klar, dass  $\bar{i}$  bijektiv und stetig ist. Um zu zeigen, dass  $\bar{i}$  offen ist, sei  $B' \subset Y$  offen. Dann gibt es  $B \subset X$  offen in  $X$  mit  $B' = B \cap Y$ . Nun ist

$$\bar{i}(\pi^Y(B')) = \pi^X(Y) \cap \pi^X(B)$$

und  $\pi^X(B)$  ist offen in  $X/G$  nach Satz 5.6. Also ist  $\pi^X(B) \cap \pi^X(Y)$  offen in  $\pi^X(Y)$ . □

SATZ 5.8.

Ist  $X_1$  ein  $G_1$ -Raum und  $X_2$  ein  $G_2$ -Raum, so ist  $X_1 \times X_2$  mit der Produkttopologie ein  $G_1 \times G_2$  Raum. Es gilt

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \cong X_1/G_1 \times X_2/G_2.$$

BEWEIS. Mit der  $G_1 \times G_2$ -Wirkung auf  $X_1$ , die durch  $(g_1, g_2).x := g_1x$  gegeben ist, gilt  $X_1/(G_1 \times G_2) \cong X_1/G_1$ . Die Abbildung  $p_1: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  ist für diese  $G_1 \times G_2$ -Wirkung äquivariant. Analoge Aussagen gelten für die analoge  $G_1 \times G_2$ -Wirkung auf  $X_2$ . Daher ist

$$\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2): (X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \rightarrow X_1/G_1 \times X_2/G_2$$

bijektiv und stetig.

Um zu zeigen, dass  $\bar{p}$  offen ist, sei  $\bar{B}$  offen in  $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ . Dann ist  $\pi^{-1}(\bar{B})$  offen in  $X_1 \times X_2$  und nach Satz 7.4 von der Form

$$\pi^{-1}(\bar{B}) = \bigcup_{i \in I} B_1^i \times B_2^i$$

mit  $B_j^i$  offen in  $X_j$ . Damit ist dann aber

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{B}) &= (\pi_{G_1} \times \pi_{G_2})\left(\bigcup_{i \in I} B_1^i \times B_2^i\right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \pi_{G_1}(B_1^i) \times \bigcup_{i \in I} \pi_{G_2}(B_2^i) \end{aligned}$$

nach Satz 5.6 ebenfalls offen. □

Eine wichtige Beispielklasse topologischer Räume sind homogene Räume. Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \leq G$  Untergruppe, so heißt  $G/H$  ein *homogener Raum*, wenn  $G$  eine Lie-Gruppe ist und  $H$  abgeschlossen in  $G$  ist. Der folgende Satz erklärt, warum wir fordern, dass  $H$  abgeschlossen in  $G$  ist:

SATZ 5.9. *Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $H < G$ . Dann ist  $G/H$  genau dann hausdorffsch, wenn  $H$  abgeschlossen ist.*

Der Beweis dieser Behauptung und des nächsten Satzes ist eine Übungsaufgabe.

SATZ 5.10. *Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $H < G$ . Der topologische Raum  $G/H$  ist genau dann diskret, wenn  $H$  offen ist.*

SATZ 5.11. *Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so ist die Zusammenhangskomponente  $G_1 = Z(1)$  des neutralen Elements ein abgeschlossener Normalteiler in  $G$ .*

BEWEIS.

- Nach Satz 9.7 ist  $Z(1)$  als Zusammenhangskomponente abgeschlossen.
- Da die Inversenabbildung stetig ist, ist auch  $(-)^{-1}(Z(1))$  zusammenhängend und enthält das neutrale Element  $1 \in G$ . Also liegt mit  $g \in Z(1)$  auch  $g^{-1} \in Z(1)$ .
- Da  $L_g$  stetig ist, ist  $g.Z(1)$  zusammenhängend für jedes  $g \in G$ . Ist  $g \in Z(1)$ , so liegt  $g^{-1} \in Z(1)$  und somit  $1 = gg^{-1} \in gZ(1)$ . Also ist für jedes  $g \in Z(1)$  das Bild  $gZ(1) = Z(1)$ . Die Zusammenhangskomponente  $Z(1)$  ist somit unter Multiplikation abgeschlossen. Also ist  $Z(1)$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ .
- Für jedes  $g \in G$  liefert die Konjugation einen Homöomorphismus

