Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 7 Abgabetermin: 8.12.2023, 16:00h

(1) (Kompaktheit und Limites) (2 + 2 Punkte)

a) Ist die unendlich dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim(\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \ldots \subset \mathbb{S}^n \subset \ldots)$ kompakt?

b) Zeigen Sie, dass der Hawaiische Ohrring kompakt ist.

(2) (Fundamentalgruppen topologischer Gruppen) (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei G eine topologische Gruppe, also eine Gruppe G, die ein topologischer Raum ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ist $\varnothing \neq X$ ein beliebiger topologischer Raum, so definieren wir auf $[X, G]$ und auf $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ eine Multiplikation durch $[f] \bullet [g] := [f \bullet g]$, wobei $(f \bullet g)(x) := f(x)g(x)$.

a) Zeigen Sie, dass $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ dadurch eine Gruppe wird. Gilt das auch für $[X, G]$?

b) Beweisen Sie, dass für $(X, x_0) = (\mathbb{S}^1, 1)$ die beiden Multiplikationen $f * g$ und $f \bullet g$ übereinstimmen.

c) Auch für nichtabelsche Gruppen G ist $\pi_1(G, 1)$ abelsch. Warum?

(3) (Kegel) (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $\varnothing \neq X$ ein beliebiger Raum. Der Kegel auf X, CX sei definiert als $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Hat X einen Grundpunkt $x_0 \in X$ so betrachtet man oft den reduzierten Kegel $C'X = X \times [0, 1]/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1])$.

a) Zeigen Sie, dass CX und $C'X$ zusammenziehbar sind.

Der Raum X kann als Unterraum des Kegels aufgefasst werden, indem man X mit $X \times \{0\}$ identifiziert. Es sei $i \colon X \to CX$ die Inklusion.

b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f \colon X \to Y$ genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich auf den Kegel CX fortsetzen lässt.

Der Abbildungskegel einer Abbildung $f \colon X \to Y$ ist definiert als $C_f := Y \cup_f CX$. Hierbei ist Y in kanonischer Weise ein Unterraum von C_f.

c) Es sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Verkettung von Abbildungen. Beweisen Sie, dass $g \circ f$ genau dann nullhomotop ist, falls man g über den Kegel von f faktorisieren kann:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & Z, \\ & C_f \arrow[ur, dotted, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

d.h. es gibt ein $\bar{g}$ mit $\bar{g} \circ i = g$.

(4) (Zur Homotopieäquivalenz) (2 Punkte)

Zu $f \colon X \to Y$ gebe es $h, k \colon Y \to X$ mit $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$. Beweisen Sie, dass dann X homotopieäquivalent ist zu Y.