Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 12 Abgabetermin: 26.01.2024, 16:00h

(1) (Konfigurationsräume) (4 Punkte)
Betrachten Sie den geordneten Konfigurationsraum

$$\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^2, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$

und den ungeordneten Konfigurationsraum

$$C_n(\mathbb{R}^2) = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \mid x_i \in \mathbb{R}^2, |\{x_1, \ldots, x_n\}| = n\}$$

aller Konfigurationen von n Punkten des $\mathbb{R}^2$.

Fassen Sie $C_n(\mathbb{R}^2)$ als Quotienten von $\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2)$ auf, indem Sie eine geeignete Gruppenoperation auf $\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2)$ betrachten, und zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung definiert.

(2) (Universelle Überlagerung) (2 Punkte)
Was ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$. Zeichnen Sie diese!

(3) (Zurückziehen von Überlagerungen) (3 + 1 Punkte)
Es sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie den pullback $\tilde{Y} =: f^*(p)$ des inversen Systems

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} = f^*(p) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[d, dotted, "\tilde{p}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X.
\end{tikzcd}$$

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{p}$ wiederum eine Überlagerung ist mit derselben typischen Faser wie p.

b) Bildet $\tilde{f}$ die Fasern von $\tilde{p}$ auf die Fasern von p ab?

(4) (Cayley Graphen) (2 + 3 + 3 Punkte)
Die Gruppe G sei präsentiert als $G = \langle x_i, i \in I \mid r_j, j \in J\rangle$. Konstruieren Sie den folgenden Graphen: Für jedes Element in der Gruppe G setzen Sie einen Punkt und Sie kleben eine Kante zwischen g und gx_i für jeden Erzeuger x_i. Der entstehende Graph heißt *Cayley Graph der Gruppe* G, C_G.

a) Zeigen Sie, dass C_G zusammenhängend ist.

Klebt man jetzt für jede Relation r_j eine 2-Scheibe ein, so erhält man einen Raum, $\widetilde{X}_G$. Lassen Sie G auf $\widetilde{X}_G$ operieren, indem Sie für ein $g \in G$ einen Punkt g' auf gg' abbilden, eine Kante zwischen g' und $g'x_i$ auf die Kante zwischen gg' und $gg'x_i$ schicken.

b) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert auf $\widetilde{X}_G$ fortgesetzt werden kann.

c) Beweisen Sie, dass diese Operation eine Überlagerung $\widetilde{X}_G \to \widetilde{X}_G/G$ ergibt.

(Im Fall einer endlichen Präsentierung sollten Sie den Raum wiedererkennen.)

*) Präsentierungen von Gruppen sind nicht eindeutig. Kann man C_G und $\tilde{X}_G$ für verschiedene Präsentierungen vergleichen oder müsste man eigentlich die Präsentierung in der Notation miterwähnen?