$$c_g: Z(1) \rightarrow gZ(1)g^{-1}.$$

Nun ist  $1 = g1g^{-1} \in gZ(1)g^{-1}$  und daher  $Z(1) = gZ(1)g^{-1}$  für alle  $g \in G$  und daher ist  $Z(1)$  eine normale Untergruppe. □

Es sei  $X$  ein  $G$ -Raum und  $x_0 \in X$ . Dann kann man immer die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}: G/\text{Stab}_G(x_0) &\rightarrow Gx_0 \\ g.\text{Stab}_G(x_0) &\mapsto gx_0 \end{aligned}$$

betrachten. Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig. Sie ist überdies bijektiv und  $G$ -äquivariant, aber im Allgemeinen *kein* Homöomorphismus.

BEISPIEL. Es sei  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ . Auf  $X = T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  operiere die topologische Gruppe  $G = \mathbb{R}$  durch

$$\rho_\theta(t, z, w) = (\exp(2\pi it)z, \exp(2\pi i\theta t)w).$$

Ist  $\theta \in \mathbb{Q}$ , so sind die Bahnen geschlossen und  $\varphi$  ist ein Homöomorphismus. Im Falle  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  liegen die Bahnen dicht, die Topologie der Bahn  $G_{x_0} \subset T$  ist also nicht die euklidische Topologie von  $\mathbb{R}$ .

DEFINITION 5.12. Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum. Eine Operation  $\rho: G \times X \rightarrow X$  heißt *eigentlich*, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta: G \times X &\rightarrow X \times X, \\ (g, x) &\mapsto (x, g.x) \end{aligned}$$

eigentlich ist. Das heißt, dass  $\theta$  abgeschlossen ist und dass das Urbild  $\theta^{-1}(x, x')$  für alle  $(x, x') \in X \times X$  kompakt ist.

LEMMA 5.13.

Operiert eine topologische Gruppe  $G$  eigentlich auf einem topologischen Raum  $X$ , so gilt:

- (a) Der Bahnenraum  $X/G$  ist Hausdorffsch.
- (b) Ist die topologische Gruppe  $G$  hausdorffsch, so auch  $X$ .

BEWEIS.

- (a) Da  $\theta$  abgeschlossen ist, ist

$$\theta(G \times X) = \{(x, x') \in X \times X \mid x' \in Gx\} \subset X \times X$$

abgeschlossen. Damit ist aber die Diagonale des Bahnenraums  $X/G$  abgeschlossen und  $X/G$  nach Satz 6.4 hausdorffsch.

- (b) Da die topologische Gruppe  $G$  hausdorffsch ist, ist  $1 \in G$  abgeschlossen und daher ist

$$\begin{aligned} i: X &\rightarrow G \times X, \\ x &\mapsto (1, x) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge. Somit ist  $\theta \circ i$  abgeschlossen und  $\theta \circ i(X) = \Delta_X \subset X \times X$  ist abgeschlossen. Nach Satz 6.4 ist  $X$  hausdorffsch. □

SATZ 5.14. Operiert  $G$  eigentlich auf  $X$ , so gilt:

- (a) Die Abbildung

$$\omega_{x_0}: G \rightarrow X, \quad g \mapsto g.x_0$$

ist eigentlich.

- (b) Für alle  $x_0 \in X$  ist der Stabilisator  $G_{x_0}$  kompakt.
- (c) Die Abbildung  $\varphi_{x_0}: G/\text{Stab}_G(x_0) \rightarrow G.x_0$ , die  $g\text{Stab}_G(x_0)$  auf  $gx_0$  abbildet, ist ein Homöomorphismus.
- (d) Für jedes  $x_0 \in X$  ist die Bahn  $Gx_0 \subset X$  abgeschlossen.

BEWEIS.

- (a) Als Vorüberlegung betrachten wir eine eigentliche Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ . Ist  $Y' \subset Y$  und  $\tilde{f} := f|_{f^{-1}(Y')}: f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ , so überlegt man sich leicht, dass auch  $\tilde{f}$  eigentlich ist. Insbesondere ist für jedes  $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \theta|_{G \times \{x_0\}}: G \times \{x_0\} &\rightarrow \{x_0\} \times X \\ (g, x_0) &\mapsto (x_0, g.x_0) \end{aligned}$$

und damit auch  $\omega_{x_0}$  als Komponente von  $\theta|_{G \times \{x_0\}}$  eigentlich.

- (b) Für jedes  $x_0 \in X$  ist das Urbild

$$\omega_{x_0}^{-1}(x) = \{g \in G \mid gx_0 = x\} = G_{x_0}$$

kompakt, weil  $\omega_{x_0}$  eigentlich ist.

(c) Wir wissen, dass die Abbildung  $\varphi_{x_0}$  aus immer stetig und bijektiv ist,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\omega_{x_0}} & X \\ & \searrow \pi & \nearrow \varphi_{x_0} \\ & G/G_x & \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\varphi_{x_0}$  abgeschlossen ist. Wir wissen aus (a), dass  $\varphi_{x_0} \circ \pi = \omega_{x_0}$  eigentlich und  $\pi$  surjektiv ist. Es ist  $A \subset G/G_{x_0}$  genau dann abgeschlossen, wenn  $\pi^{-1}(A) \subset G$  abgeschlossen ist. Daraus folgt aber, dass  $\omega_{x_0}\pi^{-1}(A) \subset X$  abgeschlossen ist, wenn  $A \subset G/G_x$  abgeschlossen ist. Es gilt nun wegen der Surjektivität von  $\pi$ :

$$\varphi_{x_0}(A) = \varphi_{x_0}(\pi \circ \pi^{-1}(A)) = \omega_{x_0}\pi^{-1}(A),$$

also ist  $\varphi_{x_0}(A)$  abgeschlossen.

(d) Damit ist auch insbesondere  $Gx_0 = \omega_{x_0}(G)$  abgeschlossen. □

Wir brauchen eine praktikable notwendige Bedingung dafür, dass eine Gruppenwirkung eigentlich ist.

DEFINITION 5.15. Es sei  $X$  ein  $G$ -Raum. Eine Operation hat *kompakte Wiederkehr*, falls es für alle  $(x, x') \in X \times X$  offene Umgebungen  $V_x$  von  $x$  und  $V_{x'}$  von  $x'$  gibt, so dass

$$(5.1) \quad \mathcal{G}_{V_x, V_{x'}} := \{g \in G \mid gV_x \cap V_{x'} \neq \emptyset\} \subset G$$

in einer kompakten Teilmenge von  $G$  liegt.

Dann ist wegen Satz 12.4 die Menge  $\overline{\mathcal{G}_{V_x, V_{x'}}}$  kompakt. Jede Operation einer kompakten Gruppe hat insbesondere kompakte Wiederkehr.

SATZ 5.16. *Es sei  $X$  hausdorffsch. Dann ist eine Operation  $\rho: G \times X \rightarrow X$  mit kompakter Wiederkehr eigentlich.*

BEWEIS.

- Wir nehmen für unseren Beweis überdies an, dass der topologische Raum  $X$  das Abzählbarkeitsaxiom (AZ1) aus Definition 3.5 erfüllt, d.h. dass jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Für den Beweis in der allgemeinen Situation verweisen wir auf [tD, Chapter 1, Proposition (3.21)].
- Nach Satz 3.7 (a) ist es unter der Annahme von (AZ1) möglich, Abgeschlossenheit durch Betrachtung von Folgen zu zeigen. Es sei  $A \subset G \times X$  abgeschlossen. Zu zeigen ist, dass  $\theta(A)$  in  $X \times X$  abgeschlossen ist. Es sei  $(x_i, x'_i) \in \theta(A)$  eine Folge, die in  $X \times X$  konvergiert,  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, x'_i) = (x, x')$ .

Da  $(x_i, x'_i) \in \theta(A)$ , finden wir Urbilder  $(g_i, x_i) \in A$  mit  $x'_i = g_i x_i$ . Wir wählen Umgebungen  $V_x$  und  $V_{x'}$  wie in (5.1) und wir können annehmen, dass  $x_i \in V_x$  und  $x'_i \in V_{x'}$  für alle  $i$ , denn wegen der Konvergenz liegen fast alle Folgenglieder in diesen Umgebungen. Wir setzen  $K := \overline{\mathcal{G}_{V_x, V_{x'}}}$ , dann liegen alle  $g_i$  in der kompakten Menge  $K$ . Daher gibt es eine konvergente Teilfolge  $g := \lim_{j \rightarrow \infty} g_{j_i}$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $(g, x) \in A$ . Wegen der Stetigkeit von  $\theta$  ist  $\theta(g, x) = (x, x')$ . Also ist  $(x, x') \in \theta(A)$  und  $\theta(A)$  somit abgeschlossen.

- Es ist

$$\theta^{-1}(x, x') = \{g \in G \mid gx = x'\} \times \{x\}.$$

Da  $X$  hausdorffsch ist, ist der Punkt  $(x, x')$  in  $X \times X$  abgeschlossen und da  $\theta$  stetig ist, ist  $\theta^{-1}(x, x')$  abgeschlossen und wegen der kompakten Wiederkehr in einer kompakten Menge enthalten und daher nach Satz 12.4.2 kompakt. □

BEISPIEL. Die Operation der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  auf  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

$$O(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

ist transitiv, aber nicht frei. Da die Gruppe  $O(n)$  kompakt ist, hat die Operation kompakte Wiederkehr; da  $S^{n-1}$  hausdorffsch ist, ist die Operation nach Satz 5.16 eigentlich.

Betrachte  $e_n := (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Dann ist  $\text{Stab}_{\text{O}(n)}(e_n) = \text{O}(n-1) \subset \text{O}(n)$ . Nach Satz 5.14.3 haben wir einen Homöomorphismus

$$\text{O}(n)/\text{O}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}.$$

Sphären sind also homogene Räume.

Wir brauchen für spätere Zwecke die folgenden stärkeren Annahmen an eine Wirkung:

**BEMERKUNG.** Ist  $G$  eine diskrete Gruppe und hat die Wirkung  $\rho: G \times X \rightarrow X$  kompakte Wiederkehr, dann ist  $\overline{\mathcal{G}_{V_x, V_{x'}}} \subset G$  kompakt und daher endlich.

**DEFINITION 5.17.**

Es sei  $G$  diskret und  $X$  ein  $G$ -Raum. Dann heist die Operation *eigentlich diskontinuierlich*, falls es für alle  $x \in X$  eine Umgebung  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gibt, so dass aus  $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$  folgt, dass  $g_1 = g_2$  gilt.

**BEMERKUNGEN.**

- (a) Es genügt zu fordern, dass es für jedes  $x \in X$  ein  $u \in \mathfrak{U}(x)$  gibt mit  $U \cap gU = \emptyset$  für alle  $g \in G$  mit  $g \neq 1$ .

Denn  $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$  gilt genau dann, wenn es  $x, x' \in U$  gibt mit  $g_1x = g_2x'$ , was aber genau dann der Fall ist, wenn  $x = g_1^{-1}g_2x'$ . Genau dann ist aber  $U \cap g_1^{-1}g_2U \neq \emptyset$ .

- (b) Eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen sind insbesondere frei.

## Literaturverzeichnis

- [Q] B.v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer 2001.
- [tD] Tammo tom Dieck, Transformation Groups, De Gruyter Studies in Mathematics, 8. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987.